12 Dérivation

1. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \exp(\sqrt{x}).$$

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un, et un seul, polynôme P_n tel que

$$\forall\, x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sqrt{x})}{x^{n-1/2}} \cdot f(x).$$

1.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} X P_n' + \Big(\frac{X}{2} - n + \frac{1}{2}\Big) P_n$$

donc le degré de P_n est égal à $n-1$ et son coefficient dominant est égal à 2^{-n}.

1.3 La fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

I

Bijections

2. On considère une bijection de classe $\mathscr{C}^1$

$$f \,:\,]a,b[\to]c,d[.$$

2.1 Démontrer que f est strictement monotone.

2.2 Exprimer c et d en fonction de a, b et f. (Discuter sur la monotonie de f.)

2.3 On suppose que $f(x_0) = x_0$. Que vaut $f^{-1}(x_0)$? Et $(f^{-1})'(x_0)$?
Condition nécessaire et suffisante pour que la tangente à Γ_f au point $M_0 = (x_0, x_0)$ et la tangente à $\Gamma_{f^{-1}}$ au point M_0 soient orthogonales ?

2.4 On suppose qu'il existe deux réels x_0 et x_1 tels que

$$a < x_0 < x_1 < b \quad \text{et} \quad f(x_0) > f(x_1).$$

Alors

$$\forall\, x \in]x_1, b[, \quad f(x_1) > f(x_2).$$

3. Soit f, une fonction dérivable et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\ell = 0$. (Par l'absurde !)

II

Théorème de Rolle

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction périodique et dérivable. La dérivée de f est périodique et s'annule au moins deux fois par période.

5. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que $f(0) < 0$ et que la fonction f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

5.1 La fonction f s'annule au moins une fois mais sa dérivée peut ne pas s'annuler.

5.2 Si la fonction f s'annule deux fois, alors sa dérivée f' s'annule au moins deux fois.

6. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la borne inférieure de l'ensemble

$$Z = \big\{ x \in]0,1] \,:\, f(x) = 0 \big\}$$

est égale à 0.

6.1 Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 et telle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.2 On peut en extraire une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui est strictement décroissante.

6.3

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

III

Théorème des accroissements finis

7. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour tout $x > 0$, il existe un réel $0 < c < x$ tel que

$$f(x) - f(-x) = x\big[f'(c) + f'(-c)\big].$$

8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$. On suppose que

$$f(0) = 0 \quad \text{et que} \quad f(1) f'(1) < 0.$$

Alors il existe un réel $0 < c < 1$ tel que $f'(c) = 0$.

9. Théorème de Darboux
Soit f, une fonction dérivable sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que

$$f'(a) < 0 < f'(b).$$

9.1 On suppose que f est en fait de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

9.2 On suppose que f est seulement dérivable et on considère les deux fonctions auxiliaires φ et ψ suivantes.

$$\varphi(a) = f'(a) \qquad \forall\, x \in]a,b], \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$
$$\psi(b) = f'(b) \qquad \forall\, x \in [a,b[, \quad \psi(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Les deux fonctions φ et ψ sont continues sur le segment $[a,b]$ et $\varphi(b) = \psi(a)$. Comme l'une de ces deux fonctions s'annule, la dérivée f' s'annule sur $]a,b[$.

9.3 Lorsqu'une fonction f est dérivable sur un intervalle, sa dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires même si elle n'est pas continue.

10.1 Les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

10.2 La fonction $t \mapsto e^{it}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour obtenir la meilleure constante de Lipschitz possible, il faut remarquer que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^2, \quad \big|e^{ia} - e^{ib}\big| = \Big| \int_a^b i e^{it} \, \mathrm{d}t \Big|.$$

11. Systèmes dynamiques
On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ admettant un point fixe :
$$f(\ell) = \ell$$
et une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
11.1 Point attractif
On suppose ici que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et que} \quad \left|f'(\ell)\right| < 1.$$
Il existe un réel $0 \leqslant \theta < 1$ tel que
$$u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\ell^n).$$
11.2 Point répulsif
On suppose ici que
$$\left|f'(\ell)\right| > 1 \quad \text{et que} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq \ell.$$
Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, s'il existe un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$u_{n_0} \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha],$$
alors il existe un indice $n_1 > n_0$ tel que
$$u_{n_1} \notin [\ell - \alpha, \ell + \alpha].$$
11.3 Estimation asymptotique
On suppose ici que $\ell = 0$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ et que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
1.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = 1$$
2. S'il existe deux réels α et $C \neq 0$ tels que
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = C,$$
alors $\alpha < 0$ et $C > 0$.
3. D'après le Théorème de Cesaro,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{\alpha}}{n} = C.$$

IV

Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$

12. La fonction
$$f = \left[x \mapsto \cos\sqrt{x}\right]$$
est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
13. Contre-exemple exotique ***
On considère une fonction F, continue sur $[0, 1]$ et telle que
$$\forall\, x \in]0, 1[, \quad F(x) = \exp\left(\frac{-1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right).$$
13.1 Que vaut $F(0)$?
13.2 Calculer $F'(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. En déduire que F est strictement croissante sur $[0, 1]$ bien qu'il existe une infinité de réels $x \in [0, 1]$ tels que $F'(x) = 0$.
13.3 La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.
13.4 La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F^{(n)}(0) = 0$$
bien que $F(x) > 0$ pour tout $0 < x \leqslant 1$.