> *L'application* f *définie par* $f(0,0)=0$ *et par*
> $$\forall\,(x,y)\neq(0,0),\quad f(x,y)=(x^2-y^2)\,\ell n(x^2+y^2)$$
> *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et*
> $$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

Les applications

$$[(x,y)\mapsto x]\,,\qquad \left[(x,y)\mapsto x^2+y^2\right]\quad\text{et}\quad \left[(x,y)\mapsto x^2-y^2\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions *polynomiales*.

En tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^2\setminus\{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 & \longmapsto & \ell n(x^2+y^2)\end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$.

✍ *Toute partie finie est fermée, donc* U *est un ouvert (en tant que complémentaire d'un fermé).*

En tant que produit d'applications de classe $\mathscr{C}^\infty$, l'application f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

✍ *L'énoncé définit la fonction* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier : est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *ou seulement sur* U *?*

❧ Pour $M=(x,y)\neq O$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M)=2x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\ell n(x^2+y^2)\right],\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M)=2y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\ell n(x^2+y^2)\right].$$

Pour $M=O$, on a

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=h\,\ell n\,h^2\xrightarrow[h\to0]{}0\qquad\text{et}\qquad\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=-h\,\ell n\,h^2\xrightarrow[h\to0]{}0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O)=\frac{\partial f}{\partial y}(O)=0.$$

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

❧ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

✍ *Autrement dit : on passe en coordonnées polaires. De la sorte, le point* M *tend vers l'origine* O *si, et seulement si, le réel* $r=\|\mathbf{OM}\|$ *tend vers* 0.

D'après les expressions des dérivées partielles de f calculées plus haut,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M)-\frac{\partial f}{\partial x}(O)\right|=2r|\cos\theta|\,|2\,\ell n\,r+\cos2\theta|\leqslant 2r+4r|\ell n\,r|$$

et de même

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M)-\frac{\partial f}{\partial y}(O)\right|\leqslant 2r+4r|\ell n\,r|.$$

On a trouvé un majorant *indépendant de* θ et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc on a démontré que les deux dérivées partielles de f étaient continues en O.

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier (théorème fondamental).

✍ *Si on sait bien appliquer la règle de la chaîne, on peut se contenter de ne calculer qu'une seule des deux dérivées partielles de* f.

Pour exploiter la forme de symétrie de f*, on considère l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(x,y)=\big(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)\big)=(y,x).$$

On sait alors que

$$\partial_2\varphi_1(x,y) = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \qquad \partial_2\varphi_2(x,y) = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

et que

$$\forall\,(x,y)\in U, \quad f(x,y) = -(f\circ\varphi)(x,y).$$

Comme f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U *(démontré plus haut) et que* φ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* U *dans* U *(en tant qu'application linéaire injective définie sur un espace de dimension finie), on en déduit que la composée* $f\circ\varphi$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U *et que, pour tout* $M=(x,y)\in U$*,*

$$\begin{aligned}\partial_2 f(M) &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_1(M) - \partial_2 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_2(M)\\ &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec les notations habituelles (Leibniz)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$