> *Soit* E, *un espace vectoriel normé par* $\|\cdot\|$.
> **1.** *Un sous-espace vectoriel* F *qui contient une boule ouverte* $B_o(x_0, r)$ *contient aussi la boule ouverte* $B_o(0_E, r)$.
> **2.** *L'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de* E *est vide.*

1. Supposons que la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ soit contenue dans F :

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - x_0\| < r \implies x \in F.$$

Considérons maintenant un vecteur y de la boule ouverte centrée à l'origine $B_o(0_E, r)$: comme $\|y\| < r$, alors

$$\big\|(x_0 + y) - x_0\big\| = \|y\| < r$$

donc $x_0 + y \in B_o(x_0, r) \subset F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc

$$y = \underbrace{(x_0 + y)}_{\in F} - \underbrace{x_0}_{\in F} \in F.$$

Par conséquent, la boule ouverte $B_o(0_E, r)$ est contenue dans F.

2. Soit F, un sous-espace vectoriel strict de E : on a donc $F \subsetneq E$.

Supposons que l'intérieur de F ne soit pas vide. Il existe alors un vecteur x_0 dans l'intérieur de F et, par définition de l'intérieur, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ soit contenue dans F.

D'après la question précédente, la boule ouverte $B_o(0_E, r)$ est contenue dans F.

Le vecteur nul 0_E appartient à F (puisque F est un sous-espace vectoriel de E).

Si $x \in E$ n'est pas le vecteur nul, alors

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \cdot \Big(\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\Big).$$

La norme du vecteur $(r/2\|x\|) \cdot x$ est égale à $r/2 < r$, donc ce vecteur appartient à F et comme F est un sous-espace vectoriel, $x \in F$.

✍ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. En particulier, si* $u \in F$, *alors* $\lambda \cdot u \in F$ *pour tout scalaire* λ.

On a ainsi démontré que tout vecteur $x \in E$, nul ou non nul, appartenait à F, donc $F = E$.