Composition de Mathématiques

Le 22 janvier 2020 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 2x^3 \qquad (E)$$

Partie A. Équation homogène

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E).

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0 \qquad (H)$$

On suppose donc qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit un réel $r > 0$ et on pose

$$\forall\, x \in\,]-r, r[\,, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de réels non nuls tels que

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

pour tout $x \in\,]-r, r[$.

2. Démontrer que la fonction f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si, et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que : si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

4. Réciproquement, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g = \left[x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\right]$$

est une solution de (H) développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Partie B. Résolution sur $]0,1[$

On note $I =]0, 1[$.

Étant donnée une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

5. Démontrer que la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Exprimer z' et z'' en fonction de y, y' et y''.

6. Démontrer que la fonction y est une solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est une solution de l'équation différentielle

$$xz''(x) + z'(x) = 2x \qquad (E_1)$$

sur I.

7. Soit $z : I \to \mathbb{R}$, une solution de (E_1). Démontrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.

❖ II – Problème ❖

Dans tout le problème, on considère une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit égal à 1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ dont la somme sera notée S.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

Partie A. Propriétés générales

1. Soit $x \in\,]-1, 1[$.

1. a. Donner un équivalent de $1 - x^n$ pour $n \to +\infty$.

1. b. Démontrer que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.

2. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série $\sum f_n(x)$ converge pour au moins une valeur de x n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

4. a. Démontrer que la somme S est une fonction continue sur $]-1,1[$.

4. b. Démontrer que la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$. Préciser la valeur de $S'(0)$.

5. Dans cette question, on cherche à démontrer que la somme S est développable en série entière sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

On fixe donc $x\in\,]-1,1[$, on pose $J=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère

$$H_n=\big\{(k,p)\in J\ :\ kp=n\big\}\subset J.$$

5. a. Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in J}$, une famille sommable de nombres réels. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{(k,p)\in H_n}u_{k,p}\Big).$$

5. b. Démontrer que la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in J}$ est sommable.

5. c. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note

$$b_n=\sum_{d|n}a_d.$$

(On rappelle que la notation $d\mid n$ signifie que l'entier d est un diviseur de n.)

Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a^n\,\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n.$$

5. d. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum b_nx^n$?

5. e. Écrire une fonction `a2b(a)` dont l'argument est une liste qui contient les premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et qui retourne les premiers termes de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

Estimer la complexité de la fonction `a2b`.

Partie B. Exemples

6. Dans cette question, on suppose que $a_n=1$ pour tout $n\geqslant 1$ et on note d_n, le nombre de diviseurs de n. Exprimer $S(x)$ comme la somme d'une série entière.

7. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n\geqslant 1$, le coefficient a_n est égal au nombre $\varphi(n)$ d'entiers inférieurs à n et premiers à n.

7. a. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est égal à 1.

7. b. On **admet** que

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\quad n=\sum_{d|n}\varphi(d).$$

Vérifier ce résultat pour $n=12$.

7. c. Pour $|x|<1$, exprimer la somme

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\,\frac{x^n}{1-x^n}$$

sous la forme d'un quotient de deux polynômes en x.

8. En utilisant le Théorème de la double limite et le développement en série entière de $\ell n(1+x)$, calculer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

9. Dans cette question, on suppose que

$$\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=(-1)^n.$$

9. a. En utilisant le Théorème de la double limite, calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}$$

et donner un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0.

9. b. Retrouver le résultat du **4.b.**.

9. c. Démontrer que

$$S(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{-\ell n\,2}{1-x}.$$

☞ *On pourra remarquer que*

$$\forall\,x\in\,]0,1[\,,\quad\frac{1-x}{1-x^n}=\frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}}.$$

❖ III – Problème ❖

Un pion se déplace aléatoirement sur trois points distincts A, B et C.

Initialement, on suppose que ce pion se trouve sur le point A.

Entre l'instant n et l'instant $(n+1)$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place. Dans le cas contraire, il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Partie A. Modélisation

Pour représenter mathématiquement la marche aléatoire décrite ci-dessus, on considère trois suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad A_n\in\mathcal{A},\quad B_n\in\mathcal{A},\quad C_n\in\mathcal{A}$$

On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le triplet (A_n,B_n,C_n) est un système complet d'événements :

$$A_n\sqcup B_n\sqcup C_n=\Omega.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note alors

$$V_n=\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix}$$

où $p_n=\mathbf{P}(A_n)$, $q_n=\mathbf{P}(B_n)$, $r_n=\mathbf{P}(C_n)$.

1. Quelles valeurs attribuer à p_0, q_0 et r_0 ?

2. On pose

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comment justifier la relation suivante ?

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

On distinguera clairement les calculs qui découlent de la théorie mathématique des choix effectués pour modéliser la marche aléatoire.

3. On **admet** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculer p_n, q_n et r_n.

3. b. En déduire les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B. Nombre moyen de passages en A

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a. Démontrer que $\mathbb{1}_{A_n}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

4. b. Quelle est sa loi ? Quelle est son espérance ?

5. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n})$ et interpréter le résultat.

6. **Pour 5/2 uniquement.** En calculant

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}),$$

démontrer que les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

Partie C. Premier passage en B

On définit une application

$$T : \Omega \to \mathbb{N}$$

de la manière suivante.

- Si le pion ne passe jamais par le point B, alors $T = 0$.
- Si le pion passe au moins une fois par le point B, alors T est l'instant auquel le pion passe pour la première fois au point B.

7. a. Démontrer que

$$[T = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c.$$

7. b. Démontrer que

$$[T = n] = \left(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\right) \cap B_n.$$

7. c. En déduire que T est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

8. Pour calculer la loi de la variable aléatoire T, on fait l'**hypothèse de Markov** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\Big(B_{n+1} \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) = \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c).$$

8. a. Exprimer B_n^c en fonction de A_n et C_n. Calculer $\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c)$.

8. b. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

8. c. Que vaut $\mathbf{P}(T = 0)$?

9. Démontrer que la variable aléatoire T est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

Solution I ❀ Solutions analytiques d'une équation différentielle

Partie A. Équation homogène

1. En tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence r est strictement positif, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme.

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} \\ -x(1+x)f'(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} x^2&(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) \\ &= a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)x^{n+1} \\ &= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

2. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle homogène (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0.$$

Les deux membres de cette identité sont des sommes de séries entières, dont les rayons de convergence sont tous les deux strictement positifs. D'après le Théorème d'identification terme à terme, l'identité précédente équivaut donc à

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad \underbrace{(n-1)^2}_{>0}(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Finalement, la fonction f est solution de (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = a_{n-1}$$

c'est-à-dire (par changement d'indice) :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = a_n.$$

3. Par conséquent, si f est une solution développable en série entière de (H), alors il existe un réel a_0 tel que

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_0 x}{1-x}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 (pour $a_0 \neq 0$) ou à $+\infty$ (pour $a_0 = 0$).

4. Tout d'abord, comme on vient de le voir, la fonction g est bien développable en série entière sur $]-1, 1[$, quelle que soit la valeur de λ.

Par ailleurs, quel que soit $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}$$

et on peut en déduire directement que g est bien une solution de (H) sur $]-1, 1[$.

Partie B. Résolution sur $]0, 1[$

5. Par hypothèse, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. D'autre part, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{x} - 1\right]$$

est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, donc elle est aussi de classe $\mathscr{C}^2$. Par produit, la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

On vérifie sans peine que, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{-y(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y'(x) \\ z''(x) &= \frac{2y(x)}{x^3} - \frac{2y'(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y''(x). \end{aligned}$$

6. On déduit des expressions précédentes que, pour tout $x > 0$,

$$xz''(x) + z'(x) = \frac{1}{x^2}\left[(1-x)x^2 y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right]$$

et donc que : y est une solution de (E) sur I si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad xz''(x) + z'(x) = \frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

7. La fonction $u = z'$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut appliquer les méthodes usuelles.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $[x \mapsto K/x]$.

Une solution particulière de l'équation complète est égale à $[x \mapsto x]$ (on peut la trouver au talent, en faisant varier la constante ou simplement en analysant l'énoncé).

Le principe de superposition donne alors la solution générale de (E_1) : la fonction z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. On déduit de la question précédente que z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall\, x > 0, \quad z(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \ln x + \mu.$$

On déduit alors de **[6.]** que y est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x}{1-x}\,z(x) \\ &= \mu\cdot\frac{x}{1-x} + \lambda\cdot\frac{x\ln x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}. \end{aligned}$$

On reconnaît successivement les solutions développables en série entière de l'équation homogène (étudiée dans la première partie) ; des solutions *non* développables en série entière de l'équation homogène (ces fonctions présentent une tangente verticale à l'origine, incompatible avec la possibilité d'un développement en série entière) ; et enfin une solution particulière de l'équation complète.

Solution II ❁ Séries de Lambert

Partie A. Propriétés générales

1. a. Comme $|x| < 1$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $1 - x^n = 1 + o(1)$ et donc $1 - x^n \sim 1$ lorsque $n \to +\infty$.

1. b. D'après la question précédente, pour $x \in\,]-1,1[$,

$$f_n(x) = a_n\,\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1 et que $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ est *absolument* convergente. D'après le Théorème de comparaison pour les séries *absolument* convergentes, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in\,]-1,1[$.

REMARQUE.— Pour une série réelle ou complexe, la convergence absolue entraîne la convergence. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ (au moins).

2. Remarquons que, pour $x > 1$, la suite de terme général x^n tend vers $+\infty$, donc

$$a_n \underbrace{\frac{x^n}{1-x^n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -a_n.$$

Il suffit donc que la série $\sum a_n$ converge absolument pour que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument pour tout réel $x > 1$ (Théorème de comparaison pour les séries *absolument* convergentes).

La série de Riemann $\sum a_n = \sum 1/n^2$ est absolument convergente.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1. Pour $x > 1$, la série $\sum x^n/n^2$ diverge grossièrement, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est bien égal à 1.

En posant $a_n = 1/n^2$, on obtient donc bien une série qui possède la propriété voulue.

3. Soit $0 < b < 1$. Pour tout $x \in [-b,b]$, on a $|x^n| \leqslant b^n$ et, par inégalité triangulaire,

$$|1 - x^n| \geqslant 1 - b^n > 0.$$

Donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [-b,b], \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant |a_n|\cdot\frac{b^n}{1-b^n} = \big|f_n(b)\big|.$$

Par **1.b.**, la série réelle $\sum f_n(b)$ converge absolument et l'encadrement précédent prouve donc que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement su $[-b,b]$.

Comme la convergence normale entraîne la convergence uniforme, on en déduit enfin que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

REMARQUE.— La série de fonctions $\sum f_n$ *n'est pas* une série entière, il serait déplacé d'appliquer ici un théorème de convergence qu'on n'a établi que pour les séries entières.

4. a. Il s'agit de démontrer que la somme S est continue en chaque point $x_0 \in\,]-1,1[$.

❧ Soit $x_0 \in\,]-1,1[$. Il existe donc un réel b tel que

$$|x_0| < b < 1.$$

D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-b,b]$. Or les fonctions f_n sont toutes continues sur $]-1,1[$ et, en particulier, continues sur $[-b,b]$. Donc la somme S de la série de fonctions est continue sur $[-b,b]$ et, en particulier, elle est continue au point x_0.

Ainsi, la somme S est continue sur $]-1,1[$.

REMARQUE.— Il est difficile de deviner la démarche attendue par le sujet : peut-on faire plus court que la réponse que je donne (genre : *si une série de fonctions continues converge uniformément sur chaque segment contenu dans l'intervalle* I, *alors la somme est continue sur* I) ? doit-on faire plus long (genre : établir en détail, avec les ε, que la convergence uniforme conserve la continuité) ? Ce n'est pas clair pour moi et le rapport du jury n'est pas très parlant. Dans le doute, je conseille de donner une réponse brève et précise.

4. b. Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in\,]-1,1[, \quad f_n'(x) = \frac{n a_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

Pour chaque $0 < b < 1$, on en déduit que

$$\big|f_n'(x)\big| \leqslant \frac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}.$$

Comme $0 < b < 1$,

$$\frac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n a_n b^{n-1}.$$

Par hypothèse, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1. Par conséquent, le rayon de convergence de la série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ est aussi égal à 1 et la série numérique $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument, quel que soit $0 < b < 1$.

Par comparaison de séries *absolument* convergentes, la série $\sum |f_n'(b)|$ est convergente et cela démontre que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[-b,b] \subset\,]-1,1[$.

Résumons : la série $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$; cette série converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$; la série dérivée $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$. Donc la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

❧ En particulier,

$$S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n \cdot 0^{n-1}}{(1-0^n)^2} = a_1.$$

5. a. On peut regrouper les éléments de J en fonction de leur abscisse ou en fonction du produit de leurs coordonnées. Autrement dit, en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \{(n,p),\ p \in \mathbb{N}^*\}$$

on dispose de deux partitions de J :

$$J = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} L_n.$$

Comme la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in J}$ est supposée sommable, on peut appliquer le Théorème de Fubini avec ces deux partitions. Ce théorème nous dit d'une part que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les deux sous-familles

$$(u_{n,p})_{(n,p)\in H_n} \qquad \text{et} \qquad (u_{n,p})_{(n,p)\in L_n}$$

sont sommables ; d'autre part que les deux séries de termes généraux

$$s_n = \sum_{(n,p)\in H_n} u_{n,p} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \sum_{(n,p)\in L_n} u_{n,p}$$

sont absolument convergentes et enfin que

$$\sum_{(n,p)\in J} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[\sum_{(n,p)\in H_n} u_{n,p}\Bigg] = \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg[\sum_{(n,p)\in L_n} u_{n,p}\Bigg],$$

donc en particulier :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\Bigg) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{(k,p)\in H_n} u_{k,p}\Bigg).$$

5. b. Nous allons prouver que la famille est sommable au moyen du premier Théorème de Fubini et de la partition $J = \sqcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_n$.

❧ Soit $|x| < 1$. Alors $|x^p| < 1$ et comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est égal à 1, on en déduit que la série numérique $\sum a_n (x^p)^n$ est absolument convergente. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille de réels positifs

$$(|a_n x^{np}|)_{(n,p)\in L_n}$$

est sommable, de somme

$$s_n = \sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = \frac{|a|\,|x|^n}{1-|x|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n|.$$

❧ Pour les raisons qu'on vient de dire, la série de terme général positif $\sum s_n$ est absolument convergente. D'après le premier Théorème de Fubini, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in J}$ est donc sommable.

5. c. Par définition de H_n,

$$\begin{aligned}(k,p) \in H_n &\iff kp = n\\ &\iff k \mid n\end{aligned}$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \sum_{d\mid n} a_d = \sum_{(k,p)\in H_n} a_k.$$

Et comme la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in J}$ est sommable d'après **5.b.**, on peut lui appliquer le résultat de **5.a.** :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{(k,p)\in H_n} a_k x^{kp}\Bigg)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\sum_{(k,p)\in H_n} a_k\Bigg) x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.\end{aligned}$$

5. d. On a établi à la question précédente que la fonction S était développable en série entière et que son développement convergeait au moins pour $x \in\,]-1,1[$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est au moins égal à 1.

5. e. Le plus simple, de mon point de vue, consiste à aligner les indices mathématiques et les indices informatiques, en insérant un coefficient fictif en tête de l'argument, c'est-à-dire à remplacer

$$(a_1, \ldots, a_N) \quad \text{par} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_N).$$

On peut alors manier les indices en étant sûr de ne pas se tromper.

```
def a2b(a):
  a = [0]+a
  NN = len(a)                  # NN = (N+1)
  b = []
  for n in range(1,NN):        # Pour 1 ⩽ n < N+1
    b_n = 0
    for d in range(1,n+1):     # Pour 1 ⩽ d ⩽ n,
      if (n%d==0):             # si d divise n...
        b_n += a[d]
    b.append(b_n)
  return b                   # renvoie (b_1,...,b_N)
```

Partie B. Exemples

6. Avec $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1 et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad b_n = \sum_{d|n} 1 = d_n.$$

D'après **5.c.**,

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

7. a. Par définition, $1 \leqslant \varphi(n) \leqslant n$ (car n est divisible au moins par 1 et car chaque diviseur entier de n est inférieur à n). Or le rayon de convergence des deux séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^n$ est égal à 1, donc (par encadrement) le rayon de convergence de $\sum \varphi(n)x^n$ est aussi égal à 1.

On peut préférer un raisonnement plus terre à terre...

Pour $0 < x < 1$, on a $0 \leqslant \varphi(n)x^n \leqslant nx^n$ et, par croissances comparées, la suite (nx^n) tend vers 0, donc la série $\sum \varphi(n)x^n$ n'est pas grossièrement divergente, donc le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à 1.

Pour $x > 1$, on a $0 < x^n \leqslant \varphi(n)x^n$ et la série $\sum x^n$ diverge grossièrement, donc la série $\sum \varphi(n)x^n$ diverge grossièrement elle aussi. Le rayon de convergence de cette série entière est donc au plus égal à 1.

On en déduit (par encadrement) que le rayon de convergence de la série entière $\sum \varphi(n)x^n$ est égal à 1.

7. b. Les diviseurs de $n = 12$ sont les entiers $d = 1, 2, 3, 4, 6$ et 12.

d	Entiers premiers à d	$\varphi(d)$
1	1	1
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 3	2
6	1, 5	2
12	1, 5, 7, 11	4
	Total	12

REMARQUE.— D'un futur ingénieur, on attend non seulement une réponse juste, mais aussi *clairement présentée*.

7. c. D'après **5.c.**,

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

avec, d'après la formule admise au **7.b.**,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

On en déduit que, pour tout $x \in\,]-1, 1[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

8. D'après le développement en série entière de $\ell n(1+x)$,

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad \ell n(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^n}{n}}_{u_n(x)}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'après le Théorème de la double limite (dit aussi *Théorème d'interversion des limites* ou *Théorème de passage à la limite terme à terme*), il suffit donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur un voisinage de 1 pour que

$$\ell n\, 2 = \lim_{x \to 1} \ell n(1+x) = \lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Prenons l'intervalle $]0, 1[$ pour voisinage (à gauche) de 1. Sur cet intervalle, il est clair que la série $\sum u_n(x)$ est alternée et que la suite de terme général x^n/n tend vers 0 en décroissant lorsque n tend vers $+\infty$. On peut donc invoquer le Critère spécial des séries alternées :

$$\forall\, N \geqslant 1,\ \forall\, x \in\,]0, 1[, \quad \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \left| u_N(x) \right| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de x et tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite des restes converge uniformément sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle et donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0, 1[$.

Pour les raisons qu'on a exposées plus haut,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ell n\, 2.$$

9. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n x^n$ est égal à 1.

9. a. Pour $0 < x < 1$,

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n x^{n-1}}{1-x^n}}_{u_n(x)}.$$

Il est clair que

$$u_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{vmatrix} -1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2. \end{vmatrix}$$

D'autre part, pour un réel $0 < b < 1$ (par exemple $b = \pi/6$),

$$\forall\, x \in [-b, b], \quad \left| u_n(x) \right| \leqslant \frac{b^{n-1}}{1-b^n}.$$

Le majorant est indépendant de x et, comme $0 < b < 1$, il est équivalent à b^{n-1}, ce qui prouve que la série des majorants est convergente et donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[-b, b]$ (qui est un voisinage de 0).

D'après le Théorème de la double limite, le quotient $S(x)/x$ tend donc vers une limite finie au voisinage de 0 et

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} u_n(x) = -1.$$

On en déduit évidemment que $S(x) \sim x$ lorsque x tend vers 0.

9. b. Comme $S(0) = 0$, on déduit de la question précédente que

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} S'(0) = -1.$$

D'après **4.b.**, $S'(0) = a_1 = -1$: les deux résultats sont cohérents.

9. c. Pour $0 < x < 1$,

$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{x^n(1-x)}{1-x^n}}_{u_n(x)}.$$

Comme $0 < x < 1$, il est clair que $0 < 1 - x < 1$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < x^{n+1} < x^n \quad \text{et} \quad 0 < 1 - x^n < 1 - x^{n+1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \left|u_{n+1}(x)\right| < \left|u_n(x)\right|$$

et donc qu'on peut appliquer le Critère spécial des séries alternées à la série $\sum u_n(x)$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, x \in \left]0, 1\right[, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \left|u_n(x)\right| = \frac{|x|^n(1-x)}{1-x^n}.$$

D'après la formule de la somme géométrique,

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \geqslant nx^{n-1} > 0$$

donc

$$\forall\, x \in \left]0, 1\right[, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x \in \left]0, 1\right[$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\left]0, 1\right[$, qui est un voisinage (à gauche) de 1.

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = (-1)^n \cdot x^n \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

(encore la formule de la somme géométrique !). On peut alors invoquer le Théorème de la double limite : l'expression $(1-x)S(x)$ tend vers une limite finie au voisinage de 1 et

$$\lim_{x\to 1} (1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'après **8.**,

$$\lim_{x\to 1} (1-x)S(x) = -\ln 2$$

et donc finalement

$$S(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}.$$

Solution III ❁ Marche aléatoire

Partie A. Modélisation

1. Il paraît naturel d'interpréter les événements A_n, B_n et C_n de la manière suivante : l'événement A_n (resp. B_n, resp. C_n) est réalisé si, et seulement si, le pion occupe la position A (resp. la position B, resp. la position C) à l'instant n.

D'après l'énoncé, le pion occupe toujours la position A à l'instant 0. Autrement dit,

$$A_0 = \Omega, \qquad B_0 = C_0 = \varnothing.$$

Par conséquent, $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

2. Supposons que $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. D'après l'énoncé,

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 1/2$$

(sachant que le pion occupe la position A à l'instant n, il reste en A à l'instant $(n+1)$) et

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) = \mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 1/4$$

(sachant que le pion occupe la position A à l'instant n, il se déplace et occupe l'une des deux autres positions à l'instant suivant avec équiprobabilité). On peut alors déduire de la définition des probabilités conditionnelles que

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) &= 1/2\, \mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(C_{n+1}A_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(A_n). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

On notera que ces trois relations sont évidemment vraies si $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

De manière analogue, on obtient aussi les relations suivantes.

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}B_n) &= 1/2\, \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}B_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(B_n) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) &= 1/4\, \mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}C_n) &= 1/2\, \mathbf{P}(C_n) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

REMARQUE.— On aura noté que dans tous ces événements, l'opérateur $\cap$ est sous-entendu. C'est clairement pour me simplifier la tâche, mais qu'on ne vienne pas m'en faire le reproche : c'est Kolmogorov qui a commencé (précisément pour ce genre de calculs).

On sait, par construction même, que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) \\ &= 1/2\, \mathbf{P}(A_n) + 1/4\, \mathbf{P}(B_n) + 1/4\, \mathbf{P}(C_n). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la première ligne de l'égalité matricielle $V_{n+1} = MV_n$.

Des relations analogues pour $\mathbf{P}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}(C_{n+1})$, on tire de même les deuxième et troisième lignes de $V_{n+1}MV_n$.

On a ainsi rattaché la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

à la marche aléatoire du pion entre les trois positions.

REMARQUE.— Il serait plus agréable de modéliser cette marche aléatoire par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé, avec la donnée initiale

$$\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1, \quad \mathbf{P}(X_0 = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 2) = 0$$

et la relation de récurrence

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \left| \begin{array}{ll} 1/2 & \text{pour } i = j, \\ 1/4 & \text{pour } i \neq j. \end{array} \right.$$

De ce point de vue, on voit mieux que notre modélisation est incomplète. La relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

permet de déduire la loi de X_{n+1} en fonction de la loi de X_n et donc, de proche en proche, de calculer la *loi marginale de chacune des variables* X_n. Mais on ne peut pas en déduire la suite des *lois conjointes des vecteurs*

$$(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

(c'est la suite de ces lois qu'on appelle la **loi du processus aléatoire**).

Pour calculer ces loi conjointes, il faut appliquer la formule des probabilités composées et c'est à ce moment-là que l'*hypothèse de Markov* prend tout son sens : l'hypothèse de Markov est une hypothèse simplificatrice qui permet de calculer toutes les lois conjointes à partir des relations dont nous disposons déjà.

3. a. D'après la relation de récurrence, il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_n = M^n V_0$$

donc V_n est la première colonne de la matrice M^n. Par conséquent,

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n}, \quad q_n = r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. b. On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 1/3.$$

Autrement dit, la variable aléatoire X_n tend asymptotiquement vers la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$: lorsque n devient grand, le pion a environ une chance sur trois de se trouver en un quelconque des trois points A, B et C.

Partie B. Nombre moyen de passages en A

4. a. Par définition, $\mathbb{1}_{A_n}$ est une application de Ω dans $E = \{0; 1\}$. Il est clair que

$$[\mathbb{1}_{A_n} = 1] = A_n \quad \text{et que} \quad [\mathbb{1}_{A_n} = 0] = A_n^c.$$

Or $A_n \in \mathcal{A}$ par hypothèse et $A_n^c \in \mathcal{A}$ (car une tribu est stable par passage au complémentaire), donc

$$\forall\, x \in E, \quad [\mathbb{1}_{A_n} = x] \in \mathcal{A}$$

ce qui prouve que $\mathbb{1}_{A_n}$ est bien une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $E = \{0; 1\}$.

4. b. En tant que variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1\}$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est égal à

$$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} = 1) = \mathbf{P}(A_n) = p_n.$$

Donc la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_n)$ et on sait que son espérance est égale à p_n.

5. Comme $U_1 = \mathbb{1}_{A_1}, \dots, U_n = \mathbb{1}_{A_n}$ sont des variables aléatoires d'espérance finie, la somme $U_1 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

❧ Une somme de variables aléatoires de Bernoulli est égale au nombre de ces variables aléatoires qui prennent la valeur 1 (puisqu'une variable aléatoire de Bernoulli est égale à 0 ou à 1). Par conséquent, la somme $U_1 + \cdots + U_n$ est égale au nombre (aléatoire) d'événements réalisés parmi $A_1, \dots, A_n$, c'est-à-dire au nombre (aléatoire) de fois que le pion passe par la position A après son départ.

L'espérance de la somme $U_1 + \cdots + U_n$ peut alors être comprise comme le *nombre moyen de passages par la position* A (il est utile de lire les titres).

6. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$p_n + q_n + r_n = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n) = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}) = p_n + q_n = 1 - r_n$$

et donc que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\, \mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) = (1 - r_n) r_n > 0.$$

Cependant,

– ou bien $\omega \in C_n$ et alors $\omega \notin A_n$ et $\omega \notin B_n$, donc

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [0 + 0] \times 1 = 0$$

– ou bien $\omega \notin C_n$ et dans ce cas

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [\dots] \times 0 = 0$$

donc la variable aléatoire $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}$ est identiquement nulle et donc d'espérance nulle.

D'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}) &= \mathbf{E}[(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}] \\ &\qquad - \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\, \mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) \\ &= 0 - (1 - r_n) r_n < 0 \end{aligned}$$

donc les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ sont corrélées.

D'après le Théorème des coalitions, si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ étaient indépendantes, les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ seraient aussi indépendantes et donc décorrélées.

Par conséquent, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

REMARQUE.— Il ne suffit pas de remarquer que ces trois variables aléatoires sont liées par une relation affine :

$$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n} + \mathbb{1}_{C_n} = 1) = 1$$

pour conclure qu'elles ne sont pas indépendantes, mais cela met sur la voie...

Partie C. Premier passage en B

7. a. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(\omega) = 0 &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \notin B_n \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in B_n^c \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c \end{aligned}$$

et par conséquent

$$[\mathsf{T} = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c.$$

REMARQUE.— Tous les B_n appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ par définition. Une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, donc $[\mathsf{T} = 0] \in \mathcal{A}$.

7. b. Rappelons (cf. **1.**) pour commencer que $B_0 = \varnothing$ et donc que $B_0^c = \Omega$. Par définition de $\mathsf{T}(\omega)$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(\omega) = n &\iff \omega \notin B_0, \dots, \omega \notin B_{n-1}, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in B_1^c, \dots, \omega \in B_{n-1}^c, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n \end{aligned}$$

et donc

$$[\mathsf{T} = n] = \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n.$$

REMARQUE.— Une tribu étant stable par passage au complémentaire et par intersection finie, on en déduit que $[\mathsf{T} = n] \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. c. Par construction, T est une application de Ω dans $\mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [\mathsf{T} = n] \in \mathcal{A}$$

donc $\mathsf{T} : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ est bien une variable aléatoire discrète.

8. a. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$B_n \sqcup (A_n \sqcup C_n) = \Omega$$

donc

$$B_n^c = A_n \sqcup C_n$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(B_n^c) = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(C_n).$$

On en déduit que

$$B_{n+1} \cap B_n^c = (B_{n+1} \cap A_n) \sqcup (B_{n+1} \cap C_n)$$

et donc que, par additivité de la mesure $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c) &= \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) \\ &= 1/4\, \mathbf{P}(A_n) + 1/4\, \mathbf{P}(C_n) \qquad \text{(par } \mathbf{2.}\text{)} \\ &= 1/4\, \mathbf{P}(B_n^c). \end{aligned}$$

On en déduit enfin que

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) = \frac{\mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c)}{\mathbf{P}(B_n^c)} = \frac{1}{4}.$$

8. b. On reprend l'expression de $[\mathsf{T} = k]$ établie au **7.b.** et on applique la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathsf{T} = k) = &\,\mathbf{P}(B_n \mid B_{n-1}^c \cdots B_1^c) \\ &\times \mathbf{P}(B_{n-1}^c \mid B_{n-2}^c \cdots B_1^c) \\ &\times \cdots \\ &\times \mathbf{P}(B_3^c \mid B_2^c B_1^c) \times \mathbf{P}(B_2^c \mid B_1^c) \times \mathbf{P}(B_1^c). \end{aligned}$$

Rappel : cette formule est $\boxed{\text{la}}$ règle de calcul à appliquer pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements.

L'hypothèse de Markov nous permet de simplifier cette expression, car, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big(B_{n+1}^c \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) &= 1 - \mathbf{P}\Big(B_{n+1} \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) \\ &= 1 - \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) \qquad \text{(Markov)} \\ &= 3/4. \qquad \text{(par } \mathbf{8.a.}\text{)} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathbf{P}(\mathsf{T} = k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-2} \cdot \mathbf{P}(B_1^c).$$

Or $\mathbf{P}(B_1^c) = 1 - q_1 = 1 - 1/4 = 3/4$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\mathsf{T} = k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-1}.$$

8. c. Comme la famille $([\mathsf{T} = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est, par construction, un système complet d'événements et que la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est σ-additive,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathsf{T} = 0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathsf{T} = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Variante. On peut aussi remarquer que $[\mathsf{T} = 0]$ est l'intersection d'une suite décroissante d'événements :

$$[\mathsf{T} = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_1^c B_2^c \cdots B_n^c.$$

Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(\mathsf{T} = 0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_1^c B_2^c \cdots B_n^c)$$

et d'après les calculs menés au **8.b.**, cette limite est nulle.

9. La variable aléatoire T a même loi qu'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1/4$ (seule nuance : une variable aléatoire géométrique n'est jamais nulle alors que T prend la valeur 0 avec probabilité nulle). Donc T est une variable aléatoire d'espérance finie et $\mathbf{E}(\mathsf{T}) = 4$.