On pose $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1. *Résoudre à l'*EDP

$$\forall\, M = (x, y) \in \Omega, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0. \tag{H}$$

2. *Résoudre l'*EDP *(E) :*

$$\forall\, M = (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(M) = y. \tag{E}$$

✍ *On sait, après avoir traité différents exemples, qu'on peut résoudre ces* EDP *à l'aide d'un changement de variables linéaire. Comment choisir un changement de variables convenable ? Quelles différences voit-on apparaître entre deux changements de variables ?*

1. ❧ L'EDP (H) nous dit que le gradient d'une solution est constamment orthogonal au vecteur $(1, -2)$. Le gradient de f en un point M quelconque est donc proportionnel au vecteur $(2, 1)$, c'est-à-dire au gradient de la forme linéaire

$$\varphi = [(x, y) \mapsto 2x + y]\,.$$

On devine ainsi que la fonction f est constante sur les droites affines d'équation

$$[2x + y = C]$$

et qu'il est donc intéressant de poser $u = 2x + y$.

❧ Considérons le changement de variables linéaire $(u, v) = \Phi(x, y)$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice J est (clairement) inversible, ce qui prouve que Φ est bien un changement de variables et la matrice inverse

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nous donne les variables x et y en fonction de u et v :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - 2v \end{pmatrix}. \tag{$\clubsuit$}$$

❧ On pose

$$\forall\, M \in \Omega, \quad f(M) = g\big(\Phi(M)\big).$$

Comme l'application Φ réalise une bijection de Ω sur Ω, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω :

$$\forall\, N \in \Omega, \quad g(N) = f\big(\Phi^{-1}(N)\big).$$

❧ D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Plus précisément,

$$\forall\, M \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}\big(\Phi(M)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(M) \tag{$\spadesuit$}$$

et comme Φ réalise une bijection de Ω sur Ω, on en déduit que la fonction f est une solution de l'EDP (H) si, et seulement si, la fonction g est une solution de l'EDP (H′) :

$$\forall\, N = (u, v) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(N) = 0. \tag{H′}$$

❧ Le cours nous donne les solutions de (H') : une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est solution de (H') si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(u,v)\in\Omega,\quad g(u,v)=G(u).$$

Par conséquent, une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est solution de (H) si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=g\big(\Phi(x,y)\big)=G\big(u(x,y)\big)=G(2x+y).$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ D'après la règle de la chaîne (♠) et le changement de variables (♣), la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $g=f\circ\Phi^{-1}$ est une solution de (E') :

$$\forall\,N=(u,v)\in\Omega,\quad \frac{\partial g}{\partial v}(N)=u-2v. \tag{E'}$$

D'après le cours, une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est une solution de l'EDP (E') si, et seulement si, il existe une fonction G_1 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(u,v)\in\Omega,\quad g(u,v)=uv-v^2+G_1(u)$$

où on reconnaît la superposition d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (H).

On en déduit qu'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est une solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_1\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=(x+y).x+G_1(2x+y).$$

❧ **Variante : Autre changement de variables**

Considérons maintenant le changement de variables linéaire $(s,t)=\Psi(x,y)$ défini par

$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad J=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$J^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Psi^{-1}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(s-t)/2\\t\end{pmatrix}.$$

❧ On pose maintenant $f(x,y)=h\big(\Psi(x,y)\big)$: comme plus haut, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et, d'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{-1}{2}\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-2\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

On en déduit que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction h est solution de

$$\forall\,P=(s,t)\in\Omega,\quad -2\cdot\frac{\partial h}{\partial t}(P)=y(s,t)=t$$

c'est-à-dire solution de (E'') :

$$\forall\,P=(s,t)\in\Omega,\quad \frac{\partial h}{\partial t}(P)=\frac{-t}{2}. \tag{E''}$$

Comme plus haut, la fonction $h\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de l'EDP (E'') si, et seulement si, il existe une fonction $G_2\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(s,t)\in\Omega,\quad h(s,t)=\frac{-t^2}{4}+G_2(s).$$

On en déduit que $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_2\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=\frac{-y^2}{4}+G_2(2x+y).$$

✍ *Les solutions de (E) trouvées avec ces deux changements de variables ne diffèrent qu'en apparence !*
En effet, pour tout $(x,y)\in\Omega$,

$$(x+y).x=\frac{-y^2}{4}+\frac{(2x+y)^2}{4}$$

donc

$$(x+y).x+G_1(2x+y)=\frac{-y^2}{4}+\left[\frac{(2x+y)^2}{4}+G_1(2x+y)\right]$$

et par conséquent les fonctions G_1 *et* G_2 *sont liées par la relation suivante :*

$$\forall\, z\in\mathbb{R},\quad G_2(z)=G_1(z)+\frac{z^2}{4}.$$