On suppose que $g = g(u)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Si* $u = u(x_1, \dots, x_n)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors la fonction* f *définie par*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g\big(u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ *et son laplacien est donné par*

$$\Delta f = g''(u)\|\nabla u\|^2 + g'(u)\Delta u.$$

2. *Sur* $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, on pose*

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

2. a.

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}$$

2. b. *La fonction* f *est harmonique sur* Ω *si, et seulement si,*

$$\forall\, u > 0, \quad g''(u) + \frac{n-1}{u} \cdot g'(u) = 0$$

2. c. *Si* $n \geqslant 3$ *et si* f *est une fonction harmonique radiale sur* Ω*, alors il existe deux constantes* a *et* b *telles que*

$$\forall\, \mathbf{x} \neq 0, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} + b.$$

✍ *On voit ici des calculs assez simples, parce que la situation physique est elle-même très simple : on sait, grâce à une propriété de symétrie, que les quantités étudiées ne dépendent du vecteur position* $(x_1, \dots, x_n)$ *que par l'intermédiaire d'une fonction* $u(u_1, \dots, u_n)$ *— par exemple que les quantités sont radiales et sont donc représentées mathématiquement par* $g(r)$.

C'est bien d'une composition de fonctions qu'il s'agit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (g \circ u)(x_1, \dots, x_n).$$

Mais ce n'est pas un changement de variables (on n'a pas le même nombre de paramètres pour calculer f *et* g*), c'est beaucoup plus simple.*

1. Comme g et u sont de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction composée $f = g \circ u \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{u=u(x_1,\dots,x_n)} \mathbb{R} \xrightarrow{g=g(u)} \mathbb{R}$$

❧ On suppose que l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée. Dans cette base, les coordonnées du gradient de u sont égales à

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

et comme cette base est orthonormée

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2.$$

❧ D'après la règle de la chaîne,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

✍ *Comme* g *est une fonction d'une seule variable, on peut remplacer les* ∂ *par des* d.

Pour calculer la dérivée partielle seconde, on applique la formule précédente à elle-même. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dg}{du}\right)\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= \left[\frac{d}{du}\left(\frac{dg}{du}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(Fle du 1er ordre)} \\
&= \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}
\end{aligned}$$

et en sommant sur $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta f = \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \|\nabla u\|^2 + \frac{dg}{du} \cdot \Delta u.$$

✍ *Cette égalité doit être comprise comme une égalité entre fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n$ (car f et u sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$). On peut alourdir la formule pour la rendre plus explicite :*

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \Delta u(\mathbf{x})$$

en notant $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pour que la formule reste lisible !

2. a. On rappelle l'astuce usuelle du calcul radial. Comme $u^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, alors

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_k} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 2x_k \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{x_k}{u}.$$

On en déduit en particulier que

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1.$$

✍ *On calcule ici dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*

❧ Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on peut dériver cette expression comme un *produit* de deux fonctions de x_k :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{\partial [1/u]}{\partial x_k} && \text{(dérivée du produit)} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} && \text{(dérivée de l'inverse)} \\
&= \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}.
\end{aligned}$$

✍ *On rappelle que u est une fonction de $x_1, \ldots, x_n$.*

❧ En sommant sur $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$\Delta u = \frac{n}{u} - \frac{1}{u^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{n}{u} - \frac{u^2}{u^3} = \frac{n-1}{u}.$$

2. b. D'après la relation générale établie à la première question,

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})}.$$

❧ La fonction $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, si

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0,$$

alors en particulier

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0$$

et $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$.

❧ Réciproquement, la fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est clairement surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $r > 0$, il existe (au moins) un $\mathbf{x} \in \Omega$ tel que $r = u(\mathbf{x})$ et si $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, alors

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad \begin{cases} r = u(\mathbf{x}) \\ g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

✍ *Une fois de plus, j'ai détaillé exagérément les calculs pour distinguer les deux moments de l'équivalence et en particulier mettre en valeur la propriété de* ***surjectivité*** *de la fonction u, qui est essentielle pour conclure ici.*

$\boxed{\textbf{2. c.}}$ Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique radiale sur Ω. On **admet** qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \qquad f(\mathbf{x}) = g\big(u(\mathbf{x})\big).$$

✍ *Ceux qui refusent d'admettre une telle propriété n'auront qu'à la prendre pour* définition *des fonctions harmoniques radiales.*

❧ D'après la question précédente, cette fonction g est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

On remarque qu'il s'agit ici d'une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre en $g'(r)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que

$$\forall\, r > 0, \quad g'(r) = \frac{K}{r^{n-1}}$$

et donc qu'il existe deux constantes $a = \frac{K}{2-n}$ et b telles que

$$\forall\, r > 0, \quad g(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$$

et donc telles que

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} + b.$$

✍ *En particulier, si une fonction harmonique et radiale est bornée sur Ω, alors $a = 0$ et cette fonction est nécessairement* constante.