

1. Soit H , un hyperplan de E .

1. a. L'adhérence \overline{H} de H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$.

1. b. Si $a \in \overline{H} \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

2. Un hyperplan de E est une partie fermée ou une partie dense dans E .

3. Soit f , une forme linéaire non nulle sur E . L'application f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

4. On suppose maintenant que la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue.

4. a. Les images réciproques $[f > 0]$ et $[f < 0]$ sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion $[f \neq 0]$ est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

4. b.

$$\forall x \in E, \quad d(x, \text{Ker } f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

➤ *Commençons par rappeler les propriétés qu'il faut absolument connaître sur les hyperplans.*

Soit H , une partie d'un espace vectoriel E (de dimension quelconque).

✎ **Première caractérisation** — La partie H est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{K})$ non identiquement nulle telle que $H = \text{Ker } f$.

En dimension finie, l'hyperplan H est alors représenté par une équation cartésienne :

$$H = [f(x_1, \dots, x_n) = 0]$$

dans le cas $\dim E = n$.

Une telle forme linéaire n'est pas unique mais presque : si $H = \text{Ker } f = \text{Ker } g$, alors il existe un scalaire α non nul tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \alpha g(x).$$

✎ **Deuxième caractérisation** — La partie H est un hyperplan si, et seulement si, il existe un vecteur $a \neq 0_E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

✎ **Choix d'un supplémentaire** — Si H est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ quel que soit le vecteur $a \in E \setminus H$.

✎ **Lien entre supplémentaire et forme linéaire** — Si l'hyperplan $H \subset E$ est le noyau de la forme linéaire f , alors il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et, quel que soit $x \in E$, il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_H + \lambda \cdot a$. Par linéarité de f , on en déduit que

$$x = x_H + f(x) \cdot a.$$

1. a. Quelle que soit la partie H de E , on a toujours : $H \subset \overline{H} \subset E$.

✎ L'adhérence \overline{H} est, par définition, contenue dans l'espace vectoriel E . Le vecteur nul 0_E appartient au sous-espace H et par conséquent à \overline{H} . Enfin, \overline{H} est stable par combinaison linéaire (propriété dite "linéarité de la limite"). Par conséquent, l'adhérence \overline{H} est encore un sous-espace de E .

➤ *L'adhérence de tout sous-espace de E est encore un sous-espace de E .*

1. b. Soit $a \in \overline{H} \setminus H$ (en admettant qu'un tel vecteur existe). Comme $a \notin H$ et que H est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

✎ D'autre part, $H \subset \overline{H}$ (quelle que soit la partie H de E , sous-espace vectoriel ou non) et comme $a \in \overline{H}$, alors $\mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

➤ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire !*

Comme \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E qui contient H et $\mathbb{K} \cdot a$, il contient la somme $H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

➤ *Un sous-espace vectoriel qui contient à la fois H et $\mathbb{K} \cdot a$ contient nécessairement la somme $H + \mathbb{K} \cdot a$.*

2. On distingue alors deux cas.

✎ Si $H = \overline{H}$, alors H est fermé.

➤ *L'adhérence d'une partie est toujours fermée !*

• Sinon $H \subsetneq \overline{H}$, donc il existe un vecteur $a \in \overline{H} \setminus H$ et $E \subset \overline{H}$ d'après la question précédente. Dans ce cas, $\overline{H} = E$ — autrement dit : H est dense dans E .

↳ Il n'y a donc que deux possibilités :

- ou bien un hyperplan est fermé (ce qui est toujours le cas si la dimension de E est finie);
- ou bien il est dense dans E .

3. Si la forme linéaire f est continue, alors son noyau est fermé.

↳ L'image réciproque $\text{Ker } f = [f(x) = 0]$ du fermé $\{0\}$ par une application continue $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est fermée.

• Réciproquement, si la forme linéaire f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de 0_E (Théorème de caractérisation des applications linéaires continues). Il existe donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur nul et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(u_n)| = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout entier n assez grand, le scalaire $f(u_n)$ n'est pas nul :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad f(u_n) \neq 0.$$

Pour tout $n \geq n_0$, on pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{f(u_n)} \quad \text{et on remarque que} \quad f(v_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|}.$$

Par hypothèse, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$, donc la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers le vecteur nul 0_E .

Cela dit, par linéarité de f ,

$$\forall n \geq n_0, \quad v_n - v_{n_0} \in \text{Ker } f$$

puisque $f(v_n - v_{n_0}) = f(v_n) - f(v_{n_0}) = 1 - 1 = 0$ et comme v_n converge vers 0_E , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_{n_0} = -v_{n_0} \notin \text{Ker } f$$

puisque $f(-v_{n_0}) = -f(v_{n_0}) = -1$.

On a ainsi démontré que $\text{Ker } f$ n'était pas fermé (ce sous-espace n'est pas stable par passage à la limite).

↳ Cette alternative démontre que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, la forme linéaire est continue.

4. a. Si la forme linéaire f est continue, alors les trois parties

$$[f(x) > 0] = [f(x) \in]0, +\infty[], \quad [f(x) < 0] = [f(x) \in]-\infty, 0[], \quad [f(x) \neq 0] = [f(x) \in \{0\}]^c$$

sont des ouverts de E .

↳ L'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue est ouverte.

L'image réciproque d'un intervalle fermé par une application continue est fermée.

Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

• La partie $P_+ = [f(x) > 0]$ est convexe : si deux vecteurs x_1 et x_2 appartiennent à P_+ , alors $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$; quel que soit $t \in [0, 1]$, on a donc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) > 0$$

ce qui prouve que $(1-t)x_1 + tx_2 \in P_+$.

↳ Pour $0 < t < 1$, l'expression $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ est la somme de deux termes strictement positifs.

Pour $t = 0$, il reste $f(x_1) > 0$ (par hypothèse); pour $t = 1$, il reste $f(x_2) > 0$ (par hypothèse aussi).

Toute partie convexe est connexe par arcs, donc P_+ est connexe par arcs.

Il est clair que la même démonstration prouve que $P_- = [f(x) < 0]$ est convexe et donc connexe par arcs.

↳ On n'a pas eu besoin de la continuité de f pour conclure.

• Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et comme f est linéaire, $f(-x_0) = -f(x_0)$.

Si f est continue sur E et s'il existe une fonction continue

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = -x_0 \\ \forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) \in P_+ \sqcup P_- H^c \end{cases}$$

alors $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans \mathbb{R} . On peut donc appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme

$$(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad (f \circ \gamma)(1) = -f(x_0),$$

la fonction $f \circ \gamma$ change de signe et il existe donc un réel $t_1 \in [0, 1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_1) = 0$, ce qui signifie que $\gamma(t_1) \in H$: c'est impossible par hypothèse.

Par conséquent, si la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue sans être identiquement nulle, alors $\{f(x) \neq 0\}$ est ouvert mais pas connexe par arcs.

4. b.

↳ Dans la suite, l'hyperplan $H = \text{Ker } f$ est supposé fermé.

D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(x, H) = 0 &\iff x \in \overline{H} && \text{(cours!)} \\ &\iff x \in H && \text{(H est fermé)} \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

La propriété à établir est évidente dans ce cas (très) particulier.

Nous supposons par la suite que $x \notin \text{Ker } f$ et (donc!) que $d(x, H) > 0$.

• Version euclidienne

On suppose ici que E est un espace euclidien. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire a tel que

$$E = H \oplus \mathbb{R} \cdot a.$$

Comme $x \notin H$, le vecteur x n'est pas le vecteur nul et il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $t \neq 0$ tels que $x = x_H + t \cdot a$. Comme a est orthogonal à H , on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\| = |t| \sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}.$$

Par linéarité de f , on a $f(x) = t \cdot f(a)$ (puisque $H = \text{Ker } f$) et par conséquent, comme $x \neq 0_E$,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\sqrt{1 + \|x_H\|^2/t^2}} \leq |f(a)|.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall x \in E \setminus H, \quad |f(x)| \leq |f(a)| \cdot \|x\|.$$

Il est clair que cette propriété est encore vraie pour $x \in H = \text{Ker } f$. Nous avons ainsi démontré que $f \in L(E, \mathbb{R})$ était une application continue (ce qui n'est pas une surprise) et que

$$\|f\| \leq |f(a)|.$$

Par ailleurs, comme a est un vecteur unitaire,

$$|f(a)| \leq |f(a)| \cdot \|a\|$$

et ce cas d'égalité prouve que

$$\|f\| = |f(a)|.$$

D'autre part, comme $x = x_H + t \cdot a$ où $x_H \in H$ et $a \in H^\perp$, on déduit du cours que $d(x, \text{Ker } f) = \|t \cdot a\| = |t|$ (puisque le vecteur a est unitaire). D'après les calculs précédents,

$$d(x, \text{Ker } f) = |t| = \frac{|f(x)|}{|f(a)|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

↳ La propriété que nous venons de démontrer est vraie en dehors du cadre des espaces euclidiens.

• **Version générale**

Nous supposons toujours que $x \notin H = \bar{H}$ et donc que $f(x) \neq 0$ et que $d(x, H) > 0$.

• Comme $x \notin H$ et que H est un hyperplan, on a $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot x$. Pour tout vecteur $y \notin H$ non nul, il existe donc un vecteur $y_H \in H$ et un scalaire $t \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_H + t \cdot x$.

↳ On a choisi y en dehors du sous-espace vectoriel H . Comme $0_E \in H$, on en déduit que $u \neq 0_E$.

Comme $y \neq 0_E$, le scalaire t n'est pas nul ! On en déduit comme plus haut que

$$|f(y)| = |t| \cdot |f(x)| \quad \text{et que} \quad \|y\| = \|y_H + t \cdot x\| = |t| \cdot \left\| x + \frac{1}{t} \cdot y_H \right\|$$

Comme $1/t \cdot y_H \in H$, on en déduit que

$$\|y\| \geq |t| \inf_{u \in H} \|x + u\| = d(x, H).$$

Ayant majoré le numérateur et minoré le dénominateur, on en déduit que

$$\forall y \in E \setminus H, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

Le membre de gauche est nul pour tout $y \in H \setminus \{0_E\}$, donc

$$\forall y \neq 0_E, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

En passant à la borne supérieure par rapport au paramètre y , on en déduit que

$$\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

• Réciproquement, on rappelle que

$$d(x, \text{Ker } f) = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

Pour tout $y \in H = \text{Ker } f$,

$$|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\| \|x - y\|$$

puisque l'application linéaire f est supposée continue. On a donc

$$\forall y \in H, \quad \|x - y\| \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

On peut donc passer à la borne inférieure par rapport au paramètre y et obtenir enfin :

$$d(x, \text{Ker } f) \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

• On a ainsi démontré par double inégalité que

$$d(x, \text{Ker } f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

pour toute forme linéaire f continue sur E .