1. Vers le Théorème de d'Alembert-Gauss ***
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme *non constant* tel que $P(0) = 1$.
1.1 Il existe un nombre complexe $a \neq 0$ et un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(z) - 1 \underset{z \to 0}{\sim} az^q.$$

1.2 Pour z assez petit, on a donc

$$\left|P(z) - 1 - az^q\right| \leqslant \frac{|az^q|}{2}$$

et, par inégalité triangulaire,

$$\left|P(z)\right| \leqslant |1 + az^q| + \frac{|az^q|}{2}.$$

En choisissant z de telle sorte que az^q soit un réel compris entre 0 et 1 (strictement), on en déduit que $|P(z)|$ prend des valeurs strictement inférieures à 1 pour des valeurs de z arbitrairement proches de 0.
1.3 De même, $|P(z)|$ prend des valeurs strictement supérieures à 1 pour des valeurs de z arbitrairement proches de 0.

I

Degré

2. Polynômes de Tchebychev
Les polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n.$$

De plus, $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Degré et coefficient dominant du polynôme T_n ?
3. Famille échelonnée en degré
On considère une famille de polynôme $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \deg P_k = k.$$

Pour tout polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$, il existe une, et une seule, famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n.$$

(Par récurrence sur n.)
4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si un polynôme P vérifie l'équation

$$P - P' = Q, \tag{E}$$

alors $\deg P = \deg Q$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{(k)} - P^{(k+1)} = Q^{(k)}.$$

L'équation (E) admet donc une, et une seule, solution.
5. Solutions polynomiales d'une équation différentielle
5.1 L'équation différentielle

$$3xy''(x) - 5y'(x) + xy(x) = 0$$

n'a pas de solution polynomiale non nulle.
5.2 Les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0$$

sont de la forme $y(x) = ax^3 + bx^2$.
5.3 Les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0$$

sont de la forme $y(x) = ax^3 + bx$.
5.4 L'équation différentielle

$$xy''(x) - xy'(x) + 3y(x) = 5x^2$$

admet

$$y(x) = x^3 - x^2 + x + a(x^3 - 6x^2 + 6x)$$

pour solution polynomiale, quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

II

Division euclidienne et arithmétique

6. Calcul du reste
Reste de la division euclidienne de X^n par
1. X^m
2. $(X - a)$
3. $(X - a)^n$
4. $(X - 1)(X + 2)$
5. $(X - 1)^2(X - 2)$

7. Soient p et q, deux entiers naturels supérieurs à 2, premiers entre eux.
7.1 Les racines de $X^p - 1$ et celles de $X^q - 1$ sont des racines de $X^{pq} - 1$.
7.2 Si $\zeta^p = \zeta^q = 1$, alors il existe deux entiers relatifs a et b tels que

$$\zeta = (\zeta^p)^a(\zeta^q)^b = 1.$$

Donc $X^p - 1$ et $X^q - 1$ n'ont qu'une seule racine commune.
Par conséquent,

$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X^{pq} - 1)(X - 1).$$

8. Soient a et b, deux entiers naturels non nuls.
8.1 S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = nb$, alors

$$X^a - 1 = (X^b - 1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^{bk}\right).$$

8.2 Si $(X^b - 1)$ divise $(X^a - 1)$, alors toute racine b-ième de l'unité est aussi une racine a-ième de l'unité et en particulier

$$\left(\exp\frac{2i\pi}{b}\right)^a = 1.$$

Donc b divise a.
9. Soient A et B, deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
9.1 Si A et B sont premiers entre eux, alors

$$A \wedge (A + B) = B \wedge (A + B) = 1,$$

donc AB et $A + B$ sont premiers entre eux.
9.2 Si un polynôme P_0 divise A et B, alors il divise $(A + B)$ et AB.

10. Polynômes interpolateurs de Lagrange
On considère $(n+1)$ nombres complexes $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ deux à deux distincts et on note $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, la famille des polynômes interpolateurs associés à ces abscisses :

$$\forall\, 0 \leqslant k, \ell \leqslant n, \quad L_k(a_\ell) = \delta_{k,\ell}. \tag{$\mathscr{L}$}$$

10.1 Comme $L_0 + L_1 + \cdots + L_n = 1$, les polynômes de Lagrange sont premiers dans leur ensemble.
10.2 Le polynôme

$$L = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$$

est le ppcm des polynômes L_k, $0 \leqslant k \leqslant n$.
10.3 Comme

$$\forall\, 0 \leqslant d \leqslant n, \quad X^d = \sum_{k=0}^{n} a_k^d L_k,$$

les polynômes de Lagrange engendrent le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k.$$

D'après ($\mathscr{L}$), pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe une, et une seule, famille $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k.$$

10.4 Pour tout $d > n$, le polynôme

$$R_d = \sum_{k=0}^{n} a_k^d L_k$$

est le reste de la division euclidienne de X^d par le polynôme L.
11. Soient n et k, deux entiers naturels non nuls. Si la division euclidienne de k par n s'écrit

$$k = qn + r,$$

alors il existe un polynôme Q tel que

$$X^k = (X^n - 1)Q + X^r.$$

11.1 En s'inspirant de la somme géométrique (ou par télescopage), on constate que le polynôme

$$Q = X^{(q-1)n} + X^{(q-2)n} + \cdots + X^{2n} + X^n + 1$$

convient et on conclut par unicité de la division euclidienne.
11.2 Comme $X^n - 1$ est scindé à racines simples, on peut aussi calculer le reste de la division euclidienne par interpolation de Lagrange [**10.4**].
12. Polynômes positifs ***
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) \geqslant 0.$$

Alors il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

12.1 Si le polynôme P est constant, égal à $a \in \mathbb{R}_+$, alors le couple $(A, B) = (\sqrt{a}, 0)$ convient.
12.2 Si le polynôme P n'est pas constant, alors il peut se décomposer en produit de polynômes irréductibles :

- ou bien des polynômes irréductibles de degré 2 (et de discriminant strictement négatif) ;
- ou bien des polynômes irréductibles de degré 1 avec multiplicité paire.

12.3 Pour tout réel a,

$$(X-a)^{2m} = \big[(X-a)^m\big]^2 + 0^2.$$

12.4 Si $X^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible, alors il existe deux réels a et b tels que

$$X^2 + cX + d = (X-a)^2 + b^2.$$

12.5 Quels que soient les polynômes A_1, B_1, A_2, B_2 à coefficients réels,

$$\begin{aligned}(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) \\ &= (A_1 + iB_1)(A_2 + iB_2)(A_1 - iB_1)(A_2 - iB_2) \\ &= (A_3 + iB_3)(A_3 - iB_3) = A_3^2 + B_3^2\end{aligned}$$

avec $A_3 = A_1A_2 - B_1B_2$ et $B_3 = B_1A_2 + A_1B_2$.
13. Polynômes positifs (variante) ***
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad P(x) \geqslant 0.$$

Alors il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que

$$P = A^2 + XB^2.$$

13.1 Quels que soient les polynômes A_1, B_1, A_2 et B_2,

$$\begin{aligned}(A_1^2 + XB_1^2)(A_2^2 + XB_2^2) \\ &= (A_1A_2 + XB_1B_2)^2 + X(A_2B_1 - A_1B_2)^2.\end{aligned}$$

(On s'inspire de la réduction à la forme canonique des polynômes de degré 2.)
13.2 La décomposition de P en facteurs irréductibles peut faire apparaître

- des polynômes irréductibles de degré 2 ;
- des polynômes irréductibles de degré 1 avec une racine négative ;
- des polynômes irréductibles de degré 1 avec une racine positive et une multiplicité paire.

13.3 Si $a \in \mathbb{R}_+$, alors $X + a = (\sqrt{a})^2 + X.1$.
13.4 Si $a \in \mathbb{R}_-$, alors $(X-a)^2 = (X-a)^2 + X.0$.
13.5 Si $X^2 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible, alors $q > 0$ et $p^2 - 4q < 0$, donc

$$\begin{aligned}X^2 + pX + q &= (X - \sqrt{q})^2 + X(p + 2\sqrt{q}) \\ &= (X - \sqrt{q})^2 + X\big(\sqrt{p + 2\sqrt{q}}\big)^2.\end{aligned}$$

14. Caractérisation des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ ***
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme unitaire de degré d.
14.1 Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors il existe des réels $a_1, \ldots, a_r$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_r$ tels que

$$P(a) = \prod_{k=1}^{r} (z - a_k)^{m_k} = \prod_{k=1}^{r} \big((x - a_k) + iy\big)^{m_k}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier,

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \big|P(z)\big| \geqslant \prod_{k=1}^{r} |y|^{m_k} = |y|^d.$$

14.2 Si P admet une racine $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $|P(z_0)| = 0$ tandis que $|\mathfrak{Im}(z_0)|^d > 0$.
14.3 En conclusion, un polynôme unitaire P de degré d à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \big|P(z)\big| \geqslant \big|\,\mathfrak{Im}(z)\big|^d.$$

14.4 Conséquence topologique
On peut en déduire que l'ensemble des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}[X]$.
15. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme non constant dont les racines complexes ont une partie imaginaire positive :

$$\forall\, z_0 \in \mathbb{C}, \quad P(z_0) = 0 \implies \mathfrak{Im}(z_0) \geqslant 0.$$

Alors le polynôme $Q = P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
15.1 Il suffit de vérifier que toute racine de Q est réelle.
15.2 Le polynôme P est scindé :

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k).$$

Si $\mathfrak{Im}(z) > 0$, alors

$$\big|P(z)\big| = |\alpha| \prod_{k=1}^{d} |z - \lambda_k| < |\overline{\alpha}| \prod_{k=1}^{d} |z - \overline{\lambda_k}| = \big|\overline{P}(z)\big|.$$

Par conséquent, $P(z) \neq -\overline{P}(z)$.
De même : si $\mathfrak{Im}(z) < 0$, alors $Q(z) \neq 0$.

III

Racines

16. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.
1. Conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
2. D'après la factorisation en produit d'irréductibles.

17. Nous allons démontrer que $a = \cos \pi/9$ n'est pas un nombre rationnel en raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, tels que $a = p/q$.
17.1 L'entier p est supérieur à 1.
17.2 D'après [**3.37**], $T_3(a) = \cos \pi/3 = 1/2$, donc il existe un polynôme

$$P = X^3 - 6X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

tel que $P(a) = 0$.
17.3 Comme $8p^3 - 6pq^2 = q^3$, l'entier p divise q^2 et $p = \pm 1$.
De même, $8p^3 = (6p + q)q^2$, donc l'entier q^2 divise 8 et $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.
17.4 Les différents cas qui subsistent sont tous impossibles, donc $a \notin \mathbb{Q}$.

III.1 Formule de Taylor

18. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $(X-1)^2$ divise le polynôme

$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

19. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe un réel a tel que

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 1, \quad P^{(k)}(a) \geqslant 0.$$

Alors

$$\forall\, x \geqslant a, \quad P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{d} \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a) \geqslant P(a),$$

donc P n'a pas de racine dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme de degré 7 tel que

$$(X-1)^4 \mid P+1 \quad \text{et} \quad (X+1)^4 \mid P-1.$$

Le polynôme dérivé P' est divisible par $(X-1)^3(X+1)^3$ et

$$P(1) = -1, \qquad P(-1) = 1.$$

Donc (après calculs...)

$$P = \frac{-5}{16}X^7 + \frac{21}{16}X^5 - \frac{35}{16}X^3 + \frac{35}{16}X.$$

III.2 Théorème de Rolle

21. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme de degré $(n+1)$, admettant $(n+1)$ racines réelles deux à deux distinctes :

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n.$$

21.1 Le polynôme dérivé P' admet n racines réelles distinctes

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_{n-1}.$$

21.2 Comme

$$a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme PP' admet $(2n+1)$ racines réelles distinctes et le polynôme $P^2 + 1$ admet $(2n+2)$ racines complexes distinctes.
22. Coefficients d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ ***
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme scindé à racines simples de degré $n \geqslant 2$.

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

22.1 Le coefficient a_k est strictement positif (resp. strictement négatif, resp. nul) si, et seulement si, $P^{(k)}(0) > 0$ (resp. < 0, resp. $= 0$).
22.2 Pour tout $0 \leqslant k < n$, le polynôme $P^{(k)}$ est un polynôme à coefficients réels, scindé à racines simples, de degré $(n-k)$.
22.3 Si $P(x_0) = 0$, alors $P'(x_0) \neq 0$.
22.4 Le polynôme P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs : s'il existe un entier $0 \leqslant k < n$ tel que $a_k = 0$, alors $a_{k+1} \neq 0$.
22.5 Si $P(x_0) > 0$ et $P'(x_0) = 0$, alors $P''(x_0) < 0$.
En effet, si $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$ sont trois racines consécutives de P, alors il existe deux racines consécutives de P' :

$$\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2.$$

En supposant que $P'(\beta_1) = 0$ et $P(\beta_1) > 0$, alors $P(\beta_0) < 0$.
Il existe une racine γ_0 de P'' telle que $\beta_0 < \gamma_0 < \beta_1$ et sur l'intervalle $]\beta_0, \beta_1[$, la dérivée seconde P'' change de signe seulement en γ_0.
On déduit des variations de P que $P''(\beta_1) < 0$.
22.6 Les coefficients qui entourent un coefficient nul sont de signes opposés : s'il existe un entier $1 \leqslant k < n$ tel que $a_k = 0$, alors $a_{k-1}a_{k+1} < 0$.

III.3 Fonctions symétriques

23. Soient a, b et c, trois nombres complexes.
23.1

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

23.2

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

23.3 L'expression

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$$

est égale à

$$\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc}{abc}.$$

24. On suppose que le polynôme

$$X^3-7X+\lambda$$

possède trois racines complexes x_1, x_2 et x_3 avec $x_2=2x_1$.
Alors $x_3=-3x_1$, $x_1^2=1$ et $\lambda=6x_1^3$. On en déduit que

$$(x_1,x_2,x_3)=\pm(1,2,-3).$$

25. On admet que le polynôme

$$X^3-8X^2+23X-28$$

possède trois racines complexes x_1, x_2 et x_3 telles que

$$x_1+x_2=x_3.$$

Alors $x_3=4$, $x_1x_2+4(x_1+x_2)=23$ et $4x_1x_2=28$, donc

$$x_1,x_2=2\pm i\sqrt{3}.$$

26. On cherche trois nombres complexes x, y et z tels que

$$|x|=|y|=|z| \quad \text{et} \quad x+y+z=xyz=1.$$

Il faut que x, y et z appartiennent à $\mathbb{U}$, donc

$$xy+yz+zx=\overline{z}+\overline{x}+\overline{y}=1.$$

On cherche donc les racines de

$$X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1)=(X-1)(X-i)(X+i).$$

27. Soient a, b et c, trois nombres complexes de modules deux à deux distincts. On suppose que

$$a+b+c\in\mathbb{R},\quad a^2+b^2+c^2\in\mathbb{R}\quad \text{et}\quad a^3+b^3+c^3\in\mathbb{R}.$$

27.1 Il existe un polynôme P_0 de degré 3, à coefficients *réels*, dont les racines sont a, b et c.
27.2 Si P_0 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors il admet deux racines complexes conjuguées (et donc de même module). Donc a, b et c sont réels.