5
Fonctions de plusieurs variables

1. Calculs élémentaires
Pour chacun des exemples suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ; démontrer que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer son gradient.

1.1 $f(x,y,z) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2+2z^2}$

1.2 $f(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\mathrm{Arctan}(xz)$

1.3 $f(x,y,z) = (x^2+2z^2)\sin(x+yz)$

1.4 $f(x,y,z) = \dfrac{2x+z}{\sqrt{1+y^2+2z^2}}$

2. Calculs élémentaires
Pour chacun des exemples suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ; démontrer que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$; calculer son gradient et sa hessienne.

2.1 $f(x,y) = x^2+3y^2-4xy$

2.2 $f(x,y) = 2x^2-3y^2+xy+x-y$

2.3 $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-3)$

2.4 $f(x,y) = 3x^2+4xy-7y^2+3x-2y$

2.5 $f(x,y) = (\sin x+\cos y)\exp(-xy)$

3. Démontrer que la fonction

$$f = \Big[(x,y) \mapsto (x+1)^2+2(y+3)^2\Big]$$

atteint un minimum sur

$$K = [0,+\infty[\times [0,+\infty[$$

mais qu'elle n'est pas majorée sur K.

4. RMS 133-957
Déterminer l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel est définie la fonction

$$f = \Big[(x,y) \mapsto y(x^2+\ell\mathrm{n}^2\,y)\Big]$$

et démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

4.1 La fonction f admet deux points critiques :

$$M_1 = (0,1) \qquad \text{et} \qquad M_2 = (0,e^{-2}).$$

4.2 Pour tout $(x,y) \in \Omega$,

$$f(x,y) \geqslant y\,\ell\mathrm{n}^2\,y.$$

Par conséquent, f atteint un minimum global en M_1 et n'est pas majorée sur Ω.

4.3 Le calcul de la hessienne montre que f n'atteint pas un extremum local au point M_2.

5. D'après RMS 133-744
Étudier les extrema de la fonction f définie par

$$f(x,y) = (x-4y)(x-4y-8).$$

6. RMS 133-746
Étudier la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^3+xy^2-x^2y-y^3$$

sur le triangle

$$T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant 1-x \leqslant y \leqslant 1\big\}.$$

On vérifiera que : si (x,y) est un point critique de f, alors $x^2 = y^2$.

7. RMS 133-627
On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = (x^2-y^2)\exp\big[-(x^2+y^2)\big].$$

7.1 Si f atteint un extremum en (x_0,y_0), alors f atteint un extremum de même nature en $(-x_0,y_0)$ et un extremum de nature opposée en $(y_0,\pm x_0)$.

7.2 Les points critiques de f sont $(\pm 1,0)$ et $(0,\pm 1)$.

7.3 Le calcul de la hessienne montre que f atteint un maximum local en $(\pm 1,0)$ et un minimum local en $(0,\pm 1)$.

8. On note J, la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

8.1 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. La hessienne de f est égale à $2(I_n+J)$ et définie positive.
3. La fonction f n'est pas majorée. Son minimum (global) est égal à ${}^{-n}/_{4(n+1)}$.

8.2 On considère la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,\dots,x_n) = (x_1+\dots+x_n)\Big(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\Big).$$

4. Déterminer les points critiques de f.
5. La hessienne de f est proportionnelle à la matrice

$$(nI_n - J).$$

Elle est donc positive mais pas définie positive.

6. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$f(x_1,\dots,x_n) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\Big)^2.$$

Le minimum de f est égal à n^2 et il est atteint au point

$$M_0 = (1,\dots,1)$$

seulement.

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice

$$B = A^\top . A$$

est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes positives.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2.1 S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$, alors $A = 0$.

2.2 S'il existe un entier *impair* $k \geqslant 1$ tel que $A^k = I$, alors $A = I$.

2.3 La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est la symétrie orthogonale qui fixe la droite dirigée par le vecteur

$$u = (1, 1, -2).$$

On a donc $A^2 = I_3$ et la matrice A n'est pas diagonale.

3. Soient u, un vecteur de l'espace E et λ, un réel.

3.1 L'endomorphisme f_λ défini par

$$\forall\, x \in \mathbf{E}, \quad f_\lambda(x) = \lambda \langle\, x \mid u \,\rangle \cdot u + x$$

est auto-adjoint. Préciser son spectre et ses sous-espaces propres.

3.2 Pour $\lambda = -1$, l'application f_λ est la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$.

4. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' + XP' - P.$$

4.1 On suppose que P est un vecteur propre de degré $0 \leqslant d \leqslant n$. Peut-on savoir à quelle valeur propre il est associé ?

4.2 Écrire la matrice de f relative à la base canonique de E. En déduire que f est diagonalisable ($n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes).

4.3 En considérant le produit scalaire défini par

$$\langle\, P \mid Q \,\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

démontrer que f est un endomorphisme auto-adjoint.

5. En considérant le produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle\, P \mid Q \,\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

démontrer que la matrice symétrique

$$H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est définie positive.

I

Projections orthogonales

6. Les matrices suivantes représentent des projections orthogonales.

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Les matrices suivantes représentent des projections orthogonales.

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les sous-espaces propres de la matrice

$$A = 7I - 6P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

sont $\mathbb{R} \cdot (-1, 1, 2)$ (valeur propre 1) et $[x - y + 2z = 0]$ (valeur propre 7).

8.1 Les trois vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1), \quad u_2 = (-1, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

8.2 Les matrices suivantes représentent des projections orthogonales.

$$P_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3 Réduire la matrice

$$A = 6P_1 + 3P_2 + 2P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.4 Réduire la matrice

$$B = 6(P_1 + P_2) + 2P_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.5 Réduire la matrice

$$C = 0P_1 + 3P_2 - 4P_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9.1 Les trois vecteurs

$$u_1 = (2,0,1), \quad u_2 = (-1,-5,2), \quad u_3 = (1,-1,-2)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

9.2 Les matrices suivantes représentent des projections orthogonales.

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

9.3 Réduire la matrice

$$A = 3P_1 + 3P_2 - 3P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9.4 L'endomorphisme $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté par la matrice

$$B = 0P_1 + P_2 + 16P_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible : son noyau est dirigé par $(1,1,0)$. Le plan $F = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ est stable par f, donner une base de ce plan et écrire la matrice de l'endomorphisme de F induit par restriction de f dans cette base.

II

Formes quadratiques

10. Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont 0 et 5.

11. Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4I + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont 4 et 6.

12. La forme quadratique

$$\varphi(x,y) = (2x+y-1)^2 + (x-1)^2 + (2y-1)^2$$

atteint son minimum (global) au point

$$M_0 = (3/7, 3/7)$$

et ce minimum est égal à $3/7$.

13. La forme quadratique

$$\varphi(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy$$

n'est ni positive, ni négative. (Considérer la restriction aux axes. Valeurs propres : $\pm 5/2$)

14. La forme quadratique

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz \\ &= (x+y-z)^2 + 2yz\end{aligned}$$

n'est ni positive, ni négative. (Valeurs propres : $1, 1 \pm \sqrt{2}$)

15. Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont -1 et $-2 \pm \sqrt{3}$, donc la matrice est définie négative.

16. Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont -3 (droite propre dirigée par $(1,-1,0)$) et $r = \pm\sqrt{3}$ (droite propre dirigée par $(r,r,r+3)$).

III

Oral ESCP

17. 2016 - Alg 13
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1,\dots,e_n)$, sa base canonique.
Étant donnée une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $R(A)$, l'ensemble des valeurs prises par la forme quadratique

$$q(X) = X^\top.A.X$$

lorsque X parcourt l'ensemble des vecteurs <u>unitaires</u> de $\mathbb{R}^n$.

17.1 Démontrer que $R(A)$ contient toutes les valeurs propres de A.

17.2 Démontrer que $R(A)$ contient tous les coefficients diagonaux de A.

17.3 On suppose connus deux valeurs $a < b$ de $R(A)$. Il existe donc deux vecteurs unitaires X_0 et X_1 tels que

$$q(X_0) = a \quad \text{et} \quad q(X_1) = b.$$

1. Les vecteurs X_0 et X_1 ne sont pas proportionnels.
2. Quel que soit $t \in [0,1]$, le vecteur

$$X_t = (1-t)X_0 + tX_1$$

n'est pas nul.

3. La fonction

$$\left[t \mapsto \frac{X_t^\top.A.X_t}{X_t^\top.X_t}\right]$$

est continue, donc $R(A)$ est un intervalle.

18. 2016 - Alg 20
Soient E, un espace euclidien ;

$$\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n),$$

une base orthonormée de E et f, un endomorphisme de E.

18.1 Pour tout $x \in E$, il existe des réels $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k.$$

Exprimer les x_k en fonction de x et des données. Démontrer que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

18.2 D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Schwarz,

$$\|f(x)\|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2\Big)\|x\|^2.$$

Il existe donc un réel $k > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

18.3 Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors il existe $k' > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| \geqslant k'\|x\|.$$

Il existe donc un réel $k_0 > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \frac{1}{k_0}\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant k_0\|x\|.$$