*On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et de période $2\pi$ de la norme de convergence en moyenne quadratique sur $I = [0, 2\pi]$.*

**1. a.** *La suite de terme général $f_n = [t \mapsto \cos nt]$ est bornée.*

**1. b.** *Si $n$ et $p$ sont deux entiers non nuls et distincts, alors $\|f_n - f_p\| = 1$ et on ne peut extraire aucune suite convergente de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**2.** *La boule unité de $E$ est une partie fermée et bornée qui n'est pas compacte.*

**1. a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } n = 0, \\ 1/2 & \text{pour } n \geqslant 1. \end{array} \right.$$

Il est donc clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ de convergence en moyenne quadratique.

✍ *Si on ne connaît pas le résultat par cœur, on le retrouve en* linéarisant.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

**1. b.** On suppose que $1 \leqslant n < p$. On déduit de la question précédente que

$$\|f_n - f_p\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_p\|^2 - 2\langle f_n \,|\, f_p \rangle = 1 - 2\langle f_n \,|\, f_p \rangle.$$

On linéarise à nouveau :

$$\begin{aligned} \langle f_n \,|\, f_p \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt \cos pt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+p)t + \cos(n-p)t}{2} \, dt = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant n < p, \qquad \|f_n - f_p\| = 1.$$

❧ S'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait, alors il existerait une limite $\ell \in E$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - \ell\| = 0.$$

Par inégalité triangulaire, on aurait en particulier

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leqslant \|f_{n_{k+1}} - \ell\| + \|\ell - f_{n_k}\|$$

et par encadrement

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 0.$$

Or $1 \leqslant n_1 \leqslant n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 1$ (par définition des *suites extraites* !), donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 1$$

ce qui contredit la limite précédente.

Par conséquent, de la suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ne peut extraire aucune suite convergente.

**2.** La boule unité fermée $B$ de $E$ est fermée (comme son nom l'indique) et bornée (par définition).

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $B$ qui n'a aucune valeur d'adhérence, donc la partie $B$ *n'est pas compacte.*