

**1.** Soit  $H$ , un hyperplan de  $E$ .

**1. a.** L'adhérence  $\overline{H}$  de  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $H \subset \overline{H} \subset E$ .

**1. b.** Si  $a \in \overline{H} \setminus H$ , alors  $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$ .

**2.** Un hyperplan de  $E$  est une partie fermée ou une partie dense dans  $E$ .

**3.** Soit  $f$ , une forme linéaire non nulle sur  $E$ . L'application  $f$  est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

**4.** On suppose maintenant que la forme linéaire  $f \in L(E, \mathbb{R})$  est continue.

**4. a.** Les images réciproques  $[f > 0]$  et  $[f < 0]$  sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion  $[f \neq 0]$  est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

**4. b.**

$$\forall x \in E, \quad d(x, \text{Ker } f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

☞ *Commençons par rappeler les propriétés qu'il faut absolument connaître sur les hyperplans.*

Soit  $H$ , une partie d'un espace vectoriel  $E$  (de dimension quelconque).

☛ **Première caractérisation** — La partie  $H$  est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire  $f \in L(E, \mathbb{K})$  non identiquement nulle telle que  $H = \text{Ker } f$ .

En dimension finie, l'hyperplan  $H$  est alors représenté par une équation cartésienne :

$$H = [f(x_1, \dots, x_n) = 0]$$

dans le cas  $\dim E = n$ .

Une telle forme linéaire n'est pas unique mais presque : si  $H = \text{Ker } f = \text{Ker } g$ , alors il existe un scalaire  $\alpha$  non nul tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \alpha g(x).$$

☛ **Deuxième caractérisation** — La partie  $H$  est un hyperplan si, et seulement si, il existe un vecteur  $a \neq 0_E$  tel que  $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ .

☛ **Choix d'un supplémentaire** — Si  $H$  est un hyperplan, alors  $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$  quel que soit le vecteur  $a \in E \setminus H$ .

☛ **Lien entre supplémentaire et forme linéaire** — Si l'hyperplan  $H \subset E$  est le noyau de la forme linéaire  $f$ , alors il existe un vecteur  $a \in E$  tel que  $f(a) = 1$  et, quel que soit  $x \in E$ , il existe un vecteur  $x_H \in H$  et un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $x = x_H + \lambda \cdot a$ . Par linéarité de  $f$ , on en déduit que

$$x = x_H + f(x) \cdot a.$$

**1. a.** Quelle que soit la partie  $H$  de  $E$ , on a toujours :  $H \subset \overline{H} \subset E$ .

☛ L'adhérence  $\overline{H}$  est, par définition, contenue dans l'espace vectoriel  $E$ . Le vecteur nul  $0_E$  appartient au sous-espace  $H$  et par conséquent à  $\overline{H}$ . Enfin,  $\overline{H}$  est stable par combinaison linéaire (propriété dite "linéarité de la limite"). Par conséquent, l'adhérence  $\overline{H}$  est encore un sous-espace de  $E$ .

☞ *L'adhérence de tout sous-espace de  $E$  est encore un sous-espace de  $E$ .*

**1. b.** Soit  $a \in \overline{H} \setminus H$  (en admettant qu'un tel vecteur existe). Comme  $a \notin H$  et que  $H$  est un hyperplan, alors  $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ .

☛ D'autre part,  $H \subset \overline{H}$  (quelle que soit la partie  $H$  de  $E$ , sous-espace vectoriel ou non) et comme  $a \in \overline{H}$ , alors  $\mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$ .

☞ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire !*

Comme  $\overline{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $H$  et  $\mathbb{K} \cdot a$ , il contient la somme  $H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ .

☞ *Un sous-espace vectoriel qui contient à la fois  $H$  et  $\mathbb{K} \cdot a$  contient nécessairement la somme  $H + \mathbb{K} \cdot a$ .*

**2.** On distingue alors deux cas.

☛ Si  $H = \overline{H}$ , alors  $H$  est fermé.

☞ *L'adhérence d'une partie est toujours fermée !*

• Sinon  $H \subsetneq \overline{H}$ , donc il existe un vecteur  $a \in \overline{H} \setminus H$  et  $E \subset \overline{H}$  d'après la question précédente. Dans ce cas,  $\overline{H} = E$  — autrement dit :  $H$  est dense dans  $E$ .

↳ Il n'y a donc que deux possibilités :

- ou bien un hyperplan est fermé (ce qui est toujours le cas si la dimension de  $E$  est finie);
- ou bien il est dense dans  $E$ .

**3.** Si la forme linéaire  $f$  est continue, alors son noyau est fermé.

↳ L'image réciproque  $\text{Ker } f = [f(x) = 0]$  du fermé  $\{0\}$  par une application continue  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  est fermée.

• Réciproquement, si la forme linéaire  $f$  n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de  $0_E$  (Théorème de caractérisation des applications linéaires continues). Il existe donc une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers le vecteur nul et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(u_n)| = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout entier  $n$  assez grand, le scalaire  $f(u_n)$  n'est pas nul :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad f(u_n) \neq 0.$$

Pour tout  $n \geq n_0$ , on pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{f(u_n)} \quad \text{et on remarque que} \quad f(v_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|}.$$

Par hypothèse, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers  $+\infty$ , donc la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  converge vers le vecteur nul  $0_E$ .

Cela dit, par linéarité de  $f$ ,

$$\forall n \geq n_0, \quad v_n - v_{n_0} \in \text{Ker } f$$

puisque  $f(v_n - v_{n_0}) = f(v_n) - f(v_{n_0}) = 1 - 1 = 0$  et comme  $v_n$  converge vers  $0_E$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_{n_0} = -v_{n_0} \notin \text{Ker } f$$

puisque  $f(-v_{n_0}) = -f(v_{n_0}) = -1$ .

On a ainsi démontré que  $\text{Ker } f$  n'était pas fermé (ce sous-espace n'est pas stable par passage à la limite).

↳ Cette alternative démontre que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, la forme linéaire est continue.

**4. a.** Si la forme linéaire  $f$  est continue, alors les trois parties

$$[f(x) > 0] = [f(x) \in ]0, +\infty[ ], \quad [f(x) < 0] = [f(x) \in ]-\infty, 0[ ], \quad [f(x) \neq 0] = [f(x) \in \{0\}]^c$$

sont des ouverts de  $E$ .

↳ L'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue est ouverte.

L'image réciproque d'un intervalle fermé par une application continue est fermée.

Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

• La partie  $P_+ = [f(x) > 0]$  est convexe : si deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $P_+$ , alors  $f(x_1) > 0$  et  $f(x_2) > 0$ ; quel que soit  $t \in [0, 1]$ , on a donc

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) > 0$$

ce qui prouve que  $(1-t)x_1 + tx_2 \in P_+$ .

↳ Pour  $0 < t < 1$ , l'expression  $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$  est la somme de deux termes strictement positifs.

Pour  $t = 0$ , il reste  $f(x_1) > 0$  (par hypothèse); pour  $t = 1$ , il reste  $f(x_2) > 0$  (par hypothèse aussi).

Toute partie convexe est connexe par arcs, donc  $P_+$  est connexe par arcs.

Il est clair que la même démonstration prouve que  $P_- = [f(x) < 0]$  est convexe et donc connexe par arcs.

↳ On n'a pas eu besoin de la continuité de  $f$  pour conclure.

• Comme  $f$  n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) \neq 0$  et comme  $f$  est linéaire,  $f(-x_0) = -f(x_0)$ .

Si  $f$  est continue sur  $E$  et s'il existe une fonction continue

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = -x_0 \\ \forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) \in P_+ \sqcup P_- H^c \end{cases}$$

alors  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On peut donc appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme

$$(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad (f \circ \gamma)(1) = -f(x_0),$$

la fonction  $f \circ \gamma$  change de signe et il existe donc un réel  $t_1 \in [0, 1]$  tel que  $(f \circ \gamma)(t_1) = 0$ , ce qui signifie que  $\gamma(t_1) \in H$  : c'est impossible par hypothèse.

Par conséquent, si la forme linéaire  $f \in L(E, \mathbb{R})$  est continue sans être identiquement nulle, alors  $\{f(x) \neq 0\}$  est ouvert mais pas connexe par arcs.

**4. b.**

↳ Dans la suite, l'hyperplan  $H = \text{Ker } f$  est supposé fermé.  
D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(x, H) = 0 &\iff x \in \overline{H} && \text{(cours!)} \\ &\iff x \in H && \text{(H est fermé)} \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

La propriété à établir est évidente dans ce cas (très) particulier.

Nous supposons par la suite que  $x \notin \text{Ker } f$  et (donc!) que  $d(x, H) > 0$ .

• **Version euclidienne**

On suppose ici que  $E$  est un espace euclidien. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire  $a$  tel que

$$E = H \oplus \mathbb{R} \cdot a.$$

Comme  $x \notin H$ , le vecteur  $x$  n'est pas le vecteur nul et il existe un vecteur  $x_H \in H$  et un scalaire  $t \neq 0$  tels que  $x = x_H + t \cdot a$ . Comme  $a$  est orthogonal à  $H$ , on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\| = |t| \sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}.$$

Par linéarité de  $f$ , on a  $f(x) = t \cdot f(a)$  (puisque  $H = \text{Ker } f$ ) et par conséquent, comme  $x \neq 0_E$ ,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\sqrt{1 + \|x_H\|^2/t^2}} \leq |f(a)|.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall x \in E \setminus H, \quad |f(x)| \leq |f(a)| \cdot \|x\|.$$

Il est clair que cette propriété est encore vraie pour  $x \in H = \text{Ker } f$ . Nous avons ainsi démontré que  $f \in L(E, \mathbb{R})$  était une application continue (ce qui n'est pas une surprise) et que

$$\|f\| \leq |f(a)|.$$

Par ailleurs, comme  $a$  est un vecteur unitaire,

$$|f(a)| \leq |f(a)| \cdot \|a\|$$

et ce cas d'égalité prouve que

$$\|f\| = |f(a)|.$$

D'autre part, comme  $x = x_H + t \cdot a$  où  $x_H \in H$  et  $a \in H^\perp$ , on déduit du cours que  $d(x, \text{Ker } f) = \|t \cdot a\| = |t|$  (puisque le vecteur  $a$  est unitaire). D'après les calculs précédents,

$$d(x, \text{Ker } f) = |t| = \frac{|f(x)|}{|f(a)|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

↳ La propriété que nous venons de démontrer est vraie en dehors du cadre des espaces euclidiens.

• **Version générale**

Nous supposons toujours que  $x \notin H = \overline{H}$  et donc que  $f(x) \neq 0$  et que  $d(x, H) > 0$ .

• Comme  $x \notin H$  et que  $H$  est un hyperplan, on a  $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot x$ . Pour tout vecteur  $y \notin H$  non nul, il existe donc un vecteur  $y_H \in H$  et un scalaire  $t \in \mathbb{K}$  tel que  $y = y_H + t \cdot x$ .

↳ On a choisi  $y$  en dehors du sous-espace vectoriel  $H$ . Comme  $0_E \in H$ , on en déduit que  $u \neq 0_E$ .

Comme  $y \neq 0_E$ , le scalaire  $t$  n'est pas nul ! On en déduit comme plus haut que

$$|f(y)| = |t| \cdot |f(x)| \quad \text{et que} \quad \|y\| = \|y_H + t \cdot x\| = |t| \cdot \left\| x + \frac{1}{t} \cdot y_H \right\|$$

Comme  $1/t \cdot y_H \in H$ , on en déduit que

$$\|y\| \geq |t| \inf_{u \in H} \|x + u\| = d(x, H).$$

Ayant majoré le numérateur et minoré le dénominateur, on en déduit que

$$\forall y \in E \setminus H, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

Le membre de gauche est nul pour tout  $y \in H \setminus \{0_E\}$ , donc

$$\forall y \neq 0_E, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

En passant à la borne supérieure par rapport au paramètre  $y$ , on en déduit que

$$\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, \text{Ker } f)}.$$

• Réciproquement, on rappelle que

$$d(x, \text{Ker } f) = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

Pour tout  $y \in H = \text{Ker } f$ ,

$$|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\| \|x - y\|$$

puisque l'application linéaire  $f$  est supposée continue. On a donc

$$\forall y \in H, \quad \|x - y\| \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

On peut donc passer à la borne inférieure par rapport au paramètre  $y$  et obtenir enfin :

$$d(x, \text{Ker } f) \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

• On a ainsi démontré par double inégalité que

$$d(x, \text{Ker } f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

pour toute forme linéaire  $f$  continue sur  $E$ .