Soit $f = f(x,y)$, *une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* g *définie par*

$$g(u,v) = f(u+v, uv)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Si* g *est harmonique sur* $\mathbb{R}^2$, *alors*

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (x^2 - 2y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert $\Omega = [x^2 - 4y > 0]$.

1.

✍ *On utilise ici un changement de variables* <u>*non*</u> *linéaire. Comme on doit s'y attendre en pareil cas, il n'est pas simple de justifier la bijectivité de* φ *et encore moins simple d'exprimer la réciproque* φ^{-1}.

Posons $\varphi(u,v) = (u+v,\ uv)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Il est clair que $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, car ses deux composantes :

$$x = [(u,v) \mapsto u+v] \quad \text{et} \quad y = [(u,v) \mapsto uv]$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiales).

❧ Comme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ par hypothèse, on en déduit que la composée

$$g : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi \in \mathscr{C}^\infty} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f \in \mathscr{C}^2} \mathbb{R}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

❧ Avant d'aller plus loin, étudions φ pour voir s'il s'agit bien d'un changement de variables.

▶ Tout d'abord, φ n'est pas injectif ! En effet, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
On pourrait se restreindre au demi-plan $[u \geqslant v]$, mais ce demi-plan n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, ce demi-plan contient l'origine mais n'est pas un voisinage de l'origine (faites une figure !).
Nous allons donc nous restreindre au demi-plan $U = [u > v]$, qui est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (faites une figure !).

▶ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(u,v) \in U$ tel que $\varphi(u,v) = (x,y)$ si, et seulement si, u et v sont les racines du polynôme $X^2 - xX + y$ (cf. relations entre coefficients et racines d'un polynôme).
Dans U, il faut que $u > v$ et donc que les racines du polynômes soient réelles et distinctes. Il faut donc que son discriminant : $x^2 - 4y$ soit strictement positif.
Réciproquement, si $x^2 - 4y > 0$, alors le polynôme $X^2 - xX + y$ admet deux racines réelles u et v et si on impose $u > v$, alors le couple (u,v) est unique.

▶ On vient ainsi de démontrer que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert

$$\Omega = [x^2 - 4y > 0].$$

✍ *Faites une figure pour démontrer que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *!*

▷ *Par ailleurs,*

$$u(x,y) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \textit{et} \quad v(x,y) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

mais, fort heureusement, nous n'utiliserons pas ces formules...

2.

✍ *Il nous reste à relier l'EDP* $\Delta g = 0$ *à l'EDP en* f *et pour cela il faut exprimer les dérivées partielles secondes d'une des fonctions à l'aide des dérivées partielles de l'autre. Mais dans quel sens procéder ?*

❧ D'après l'expression de φ,

$$\forall\, (u,v) \in U, \quad \operatorname{Jac} \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Avec les formules de Cramer, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(x,y) &= \left[\operatorname{Jac}\varphi\big(u(x,y),v(x,y)\big)\right]^{-1}\\ &= \frac{1}{u-v}\begin{pmatrix} u & -1\\ -v & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2}$$

Bien entendu, dans cette expression, il faut comprendre que u et v sont des **fonctions** de x et y (puisque le membre de gauche est lui-même une fonction de x et y) et non pas des variables comme dans la jacobienne de φ.

Plus précisément,

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad (u,v)=\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)=(\varphi^{-1})(x,y).$$

✍ *Même si l'expression de $\varphi^{-1}(x,y)$ est compliquée (voire impossible à formuler), on peut facilement calculer la jacobienne de φ^{-1} : il suffit d'inverser la jacobienne de φ.*

❧ Appliquons la règle de la chaîne en tenant compte de la jacobienne (1) de φ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

Avant de continuer, il faut bien comprendre le sens exact de ces deux relations. La première signifie :

$$\forall\,(u,v)\in U,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)$$

et la signification de la seconde est analogue.

❧ On en déduit les dérivées partielles secondes de g. Comme f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$, on peut simplifier les dérivées partielles secondes croisées avec le Théorème de Schwarz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}+v\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}\\ &= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}+v\cdot\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+v^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{(par (2))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}+u\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}\\ &= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}+u\cdot\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+u^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{(par (2) aussi)}\end{aligned}$$

❧ On peut alors calculer le laplacien de g.

$$\Delta g = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(u+v)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Une fois encore, il faut faire apparaître le changement de variables φ pour expliciter le sens de cette égalité (c'est une égalité entre fonctions de u et v).

$$\begin{aligned}\forall\,(u,v)\in U,\quad \Delta g(u,v) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\varphi(u,v)\big)&+2(u+v)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)\\ &+(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\varphi(u,v)\big)\end{aligned}$$

❧ Tenons maintenant compte de l'hypothèse d'harmonicité pour g.

Comme φ réalise une **bijection** de U sur Ω, on en déduit que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2\big[u(x,y)+v(x,y)\big]\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$
$$+\big[u^2(x,y)+v^2(x,y)\big]\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Par définition de φ^{-1}, on a

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \begin{cases} u(x,y)+v(x,y) &= x\\ u^2(x,y)+v^2(x,y) &= [u(x,y)+v(x,y)]^2-2u(x,y)v(x,y)\\ &= x^2-2y. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction f vérifie l'équation

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(x^2-2y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

sur l'ouvert Ω.