Recherche d'extrema [16-08]

La fonction f définie sur $A = [0 < x \leqslant a \leqslant b \leqslant y] \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\forall\,(x,y) \in A, \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur A.

✍ *Pour justifier l'existence d'un extremum sur une partie qui n'est pas compacte, on peut quand même recourir à un argument de compacité.*

❧ La partie A sur laquelle la fonction f est définie est un rectangle infini :

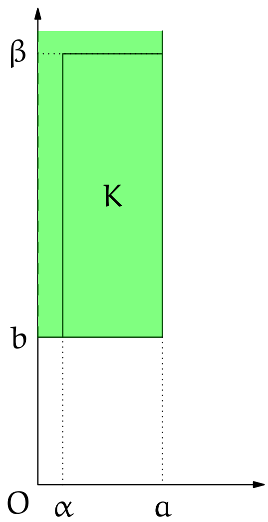
$$A = [0 < x \leqslant a] \cap [b \leqslant y] =]0, a] \times [b, +\infty[\,.$$

La partie A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point (a, b) appartient à A mais visiblement A n'est pas un voisinage de ce point.

La partie A n'est pas fermée non plus : la suite de terme général

$$M_n = \left(\frac{a}{n}, b\right)$$

est constituée de points de A, elle converge vers le point $M_\infty = (0, b)$, mais ce point n'appartient pas à A, donc A n'est pas stable par passage à la limite.



❧ La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur A (ni x, ni y ne s'annulent sur A), donc f est continue sur A.

❧ Pour $0 < \alpha < a$ et $\beta > b$, on peut définir une partie compacte

$$K = [\alpha, a] \times [b, \beta] \subset A.$$

(Il est clair que K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie.)

Sur ce compact, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes : il existe (au moins) deux points $P_0 \in K$ et $P_1 \in K$ tels que

$$\forall\, M \in K, \qquad f(P_1) \leqslant f(M) \leqslant f(P_0).$$

✍ *Le réel $f(P_0)$ est le maximum de la fonction f restreinte au compact K et le réel $f(P_1)$ est son minimum. Pour le moment, on peut choisir librement α et β. Il nous reste à voir comment* bien *les choisir.*

▶ Soit $P = (x, y) \in A$, un point situé en dehors du compact K : on distingue deux cas.

— Ou bien $y > \beta$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geqslant y^2 > \beta y > 0 \\ 0 < xy \leqslant ay, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x,y) \geqslant \frac{\beta}{a}.$$

— Ou bien $y \leqslant \beta$ et $0 < x < \alpha$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geqslant y^2 \geqslant b^2 \\ \quad 0 < xy < \beta x, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x,y) \geqslant \frac{b^2}{\beta x} \geqslant \frac{b^2}{\alpha\beta}.$$

► Comme $(a,b) \in A$, nous allons enfin prendre $f(a,b)$ comme valeur de référence. On peut choisir β assez grand pour que

$$\frac{\beta}{a} \geqslant f(a,b)$$

et, maintenant que β est fixé, on peut choisir α assez proche de 0 pour que

$$\frac{b^2}{\alpha\beta} \geqslant f(a,b).$$

Pour un tel couple (α,β), on a démontré ci-dessus qu'il existait un point $P_1 \in K \subset A$ tel que

$$\forall\, M \in K, \quad f(M) \geqslant f(P_1)$$

et en particulier tel que $f(a,b) \geqslant f(P_1)$ (puisque $(a,b) \in K$). On a également démontré que

$$\forall\, M \in A \setminus K, \quad f(M) \geqslant f(a,b) \geqslant f(P_1).$$

Par conséquent, on a bien démontré que

$$\forall\, M \in A, \qquad f(M) \geqslant f(P_1)$$

c'est-à-dire que f atteint une valeur minimale sur A (égale à $f(P_1)$).

✍ *Et $f(P_1)$? Cette valeur maximale sur K est sans intérêt ! Lorsque x tend vers 0, la valeur de $f(x,b)$ tend vers $+\infty$, donc f n'est pas majorée sur A.*

Nous avons prouvé que f atteignait un minimum sur A. Allons-nous en rester là ? Ou au moins essayer de calculer la valeur de ce minimum ?

❧ **Première méthode.**

Il n'y a que deux possibilités : ou bien f atteint son minimum à l'intérieur de A, c'est-à-dire sur l'ouvert

$$A^\circ =]0,a[\, \times\,]b,+\infty[,$$

ou bien f atteint son minimum sur le bord de A, c'est-à-dire sur l'un des deux intervalles suivants :

$$H = \{(x,b),\ 0 < x \leqslant a\}, \qquad V = \{(a,y),\ b \leqslant y\}.$$

► [Premier cas] Si f atteint son minimum en un point P_1 de l'ouvert A°, alors le point P_1 est un point critique de f. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-y)(x+y)}{x^2 y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-x)(x+y)}{xy^2},$$

donc les points critiques de f sont les points de la médiatrice $[y = x]$.

Seulement voilà : la médiatrice ne rencontre pas A° ! En effet, si $(x,y) \in A^\circ$, alors $x < a \leqslant b < y$, donc $x < y$.

La fonction f n'a donc aucun point critique sur l'ouvert A° et, faute de point critique, elle n'atteint pas son minimum sur A°.

► [Second cas] La fonction f atteint donc son minimum sur l'intervalle horizontal H ou sur l'intervalle vertical V.

Pour tout $(x,y) \in H$, on a

$$0 < x \leqslant a \quad \text{et} \quad f(x,y) = f(x,b) = \frac{x}{b} + 2 + \frac{b}{x}.$$

Une étude de fonction montre que le second membre est décroissant sur $]0,b]$ et croissant sur $[b,+\infty[$. Or $x \in]0,a] \subset]0,b]$, donc

$$\min_{(x,y)\in H} f(x,y) = f(a,b).$$

De même, pour tout $(x,y) \in V$, on a

$$b \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x,y) = f(a,y) = \frac{a}{y} + 2 + \frac{y}{a}.$$

C'est la même chose ! Et comme $y \in [b, +\infty[\subset [a, +\infty[$, on en déduit que

$$\min_{(x,y)\in V} f(x, y) = f(a, b).$$

Conclusion : On connaît la valeur minimale de f

$$\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = f(a, b)$$

et le raisonnement précédent nous assure aussi que cette valeur n'est atteinte qu'au seul point (a, b) (*minimum global strict*).

❧ **Deuxième méthode.**
On peut aussi appliquer la méthode des crêtes puisque f est définie sur un rectangle.

- ► [Balayage en y] On fixe $0 < x_0 \leqslant a$ et on étudie les variations de la fonction

$$\left[y \mapsto f(x_0, y) = \frac{x_0}{y} + 2 + \frac{y}{x_0}\right]$$

sur l'intervalle $[b, +\infty[$. C'est déjà fait ! Comme

$$y \in [b, +\infty[\subset [x_0, +\infty[\,,$$

on sait que

$$\forall\, 0 < x_0 \leqslant a, \quad \min_{y\geqslant b} f(x_0, y) = f(x_0, b).$$

- ► [Balayage en x] Il reste à étudier les variations de

$$[x \mapsto f(x, b)]$$

sur l'intervalle $]0, a]$ et c'est déjà fait. Comme

$$x \in \,]0, a] \subset \,]0, b]\,,$$

on sait que

$$\min_{0<x\leqslant a} f(x, b) = f(a, b).$$

Par conséquent,

$$\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = \min_{0<x\leqslant a}\left[\min_{y\geqslant b} f(x, y)\right] = f(a, b).$$