Soient E, *un espace préhilbertien et* F, *un sous-espace vectoriel de* E.

1. *Si* $E = F \oplus F^{\perp}$, *alors la projection orthogonale sur* F *est continue et le sous-espace* F *est un fermé de* E.

2. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.*

3. *Si la dimension de* F *est infinie, il se peut que* F *ne soit pas fermé, mais* $F^{\perp} = (\overline{F})^{\perp}$ *et*

$$F \oplus F^{\perp} = F \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset E.$$

1. Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors la projection orthogonale p sur F est bien définie, de même que la projection orthogonale q sur $F^{\perp}$ et $p + q = I_E$.

D'après le Théorème de Pythagore,

$$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| + \|x - p(x)\| = \|p(x)\| + \|q(x)\| = \|x\|,$$

ce qui prouve que

$$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\| \qquad \text{et que} \qquad \forall\, x \in E, \quad \|q(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Comme p et q sont des applications linéaires, cela prouve que ce sont des applications continues.

✍ *Cela prouve aussi que* $|||p||| \leqslant 1$ *et que* $|||q||| \leqslant 1$.

Si F *et* $F^{\perp}$ *ne sont pas réduits au vecteur nul (ce qui est le cas la plupart du temps), alors* $|||p||| = 1$ *(puisque* $p(x) = x$ *pour tout* $x \in F$*) et* $|||q||| = 1$ *(puisque* $q(x) = x$ *pour tout* $x \in F^{\perp}$*).*

❧ La projection orthogonale q est la projection sur $F^{\perp}$ parallèlement à F, donc $F = \operatorname{Ker} q$. En tant qu'image réciproque d'une partie fermée (le singleton $\{0_E\}$) par une application continue (la projection q), le sous-espace F est donc fermé.

✍ *La projection orthogonale* p *est la projection sur* F *parallèlement à* $F^{\perp}$, *donc* $F^{\perp} = \operatorname{Ker} p$ *est également une partie fermée de* E.

2. Dans un espace préhilbertien, tout sous-espace de dimension finie possède une base orthonormée et, de ce fait, la projection orthogonale p sur F est bien définie. Par conséquent, $E = F \oplus F^{\perp}$ et on déduit de la question précédente que le sous-espace F est fermé.

3. Pour toute partie F de E, on sait que $F \subset \overline{F}$ et donc que $(\overline{F})^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Réciproquement, soit $x \in F^{\perp}$. Par définition,

$$\forall\, y \in F, \qquad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0.$$

Considérons maintenant un vecteur $z \in \overline{F}$. Il existe, par définition de l'adhérence, une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers z. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle\, x \,|\, z \,\rangle - \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle\big| = \big|\langle\, x \,|\, z - y_n \,\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|z - y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$\langle\, x \,|\, z \,\rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle = 0$$

puisque les y_n sont, par hypothèse, orthogonaux à x. On vient de prouver que x était orthogonal à $\overline{F}$.

Par double inclusion,

$$F^{\perp} = (\overline{F})^{\perp}$$

et donc $F \oplus F^{\perp} = F \oplus (\overline{F})^{\perp}$.

❧ Comme F est un sous-espace de $\overline{F}$, on en déduit que

$$F \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset E.$$

✍ *Si* E *est un espace préhilbertien* <u>*complet*</u> *(c'est-à-dire un* ***espace de Hilbert****), on peut démontrer que* $F \oplus F^{\perp} = E$ *pour tout sous-espace* <u>*fermé*</u> F.