La fonction f définie par $f(0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et par

$$f(x, y) = x^2 \cos\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

sur $[x \neq 0]$ est différentiable au point $(0, 0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On note U, l'ouvert $[x \neq 0]$.

✍ *La partie U est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ (= union de deux intervalles ouverts) par l'application continue $[(x, y) \mapsto x]$, donc c'est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.*

L'application polynomiale $\big[(x, y) \mapsto x^2\big]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'application

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & \cos y/x \end{array}$$

est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U en tant que composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

✍ *L'énoncé définit f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier : cette fonction est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?*

❧ Pour $M = (x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x \cos\frac{y}{x} + y \sin\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -x \sin\frac{y}{x}.$$

Pour $M = (0, y) \in [x = 0]$,

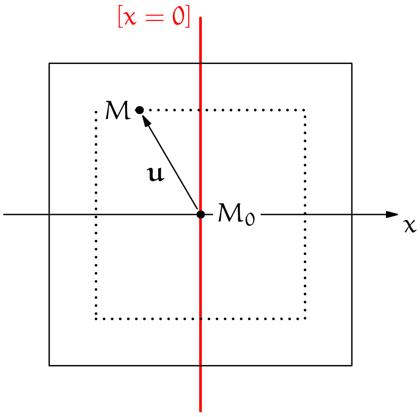
$$\frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = h \cos\frac{y}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y + h) - f(0, y)}{h} = 0$$

donc les dérivées partielles de f sont bien définies sur $[x = 0]$ et

$$\forall\, M \in [x = 0], \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0.$$

❧ Nous allons étudier la continuité de $\partial f/\partial y$ en un point $M_0 = (0, y_0)$. Nous allons mesurer les distances avec la norme produit : si $M = (x, y)$, alors

$$\mathbf{M_0M} = (x, y - y_0) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{M_0M}\| = \max\big\{|x|, |y - y_0|\big\}.$$



D'après les calculs précédents,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \left| -x \sin\frac{y}{x}\right| \leqslant |x| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\|$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) \xrightarrow[M \to M_0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

Autrement dit : la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est continue en chaque point M_0 de l'axe $[x = 0]$ et comme f est $\mathscr{C}^1$ sur U, on en déduit que $\partial f/\partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

❧ Nous allons maintenant étudier la continuité de $\partial f/\partial x$ en un point $M_0 = (0, y_0) \in [x = 0]$ distinct de l'origine. En conservant les notations précédentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}.$$

Comme précédemment,

$$\left|2x\cos\frac{y}{x}\right| \leqslant 2\|\mathbf{M_0M}\|$$

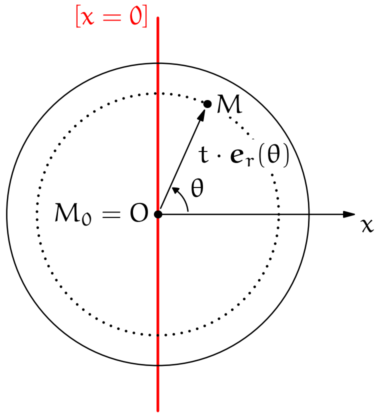
donc le premier terme tend bien vers 0 lorsque M tend vers M_0.

En revanche, lorsque M tend vers M_0, le quotient y/x est équivalent à y_0/x et tend donc vers $\pm\infty$ (selon le signe de y_0). Comme sin n'a pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$ et que y tend vers $y_0 \neq 0$, on en déduit que la variation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

n'a pas de limite lorsque M tend vers M_0 et donc que la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est pas continue en M_0.

❧ Enfin, nous allons étudier la continuité de $\partial f/\partial x$ à l'origine et pour cela, nous allons utiliser la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ (passer en polaires).



Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(O + t\cdot\mathbf{e}_r) - \frac{\partial f}{\partial x}(O)\right| \leqslant 2|x| + |y| \leqslant 3|t| \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ainsi, la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ est continue à l'origine.

❧ En conclusion, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ; la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier mais la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est continue en aucun point de l'axe $[x = 0]$ autre que l'origine.

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

✍ *Au voisinage de l'origine, avec $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ et $h_x \neq 0$,*

$$\left|f(O + \mathbf{h})\right| = h_x^2\left|\cos\frac{h_y}{h_x}\right| \leqslant h_x^2 \leqslant \|\mathbf{h}\|^2$$

(qu'on choisisse la norme euclidienne canonique ou la norme produit). Il est clair que l'encadrement

$$\left|f(O + \mathbf{h})\right| \leqslant \|\mathbf{h}\|^2$$

est encore vrai si $h_x = 0$: il est donc vrai au voisinage de l'origine et on en déduit que

$$f(O + \mathbf{h}) = \mathcal{O}\big(\|\mathbf{h}\|^2\big)$$

et donc que

$$f(O + \mathbf{h}) = f(O) + \omega(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

pour $\mathbf{h}$ voisin de 0. La fonction f est donc différentiable à l'origine et l'application linéaire tangente à f en O est l'application nulle ω (ce dernier point étant prévu, puisque les deux dérivées partielles de f en O sont nulles).