**1.** *Calculer les dérivées partielles de*

$$F(x,y) = f\big(z(x,y)\big)$$

*avec* $f(z) = \sin z$ *et* $z(x,y) = 3x - 4y$.

**2.** *Calculer les dérivées partielles de*

$$F(x,y) = f\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

*avec* $f(u,v) = u - v$, $u(x,y) = x^2y$ *et* $v(x,y) = xy^2$.

**1.** Si on fixe $y$, on se retrouve avec la composée de

$$x \mapsto g(x,y)$$

par

$$z \mapsto F(z).$$

Il s'agit donc de la composée de deux fonctions d'**une** variable réelle et il suffit d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées : la règle de la chaîne est ici hors sujet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{df}{dz}\big[g(x,y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\\ &= \cos[3x-4y] \times 3 = 3\cos(3x-4y).\end{aligned}$$

► Même chose en fixant $x$...

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{df}{dz}\big[g(x,y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\\ &= \cos[3x-4y] \times (-4) = -4\cos(3x-4y).\end{aligned}$$

► On retrouve (heureusement !) ces résultats en explicitant la fonction $F$ et en dérivant directement (= sans faire apparaître $f$ et $g$) :

$$F(x,y) = \sin(3x-4y).$$

✍ *Quand on maîtrise vraiment le fonctionnement de la règle de la chaîne, on peut sous-entendre le point où les dérivées partielles sont évaluées. Dans un délai raisonnable, vous écrirez donc*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \textit{au lieu de} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{df}{dz}\big[g(x,y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

*Pour le moment, privilégiez encore la sécurité à la vitesse d'exécution !*

✍ *Savez-vous démontrer* rapidement *que la fonction* $F$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

**2.** On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(g(x,y),h(x,y)\big) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(g(x,y),h(x,y)\big) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\ &= 1 \times (2xy) + (-1) \times y^2 = (2x-y)y\end{aligned}$$

puisque $u(x,y) = yx^2$ et $v(x,y) = y^2x$.

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(g(x,y),h(x,y)\big) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(g(x,y),h(x,y)\big) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ &= 1 \times (x^2) + (-1) \times (2xy) = (x-2y)x.\end{aligned}$$

✍ *Les dérivées partielles de* $f$ *étant constantes, il serait très agréable de pouvoir se contenter d'écrire*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

*pour s'épargner de la peine. C'est possible à condition de bien maîtriser son outil !*

✍ *Ici encore, on peut retrouver ces résultats sans passer par la règle de la chaîne, en partant directement de l'expression simplifiée de* $F(x, y)$.

$$F(x, y) = x^2y - xy^2 = xy(x - y).$$

✍ *Savez-vous démontrer* rapidement *que la fonction* $F$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*