1. *On suppose que trois fonctions* f, g *et* h *sont reliées par*

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

Si $f\in\mathscr{C}^2(\Omega)$, *alors* g *et* h *sont de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $]c,d[$.

2. *Une fonction* $f\in\mathscr{C}^2(\Omega)$ *vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$$

si, et seulement si, il existe g *et* h *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $]c,d[$ *telles que*

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

3. *Une fonction* $f\in\mathscr{C}^2(\Omega)$ *vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

si, et seulement si, il existe $g\in\mathscr{C}^2(]a,b[)$ *et* $h\in\mathscr{C}^2(]c,d[)$ *telles que*

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=g(x)+h(y).$$

1.

✍ *Tout est dans l'analyse du problème ! Il faut ici comprendre que* $f(x,y)$ *est une fonction* ***affine*** *de* x *et se souvenir que les deux coefficients d'une fonction affine sont déterminés par la donnée de deux points du graphe.*

► Soient donc $a<x_1<x_2<b$. On sait alors que

$$\forall\,y\in\,]c,d[,\quad \begin{cases} f(x_1,y) &= g(y)+x_1h(y)\\ f(x_2,y) &= g(y)+x_2h(y)\end{cases}$$

et comme $x_2-x_1\neq 0$,

$$\forall\,y\in\,]c,d[,\quad \begin{cases} h(y) &= \dfrac{f(x_2,y)-f(x_1,y)}{x_2-x_1} & \text{pente}\\[2ex] g(y) &= \dfrac{x_2f(x_1,y)-x_1f(x_2,y)}{x_2-x_1}. & \text{ordonnée à l'origine}\end{cases}$$

Ainsi les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ en tant que combinaisons linéaires de $[y\mapsto f(x_1,y)]$ et de $[y\mapsto f(x_2,y)]$, qui sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

$$\begin{array}{ccccc}]c,d[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & \Omega & \xrightarrow{f\in\mathscr{C}^2(\Omega)} & \mathbb{R}\\ y & \longmapsto & (x_0,y) & \longmapsto & f(x_0,y)\end{array}$$

2. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ et on pose

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

❧ La fonction $[(x,y)\mapsto x]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω (application linéaire sur $\mathbb{R}^2$). Les fonctions $[(x,y)\mapsto g(y)]$ et $[(x,y)\mapsto h(y)]$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c,d[& \xrightarrow{\varphi\in\mathscr{C}^2(]x,d[)} & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y)\end{array}$$

Par produit et somme (dans cet ordre), la fonction f est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

✍ *Il n'y a aucun calcul compliqué ici ! Mais il y a quand même une vraie difficulté théorique : il est crucial de tenir compte que* f *est une fonction de deux variables (c'est-à-dire une* ***fonction du couple*** (x,y) *en fait)* *et qu'il faut justifier la* ***régularité de*** f ***en tant que fonction de deux variables*** — et surtout pas en examinant la régularité selon x et selon y séparément.

Cela dit, on vérifie facilement que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(y)\quad\text{et donc que}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0.$$

❧ Réciproquement, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0.$$

► Fixons $y_0\in\,]c,d[$. La fonction

$$[x\mapsto f(x,y_0)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]a,b[$ comme composée :

$$x\longmapsto(x,y_0)\longmapsto f(x,y_0)$$

et que cette fonction est affine (puisque sa dérivée seconde est identiquement nulle sur un *intervalle*). Il existe donc deux constantes réelles, qui dépendent *a priori* de l'ordonnée y_0 choisie et qu'on note donc $g(y_0)$ et $h(y_0)$, telles que

$$\forall\,x\in\,]a,b[,\quad f(x,y_0)=xg(y_0)+h(y_0).$$

► On a ainsi défini deux fonctions $g,h\,:\,]c,d[\,\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

D'après la question précédente, ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

3. On applique exactement la même méthode.

❧ On suppose qu'il existe deux fonctions $g\in\mathscr{C}^2(]a,b[)$ et $h\in\mathscr{C}^2(]c,d[)$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\qquad f(x,y)=g(x)+h(y).$$

▷ La fonction f ainsi définie est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc}\Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]a,b[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & g(x)\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccc}\Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c,d[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & h(y)\end{array}$$

✍ *On voit une fois de plus sur ce diagramme sagittal qu'il est toujours possible de considérer une fonction d'*une *variable comme s'il s'agissait d'une fonction de* deux *variables...*

Pour une fonction de plusieurs variables*, il est vraiment nécessaire de faire un diagramme sagittal avant de s'en servir. (Pardon !)*

▷ Le calcul des dérivées partielles est sans mystère.

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g'(x)\quad\text{et donc}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial[g'(x)]}{\partial y}(x,y)=0$$

Ceux qui ne font pas confiance au Théorème de Schwarz peuvent recommencer.

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=h'(y)\quad\text{et donc}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial[h'(y)]}{\partial x}(x,y)=0$$

❧ Réciproquement, supposons que f soit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0.$$

▷ Cela signifie que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y)=0.$$

On sait dans ce cas qu'il existe une fonction $\eta = \eta(y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c, d[$ telle que

$$\forall\,(x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \eta(y).$$

▷ Pour tout $x_0 \in\,]a, b[$, la fonction $[y \mapsto f(x_0, y)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]c, d[$ (propriété maintenant très classique). D'après le Théorème fondamental du calcul intégral,

$$\begin{aligned}\forall\,(x, y_0) \in \Omega,\ \forall\,y \in\,]c, d[\,, \quad f(x, y) &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, z)\,dz \\ &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \eta(z)\,dz\end{aligned}$$

et donc, pour un $c < y_0 < d$ arbitrairement choisi,

$$\forall\,(x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = f(x, y_0) + H_0(y)$$

où H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$ en tant que primitive de $\eta \in \mathscr{C}^1(]c, d[)$ et $[x \mapsto f(x, y_0)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, b[$ en tant que composée de $[x \mapsto (x, y_0)]$ par f (qui sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^2$).