Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *La matrice A est nilpotente si, et seulement si, toutes les solutions du système différentiel*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \tag{S_1}$$

sont polynomiales.

2. *Soit $m \geqslant 2$, un entier. La matrice A est nilpotente si, et seulement si, toutes les solutions du système différentiel*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X^{(m)}(t) = AX(t) \tag{S_m}$$

sont polynomiales.

1. Supposons que toutes les solutions $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ du système différentiel (S_1) soient polynomiales. Ces fonctions sont en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on déduit de (S_1) que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X^{(k)}(t) = A^k X(t) \tag{$\star$}$$

(par récurrence sur k).

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe une, et une seule, solution X_i du système différentiel (S_1) qui vérifie en outre la condition initiale $X_i(0) = E_i$ (où E_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Il existe donc un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad A^d E_i = X_i^{(d)}(0) = 0.$$

✍ *Chacune des n solutions X_i compte n composantes polynomiales : on dispose ainsi de n^2 fonctions polynomiales et comme il n'y en a qu'un nombre fini, il existe un entier d qui est strictement supérieur au degré de toutes ces fonctions polynomiales.*

De la sorte, $A^d = 0_n$ et la matrice A est bien nilpotente.

❧ **Réciproque.**

On suppose que la matrice A est nilpotente d'indice d :

$$\forall\, k \geqslant d, \quad A^k = 0_n.$$

Par conséquent,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k A^k}{k!}$$

et toute solution du système (S_1) est polynomiale :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA) \cdot X(0) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!} A^k \cdot X(0) \cdot t^k.$$

✍ ***Variante***

On peut aussi déduire de la relation ($\star$) que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X^{(d)}(t) = A^d X(t) = 0$$

et donc que les n composantes de X sont des fonctions polynomiales dont le degré est strictement inférieur à d.

2. On peut se ramener au cas précédent en écrivant le système différentiel (S_m) **sous forme canonique** : la fonction

$$X \in \mathscr{C}^m\big(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

est solution du système (S_m) si, et seulement si, la fonction

$$Y = \left[t \mapsto \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \\ \vdots \\ X^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \right] \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_{mn,1}(\mathbb{R})\big)$$

est solution du système différentiel

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = BY(t) \tag{S'_m}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_n \\ A & & & 0_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

On peut vérifier que

$$B^m = \operatorname{Diag}(A, A, \dots, A)$$

et donc que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad B^{km} = \operatorname{Diag}(A^k, A^k, \dots, A^k).$$

✍ *Cette vérification est assez fastidieuse, il faut raisonner colonne par colonne en suivant les indices à la trace. Dans le cas $m = 3$, on a*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

et on peut s'inspirer de ce cas particulier pour traiter le cas général.

La matrice B est donc nilpotente si, et seulement si, la matrice A est nilpotente et on conclut à l'aide de la première partie.