> *Soit f, une forme linéaire sur E.*
> **1.** *Si f n'est pas continue, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E telle que $f(x_n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
> **2.** *La forme linéaire f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.*

1.

✍ *On sait qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la sphère unité.*

Si f n'est pas continue, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires telle que la suite (réelle) $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\big|f(u_{\varphi(k)})\big|=+\infty.$$

Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est strictement positive à partir d'un certain rang. On peut donc poser

$$x_k=\frac{1}{f(u_{\varphi(k)})}\cdot u_{\varphi(k)}.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\|x_k\|=\frac{u_{\varphi(k)}}{\big|f(u_{\varphi(k)})\big|}=\frac{1}{\big|f(u_{\varphi(k)})\big|}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$$

et par linéarité de f,

$$f(x_k)=\frac{f(u_{\varphi(k)})}{f(u_{\varphi(k)})}=1.$$

2. Si la forme linéaire f est continue, alors son noyau est fermé en tant qu'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue.

✍ *Dans tout espace vectoriel normé, les singletons sont des parties fermées.*

❧ Réciproquement, si f n'est pas continue, on peut considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 alors que $f(x_n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Par linéarité de f,

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad f(x_n-x_0)=0$$

donc $y_n=x_n-x_0$ appartient au noyau de f pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-x_0$:

$$\|y_n-(-x_0)\|=\|(x_n-x_0)+x_0\|=\|x_n\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

mais $-x_0$ n'appartient pas au noyau de f :

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-1\neq 0.$$

Le noyau de f n'est donc pas stable par passage à la limite, ce qui signifie qu'il n'est pas fermé.