Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent

[1.] On considère un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie, égale à n, et on suppose que cet endomorphisme est nilpotent d'indice $d \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^d = E.$$

Dans un premier temps, nous étudierons la famille des entiers naturels $\dim \operatorname{Ker} u^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant d$, ce qui nous permettra de déterminer les classes de similitude des endomorphismes nilpotents et nous dénombrerons ensuite les sous-espaces de E qui sont stables par u.

Dimensions des noyaux itérés

[2.] Comme on l'a rappelé, pour tout $0 \leqslant k < d$, le sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$ est un sous-espace <u>strict</u> de $\operatorname{Ker} u^{k+1}$. D'après le Théorème de la base incomplète, il existe donc un sous-espace vectoriel G_{k+1} tel que

$$\operatorname{Ker} u^k \oplus G_{k+1} = \operatorname{Ker} u^{k+1}.$$

En particulier,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \qquad \dim G_k \geqslant 1$$

et pour $k = 0$,

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^0 \oplus G_1 = \{0_E\} \oplus G_1,$$

donc $G_1 = \operatorname{Ker} u$.

[3.] On fixe $1 \leqslant k < d$.

Pour tout $x \in G_{k+1}$, on a $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$, donc $u^k(u(x)) = 0_E$ et $u(x) \in \operatorname{Ker} u^k$. On peut donc définir une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \psi_k : & G_{k+1} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} u^k \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

et constater que cette application linéaire est injective : si $x \in G_{k+1} \cap \operatorname{Ker} u$, alors $x \in G_{k+1} \cap \operatorname{Ker} u^k$ (puisque $k \geqslant 1$) et donc $x = 0_E$ (par définition de G_{k+1}). Ainsi, $\operatorname{rg} \psi_k = \dim G_{k+1}$.

Considérons un vecteur $y \in \operatorname{Im} \psi_k \cap \operatorname{Ker} u^{k-1}$. Il existe donc $x \in G_{k+1}$ tel que $y = \psi_k(x) = u(x)$ et $0_E = u^{k-1}(y) = u^k(x)$, donc $x \in G_{k+1} \cap \operatorname{Ker} u^k = \{0_E\}$. On a donc $y = u(x) = 0_E$, donc $\operatorname{Im} \psi_k$ et $\operatorname{Ker} u^{k-1}$ sont deux sous-espaces en somme directe de $\operatorname{Ker} u^k$:

$$\operatorname{Ker} u^{k-1} \oplus \operatorname{Im} \psi_k \subset \operatorname{Ker} u^k.$$

En particulier,

$$\dim G_{k+1} = \operatorname{rg} \psi_k \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^k - \dim \operatorname{Ker} u^{k-1} = \dim G_k.$$

[4.] Ainsi,

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_d = E$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \dim G_k \geqslant 1, \\ \forall\, 1 \leqslant k < d, \quad \dim G_{k+1} \leqslant \dim G_k \\ \sum_{k=1}^{d} \dim G_k = \dim E = n. \end{array} \right.$$

La famille $(\dim G_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est alors une **partition** de l'entier n. (Voir l'article *Partition d'un entier* sur Wikipédia.)

Exemples

[5.] Si $\dim E = 3$, il n'y a que trois possibilités.

— $3 = 1 + 1 + 1$: endomorphisme nilpotent d'indice 3

— $3 = 2 + 1$: endomorphisme nilpotent d'indice 2

— $3 = 3 =$: endomorphisme nul

Toute matrice nilpotente est alors semblable à l'une des trois matrices suivantes.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[6.] Si $\dim E = 4$, il y a quatre possibilités en plus de la matrice nulle.

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$1+1+1+1$	$2+1+1$	$2+2$	$3+1$
Indice 4	Indice 3	Indice 2	Indice 2

[7.] Si $\dim E = 5$, il y a six possibilités en plus de la matrice nulle.

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$1+1+1+1+1$	$2+1+1+1$	$2+2+1$
Indice 5	Indice 4	Indice 3

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$3+1+1$	$3+2$	$4+1$
Indice 3	Indice 2	Indice 2

Classes de similitudes

[8.] Comme on s'en doute, il existe de nombreuses bases de E adaptées au **drapeau**

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^d = E$$

et un choix arbitraire des sous-espaces G_k définis ci-dessus ne permet pas d'obtenir une base de E satisfaisante.

Nous allons donc construire des sous-espaces G_k en limitant au strict minimum les choix arbitraires.

[9.] On sait que $\operatorname{Ker} u^{d-1} \subsetneq \operatorname{Ker} u^d = E$. D'après le Théorème de la base incomplète, nous pouvons choisir une famille libre $\mathscr{B}_d$ telle que

$$\operatorname{Ker} u^{d-1} \oplus \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_d) = E.$$

On pose alors $G_d = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_d)$.

Comme on l'a vu plus haut, l'application $\psi_{d-1} : G_d \to \operatorname{Ker} u^{d-1}$ est injective et l'intersection $\operatorname{Im} \psi_{d-1} \cap \operatorname{Ker} u^{d-2}$ est réduite à $\{0_E\}$, donc l'image de la famille $\mathscr{B}_d$ par ψ_{d-1} est une famille libre de $\operatorname{Ker} u^{d-1}$, qu'on peut compléter pour obtenir une famille libre $\mathscr{B}_{d-1}$ telle que

$$\operatorname{Ker} u^{d-2} \oplus \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{d-1}) = \operatorname{Ker} u^{d-1}.$$

On pose alors $G_{d-1} = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{d-1})$.

Et on continue de proche en proche, jusqu'à obtenir une famille libre $\mathscr{B}_1$ qui soit une base de $G_1 = \operatorname{Ker} u$.

La famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant les familles libres $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_d$ est alors une base de E.

[10.] Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors $1 \leqslant \dim G_k \leqslant \dim G_1 = \dim \operatorname{Ker} u = 1$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$ et comme

$$d = \sum_{k=1}^{d} \dim G_k = n$$

alors l'indice de nilpotence de u est égal à n et

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

Comme u^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et comme $\operatorname{Ker} u^{n-1}$ est un hyperplan de $\operatorname{Ker} u^n$, on a

$$\operatorname{Ker} u^{n-1} \oplus \mathbb{R} \cdot x_0 = \operatorname{Ker} u^n = E.$$

La construction précédente **[9.]** montre que le vecteur $u(x_0)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} u^{n-1}$ et que

$$\operatorname{Ker} u^{n-2} \oplus \mathbb{R} \cdot u(x_0) \subset \operatorname{Ker} u^{n-1}.$$

Comme $\operatorname{Ker} u^{n-2}$ est un hyperplan de $\operatorname{Ker} u^{n-1}$, on en déduit que

$$\operatorname{Ker} u^{n-2} \oplus \mathbb{R} \cdot u(x_0) = \operatorname{Ker} u^{n-1}$$

et donc que

$$\operatorname{Ker} u^{n-2} \oplus \operatorname{Vect}\big(u(x_0), x_0\big) = E.$$

On continue de proche en proche :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{Ker} u^{n-k} \oplus \operatorname{Vect}\big(u^{k-1}(x_0), \dots, u(x_0), x_0\big) = E$$

et pour finir, comme $\operatorname{Ker} u^0 = \{0_E\}$, on obtient une base de E :

$$\mathscr{B} = \big(u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), \dots, u(x_0), x_0\big)$$

adaptée au drapeau

$$\{0_E\} = \operatorname{Ker} u^0 \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^n = E$$

et la matrice de u relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

[11.] Les matrices présentées aux alinéas **[5.]**, **[6.]** et **[7.]** représentent les endomorphismes nilpotents dans des bases obtenues au moyen de la construction présentée en **[9.]**.

$\dim E = 4$				
Partition	$\mathscr{B}_1$	$\mathscr{B}_2$	$\mathscr{B}_3$	$\mathscr{B}_4$
1+1+1+1	$u^3(x_0)$	$u^2(x_0)$	$u(x_0)$	x_0
2+1+1	$x_1,\ u^2(x_0)$	$u(x_0)$	x_0	
2+2	$u(x_1),\ u(x_0)$	$x_1,\ x_0$		
3+1	$x_2,\ x_1,\ u(x_0)$	x_0		

$\dim E = 5$					
Partition	$\mathscr{B}_1$	$\mathscr{B}_2$	$\mathscr{B}_3$	$\mathscr{B}_4$	$\mathscr{B}_5$
1+1+1+1+1	$u^4(x_0)$	$u^3(x_0)$	$u^2(x_0)$	$u(x_0)$	x_0
2+1+1+1	$x_1,\ u^3(x_0)$	$u^2(x_0)$	$u(x_0)$	x_0	
2+2+1	$u(x_1),\ u^2(x_0)$	$x_1,\ u(x_0)$	x_0		
3+1+1	$x_2,\ x_1,\ u^2(x_0)$	$u(x_0)$	x_0		
3+2	$x_2,\ u(x_1),\ u(x_0)$	$x_1,\ x_0$			
4+1	$x_3,\ x_2,\ x_1,\ u(x_0)$	x_0			

[12.] Plus généralement, on déduit de cette construction que : deux endomorphismes u et v nilpotents d'indice d tels que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \qquad \dim \operatorname{Ker} u^k = \dim \operatorname{Ker} v^k$$

sont semblables. (Ils sont représentés par une même matrice dans des bases bien choisies.)

Le nombre de partitions d'un entier $n \geqslant 3$ est donc égal au nombre de classes de similitudes des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$.

[13.] Quel que soit $0 \leqslant k \leqslant d$, le sous-espaces $\operatorname{Ker} u^k$ est stable par u. Existe-t-il d'autres sous-espaces vectoriels de E qui soient stables par u ?

[14.] Si $\dim \operatorname{Ker} u \geqslant 2$, alors le sous-espace $\operatorname{Ker} u$ contient une infinité de droites vectorielles et toutes ces droites vectorielles sont stables par u (elles sont dirigées par un vecteur propre).

Dans ce cas, il existe donc une infinité de sous-espaces vectoriels stables par u.

[15.] Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors **[10.]** chaque sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$ est stable et

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

Si V est un sous-espace de E de dimension k qui est stable par u, alors l'endomorphisme v_k de V induit par restriction de v est nilpotent et le polynôme caractéristique de v_k est égale à X^k. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, l'endomorphisme v_k^k est donc l'endomorphisme nul, donc

$$\forall\, x \in V, \qquad u^k(x) = 0_E.$$

Autrement dit : $V \subset \operatorname{Ker} u^k$ et donc $V = \operatorname{Ker} u^k$ (par égalité des dimensions).

Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors il existe exactement $(d+1)$ sous-espaces vectoriels stables par u, ce sont les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 1$.