CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1 **16-01**

Étudier l'application définie par

$$\forall\,(x,y)\neq(0,0),\quad f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|}.$$

Exercice 2 **16-02**

On pose $\Omega=\mathbb{R}^2$.

1. Résoudre à l'EDP

$$\forall\,M=(x,y)\in\Omega,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M)-2\frac{\partial f}{\partial y}(M)=0.\qquad (H)$$

2. Résoudre l'EDP (E) :

$$\forall\,M=(x,y)\in\Omega,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M)-2\frac{\partial f}{\partial y}(M)=y.\qquad (E)$$

Exercice 3 **16-03**

1. Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y)=f\big(z(x,y)\big)$$

avec $f(z)=\sin z$ et $z(x,y)=3x-4y$.

2. Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y)=f\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

avec $f(u,v)=u-v$, $u(x,y)=x^2y$ et $v(x,y)=xy^2$.

Exercice 4 **16-04**

On suppose que $g=g(u)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si $u=u(x_1,\dots,x_n)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$f(x_1,\dots,x_n)=g\big(u(x_1,\dots,x_n)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et son laplacien est donné par

$$\Delta f=g''(u)\|\nabla u\|^2+g'(u)\Delta u.$$

2. Sur $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on pose

$$u(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

2. a.

$$\forall\,1\leqslant k\leqslant n,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=\frac{1}{u}-\frac{x_k^2}{u^3}$$

2. b. La fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\,u>0,\quad g''(u)+\frac{n-1}{u}\cdot g'(u)=0$$

2. c. Si $n\geqslant 3$ et si f est une fonction harmonique radiale sur Ω, alors il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall\,\mathbf{x}\neq 0,\quad f(\mathbf{x})=\frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}}+b.$$

Exercice 5 **16-05**

Soit $f=f(x,y)$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. La fonction g définie par

$$g(u,v)=f(u+v,uv)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si g est harmonique sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(x^2-2y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

sur l'ouvert $\Omega=[x^2-4y>0]$.

Exercice 6 **16-06**

L'application f définie par $f(0,0)=0$ et par

$$\forall\,(x,y)\neq(0,0),\quad f(x,y)=(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

Exercice 7 **16-07**

La fonction f définie par $f(0,y)=0$ pour tout $y\in\mathbb{R}$ et par

$$f(x,y)=x^2\cos\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

sur $[x\neq 0]$ est différentiable au point $(0,0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 **16-08**

La fonction f définie sur $A=[0<x\leqslant a\leqslant b\leqslant y]\subset\mathbb{R}^2$ par

$$\forall\,(x,y)\in A,\quad f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur A.

Exercice 9 **16-09**

1. On suppose que trois fonctions f, g et h sont reliées par

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

Si $f\in\mathscr{C}^2(\Omega)$, alors g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

2. Une fonction $f\in\mathscr{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$$

si, et seulement si, il existe g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=xg(y)+h(y).$$

3. Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

si, et seulement si, il existe $g \in \mathscr{C}^2(]a,b[)$ et $h \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(x) + h(y).$$

Calcul différentiel (Solutions)

Solution 1 16-01

✍ ***Notations et préliminaires topologiques***

On note comme d'habitude $O = (0,0)$ l'origine du plan ; on pose

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \textit{et} \quad V = [x \neq 0] \cap [y \neq 0].$$

Tout ensemble fini est fermé, donc la partie U est un ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

Les ensembles $[x \neq 0]$ et $[y \neq 0]$ sont ouverts puisque ce sont les images réciproques respectives de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par les applications continues (polynomiales !)

$$[(x,y) \mapsto x] \quad \textit{et} \quad [(x,y) \mapsto y].$$

La partie V est donc ouverte en tant qu'intersection de deux ouverts.

Il est clair que la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$$

est définie sur U.

❧ **Régularité de f sur l'ouvert V**

On sait que les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que les applications $[t \mapsto |t|]$ et $[t \mapsto 1/t]$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Les composées

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & |x| \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & |y| \end{array}$$

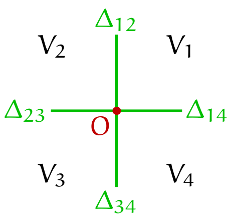
sont donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. La somme de deux applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V. Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| & \longmapsto & \frac{1}{|x|+|y|} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V.

La fonction (polynomiale) $[(x,y) \mapsto xy]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V. Par produit, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V.

❧ L'ouvert V est l'union de quatre quarts de plan ouverts V_1, V_2, V_3 et V_4 sur lesquels on peut calculer les dérivées partielles de f.



► Pour tout point $M = (x,y) \in V_1$,

$$f(M) = \frac{xy}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

► Pour tout point $M = (x,y) \in V_2$,

$$f(M) = \frac{xy}{-x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{y^2}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x-y)^2}.$$

► Pour tout point $M = (x,y) \in V_3$,

$$f(M) = \frac{-xy}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{-x^2}{(x+y)^2}.$$

▶ Pour tout point $M = (x, y) \in V_4$,

$$f(M) = \frac{xy}{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-y^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

✍ *Il faut penser à utiliser les symétries de f pour éviter de faire plusieurs fois le même calcul ou presque !*

❧ **Régularité de f sur l'ouvert U**
La fonction $[t \mapsto |t|]$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Les composées

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & |x| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & |y| \end{array}$$

sont donc continues. La somme de deux applications de classe continues sur U est continue sur U. Par conséquent, la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| & \longmapsto & \frac{1}{|x|+|y|} \end{array}$$

est continue sur U.
La fonction (polynomiale) $[(x,y) \mapsto xy]$ est continues sur U. Par produit, la fonction f est donc continue sur U.

✍ *Deux problèmes se posent donc.*
— *Peut-on prolonger la fonction f, qui est continue sur U, en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ?*
— *La fonction f, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, est-elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U (qui contient l'ouvert V) ?*

❧ **Prolongement par continuité**
On prolonge la fonction f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(O) = 0$.

✍ *On choisit cette valeur* après *avoir fait les calculs qui suivent, on ne la choisit surtout pas par hasard !*

✍ *Pour justifier la continuité de f au point O, il faut définir une norme sur $\mathbb{R}^2$. Peu importe laquelle : sur $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc le choix de la norme n'aura aucune conséquence sur la continuité du prolongement. Il s'agit de choisir la norme qui rendra les calculs aussi commodes que possible.*

On choisir de munir l'espace $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Autrement dit, on passe en coordonnées polaires : pour tout point $M \neq O$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) \qquad \text{où} \qquad r = \|\mathbf{OM}\|.$$

On en déduit que

$$\forall\, M \neq O, \quad \big|f(M) - f(O)\big| = r \cdot \frac{|\cos\theta \sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|} \leqslant \frac{r}{m_0} = \frac{\|\mathbf{OM}\|}{m_0}$$

où on a posé

$$m_0 = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2} |\cos\theta| + |\sin\theta| > 0.$$

En effet, la fonction $[\theta \mapsto |\cos\theta| + |\sin\theta|]$ est strictement positive (le sinus et le cosinus ne peuvent pas s'annuler simultanément), continue et $\pi/2$-périodique, donc elle atteint un minimum m_0 strictement positif (puisque la fonction ne prend que des valeurs strictement positives).
L'encadrement ainsi obtenu prouve que

$$\lim_{\|\mathbf{OM}\| \to 0} f(M) = f(O)$$

et donc que la fonction f, telle que nous l'avons prolongée, est continue au point O.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

✍ *Toute fonction différentiable est continue, mais toute fonction continue n'est pas différentiable.*
Il est donc naturel de se demander si ce prolongement de f, qui est continu au point O, est aussi différentiable au point O.

❧ **Différentiabilité à l'origine**

✍ *Par définition, la fonction f est différentiable au point O si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de O.*

On sait de plus que le seul développement limité possible est de la forme

$$f(O+\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}=(x,y)\to 0}{=} f(O) + x\frac{\partial f}{\partial x}(O) + y\frac{\partial f}{\partial y}(O) + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Nous allons donc d'abord calculer les dérivées partielles avant de vérifier si nous avons bien un développement limité à l'ordre 1.

Pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

donc les deux dérivées partielles de f sont définies en O et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Comme $f(O) = 0$, il reste donc à vérifier si

$$f(O+\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{=} o(\|\mathbf{h}\|).$$

✍ *Comme pour la continuité, le calcul sur les ordres de grandeur impose de choisir une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

Nous conservons la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ pour calculer en coordonnées polaires. Comme on l'a déjà vu,

$$f(O+\mathbf{h}) = r \cdot \frac{|\cos\theta \sin\theta|}{|\cos\theta| + |\sin\theta|}$$

et comme le facteur de $r = \|\mathbf{h}\|$ est indépendant de r, il ne peut pas tendre vers 0 lorsque r tend vers 0. Par conséquent,

$$f(O+\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{=} \mathcal{O}(\mathbf{h}) \quad \text{mais} \quad f(O+\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{\neq} o(\mathbf{h}).$$

Par conséquent, la fonction f n'est pas différentiable au point O.

✍ ***Variante***

On peut aussi raisonner par l'absurde.

Supposons que f *soit différentiable au point* O. *Alors l'application linéaire tangente* $\mathrm{d}f(O)$ *est une forme linéaire sur* $\mathbb{R}^2$ *et cette forme linéaire est alors caractérisée par l'image de la base canonique* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *:*

$$\mathrm{d}f(O)(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0, \qquad \mathrm{d}f(O)(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Par conséquent, la forme linéaire $\mathrm{d}f(O)$ *est identiquement nulle.*

Considérons maintenant le vecteur $\mathbf{u} = (1,1)$. *On sait que la dérivée de* f *au point* O *suivant* $\mathbf{u}$ *peut se déduire de l'application linéaire tangente :*

$$D_{\mathbf{u}}(f)(O) = \mathrm{d}f(O)(\mathbf{u}) = 0$$

(puisque l'application linéaire tangente est identiquement nulle).

Mais si on revient à la définition de la dérivée suivant $\mathbf{u}$*, on obtient*

$$D_{\mathbf{u}}(f)(O) = \lim_{t\to 0} \frac{f(O+t\cdot\mathbf{u})-f(O)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2|t|},$$

ce qui est absurde (la limite à gauche diffère de la limite à droite).

Par conséquent, l'application f *n'est pas différentiable au point* O.

❧ **Différentiabilité sur $\mathbb{U}$**

✍ *Pour démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{U}$, il nous suffit d'étudier f sur les quatre demi-axes ouverts de coordonnées (on sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V).*

Dans ce but, nous allons bien entendu appliquer le Théorème fondamental :

— dans un premier temps, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont bien définies en chaque point M_0 de V ;

— ensuite, nous allons vérifier que les dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 de V.

Le premier point est très facile, il ne demande que de revenir à la définition des dérivées partielles.

Le second point est plus délicat et il impose une fois de plus de choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour étudier la limite.

❧ Nous noterons Δ_{14} (resp. Δ_{12}, resp. Δ_{23}, resp. Δ_{34}), la demi-droite ouverte qui sépare les quarts de plan V_1 et V_4 (resp. V_1 et V_2, resp. V_2 et V_3, resp. V_3 et V_4).

Il s'agit de vérifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{U}$, sachant qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, et donc d'étudier f au voisinage des points M_0 appartenant à l'une de ces quatre demi-droites Δ_{ij}.

❧ La fonction f admet deux dérivées partielles en chacun de ces points.

► Si $M_0 \in \Delta_{14} \cup \Delta_{23}$, alors $M_0 = (x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_1) - f(M_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = 0,$$
$$\frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_2) - f(M_0)}{t} = \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \frac{x_0}{x_0 + |t|}.$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 1.$$

► Si $M_0 \in \Delta_{12} \cup \Delta_{34}$, alors $M_0 = (0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et, pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_1) - f(M_0)}{t} = \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \frac{y_0}{|t| + y_0},$$
$$\frac{f(M_0 + t \cdot \mathbf{e}_2) - f(M_0)}{t} = \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que les dérivées partielles sont définies et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$

❧ Il reste à démontrer que les deux dérivées partielles de f sont continues en chaque point M_0 considéré.

Pour éviter de faire plusieurs fois presque la même chose, nous allons nous restreindre aux points $M_0 \in \Delta_{14}$, de coordonnées $(x_0, 0)$ avec $x_0 > 0$.

Pour étudier la continuité, nous allons choisir la norme produit (la norme euclidienne canonique n'est pas plus simple).

À ce sujet, on rappelle que, pour tout point $M = (x, y)$, le vecteur $\mathbf{h} = \mathbf{M_0M}$ est en fait égal à $(x - x_0,\ y)$. Par conséquent, la norme produit de ce vecteur est définie par

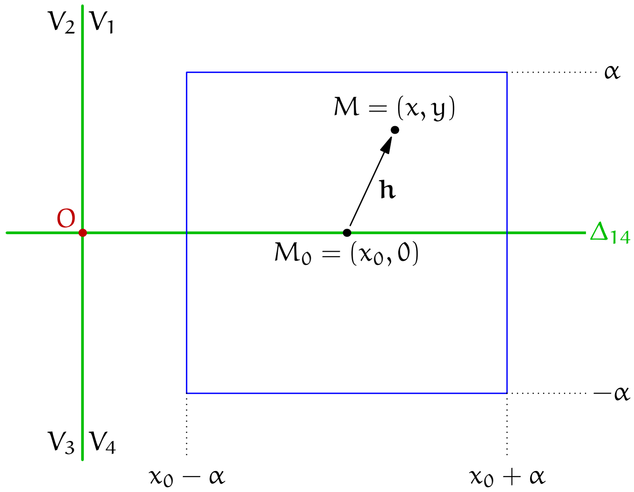
$$\|\mathbf{M_0M}\| = \max\{|x - x_0|,\ |y|\}$$

et nous utiliserons les deux encadrements suivants.

$$|x - x_0| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\| \qquad |y| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\|$$

❧ Puisqu'il s'agit d'étudier f au voisinage du point M_0, nous allons choisir un réel $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha < x_0$ et nous restreindre aux points $M = (x, y)$ tels que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$.

Il s'agit des points M situés à l'intérieur du carré bleu sur la figure ci-dessous. On constate qu'il faudra distinguer trois cas : $M \in V_1$ (c'est-à-dire $y > 0$) ; $M \in \Delta_{12}$ (c'est-à-dire $y = 0$) et $M \in V_4$ (c'est-à-dire $y < 0$).



❧ Étudions la continuité de la première dérivée partielle.

▶ Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = \frac{y^2}{(x+y)^2} \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leqslant x + y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leqslant x$ et $y > 0$).

▶ Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = \frac{y^2}{(x-y)^2} \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x_0 - \alpha \leqslant x - y$ (car $0 < x_0 - \alpha \leqslant x$ et $y < 0$).

▶ Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = 0.$$

Bref : pour tout point M tel que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| \leqslant \frac{\|\mathbf{M_0M}\|^2}{(x_0-\alpha)^2}.$$

Lorsque le point M tend vers le point M_0, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur reste constant. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{M\to M_0} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

et donc que la première dérivée partielle est continue au point M_0.

❧ On reprend la même démarche pour la seconde dérivée partielle.

▶ Pour $M = (x, y) \in V_1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \frac{|2xy + y^2|}{(x+y)^2} \leqslant \frac{[2(x_0+\alpha)+\alpha]\cdot\|\mathbf{M_0M}\|}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leqslant x_0 + \alpha$, $0 < y \leqslant \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leqslant x + y$ (comme plus haut).

▶ Pour $M = (x, y) \in V_4$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \frac{|2xy - y^2|}{(x-y)^2} \leqslant \frac{[2(x_0+\alpha)+\alpha]\cdot\|\mathbf{M_0M}\|}{(x_0-\alpha)^2}$$

puisque $0 < x \leqslant x_0 + \alpha$, $0 < |y| \leqslant \alpha$ et $0 < x_0 - \alpha \leqslant x - y$.

▶ Pour $M = (x, 0) \in \Delta_{14}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = 0.$$

À nouveau, pour tout point M tel que $\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant \alpha$ avec $0 < \alpha < x_0$, on a démontré que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| \leqslant \frac{2x_0 + 3\alpha}{(x_0-\alpha)^2}\cdot\|\mathbf{M_0M}\|.$$

Le premier facteur est indépendant de M. On en déduit par encadrement que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$$

et donc que la seconde dérivée partielle est continue au point M_0.

❧ D'après le Théorème fondamental, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ en chaque point de la demi-droite Δ_{14}.

❧ En répétant la démarche sur les trois autres demi-droites, on peut conclure : la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.

Solution 2 **16-02**

✍ *On sait, après avoir traité différents exemples, qu'on peut résoudre ces* EDP *à l'aide d'un changement de variables linéaire. Comment choisir un changement de variables convenable ? Quelles différences voit-on apparaître entre deux changements de variables ?*

1. ❧ L'EDP (H) nous dit que le gradient d'une solution est constamment orthogonal au vecteur $(1, -2)$. Le gradient de f en un point M quelconque est donc proportionnel au vecteur $(2, 1)$, c'est-à-dire au gradient de la forme linéaire

$$\varphi = [(x, y) \mapsto 2x + y] .$$

On devine ainsi que la fonction f est constante sur les droites affines d'équation

$$[2x + y = C]$$

et qu'il est donc intéressant de poser $u = 2x + y$.

❧ Considérons le changement de variables linéaire $(u, v) = \Phi(x, y)$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

La matrice J est (clairement) inversible, ce qui prouve que Φ est bien un changement de variables et la matrice inverse

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nous donne les variables x et y en fonction de u et v :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - 2v \end{pmatrix} . \tag{♣}$$

❧ On pose

$$\forall\, M \in \Omega, \quad f(M) = g\big(\Phi(M)\big).$$

Comme l'application Φ réalise une bijection de Ω sur Ω, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω :

$$\forall\, N \in \Omega, \quad g(N) = f\big(\Phi^{-1}(N)\big).$$

❧ D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Plus précisément,

$$\forall\, M \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}\big(\Phi(M)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(M) \tag{♠}$$

et comme Φ réalise une bijection de Ω sur Ω, on en déduit que la fonction f est une solution de l'EDP (H) si, et seulement si, la fonction g est une solution de l'EDP (H′) :

$$\forall\, N = (u, v) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(N) = 0. \tag{H′}$$

❧ Le cours nous donne les solutions de (H′) : une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est solution de (H′) si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, (u, v) \in \Omega, \quad g(u, v) = G(u).$$

Par conséquent, une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est solution de (H) si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=g\big(\Phi(x,y)\big)=G\big(u(x,y)\big)=G(2x+y).$$

2. D'après la règle de la chaîne (♠) et le changement de variables (♣), la fonction f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $g=f\circ\Phi^{-1}$ est une solution de (E') :

$$\forall\,N=(u,v)\in\Omega,\quad \frac{\partial g}{\partial v}(N)=u-2v. \tag{E'}$$

D'après le cours, une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est une solution de l'EDP (E') si, et seulement si, il existe une fonction G_1 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(u,v)\in\Omega,\quad g(u,v)=uv-v^2+G_1(u)$$

où on reconnaît la superposition d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (H).

On en déduit qu'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est une solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_1\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=(x+y).x+G_1(2x+y).$$

❧ **Variante : Autre changement de variables**

Considérons maintenant le changement de variables linéaire $(s,t)=\Psi(x,y)$ défini par

$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad J=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$J^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\quad\text{donc}\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\Psi^{-1}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(s-t)/2\\t\end{pmatrix}.$$

❧ On pose maintenant $f(x,y)=h\big(\Psi(x,y)\big)$: comme plus haut, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si, et seulement si, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et, d'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{-1}{2}\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-2\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

On en déduit que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction h est solution de

$$\forall\,P=(s,t)\in\Omega,\quad -2\cdot\frac{\partial h}{\partial t}(P)=y(s,t)=t$$

c'est-à-dire solution de (E'') :

$$\forall\,P=(s,t)\in\Omega,\quad \frac{\partial h}{\partial t}(P)=\frac{-t}{2}. \tag{E''}$$

Comme plus haut, la fonction $h\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de l'EDP (E'') si, et seulement si, il existe une fonction $G_2\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(s,t)\in\Omega,\quad h(s,t)=\frac{-t^2}{4}+G_2(s).$$

On en déduit que $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe une fonction $G_2\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=\frac{-y^2}{4}+G_2(2x+y).$$

✍ *Les solutions de (E) trouvées avec ces deux changements de variables ne diffèrent qu'en apparence !*
En effet, pour tout $(x,y)\in\Omega$,

$$(x+y).x=\frac{-y^2}{4}+\frac{(2x+y)^2}{4}$$

donc

$$(x+y).x+G_1(2x+y)=\frac{-y^2}{4}+\left[\frac{(2x+y)^2}{4}+G_1(2x+y)\right]$$

et par conséquent les fonctions G_1 et G_2 sont liées par la relation suivante :

$$\forall\,z\in\mathbb{R},\quad G_2(z)=G_1(z)+\frac{z^2}{4}.$$

Solution 3 **16-03**

1. Si on fixe y, on se retrouve avec la composée de

$$x \mapsto g(x, y)$$

par

$$z \mapsto F(z).$$

Il s'agit donc de la composée de deux fonctions d'**une** variable réelle et il suffit d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées : la règle de la chaîne est ici hors sujet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{df}{dz}\big[g(x, y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\\ &= \cos[3x - 4y] \times 3 = 3\cos(3x - 4y).\end{aligned}$$

▶ Même chose en fixant x...

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{df}{dz}\big[g(x, y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\\ &= \cos[3x - 4y] \times (-4) = -4\cos(3x - 4y).\end{aligned}$$

▶ On retrouve (heureusement !) ces résultats en explicitant la fonction F et en dérivant directement (= sans faire apparaître f et g) :

$$F(x, y) = \sin(3x - 4y).$$

✍ *Quand on maîtrise vraiment le fonctionnement de la règle de la chaîne, on peut sous-entendre le point où les dérivées partielles sont évaluées. Dans un délai raisonnable, vous écrirez donc*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \textit{au lieu de} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{df}{dz}\big[g(x, y)\big] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Pour le moment, privilégiez encore la sécurité à la vitesse d'exécution !

✍ *Savez-vous démontrer* rapidement *que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?*

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(g(x, y), h(x, y)\big) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(g(x, y), h(x, y)\big) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\\ &= 1 \times (2xy) + (-1) \times y^2 = (2x - y)y\end{aligned}$$

puisque $u(x, y) = yx^2$ et $v(x, y) = y^2x$.

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(g(x, y), h(x, y)\big) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(g(x, y), h(x, y)\big) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\\ &= 1 \times (x^2) + (-1) \times (2xy) = (x - 2y)x.\end{aligned}$$

✍ *Les dérivées partielles de f étant constantes, il serait très agréable de pouvoir se contenter d'écrire*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

pour s'épargner de la peine. C'est possible à condition de bien maîtriser son outil !

✍ *Ici encore, on peut retrouver ces résultats sans passer par la règle de la chaîne, en partant directement de l'expression simplifiée de $F(x, y)$.*

$$F(x, y) = x^2y - xy^2 = xy(x - y).$$

✍ *Savez-vous démontrer* rapidement *que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?*

Solution 4 **16-04**

✍ *On voit ici des calculs assez simples, parce que la situation physique est elle-même très simple : on sait, grâce à une propriété de symétrie, que les quantités étudiées ne dépendent du vecteur position $(x_1, \dots, x_n)$ que par l'intermédiaire d'une fonction $u(u_1, \dots, u_n)$ — par exemple que les quantités sont radiales et sont donc représentées mathématiquement par $g(r)$.*

C'est bien d'une composition de fonctions qu'il s'agit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (g \circ u)(x_1, \dots, x_n).$$

Mais ce n'est pas un changement de variables (on n'a pas le même nombre de paramètres pour calculer f et g), c'est beaucoup plus simple.

1. Comme g et u sont de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction composée $f = g \circ u \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{u=u(x_1,\dots,x_n)} \mathbb{R} \xrightarrow{g=g(u)} \mathbb{R}$$

❧ On suppose que l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée. Dans cette base, les coordonnées du gradient de u sont égales à

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

et comme cette base est orthonormée

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2.$$

❧ D'après la règle de la chaîne,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

✍ *Comme g est une fonction d'une seule variable, on peut remplacer les ∂ par des d.*

Pour calculer la dérivée partielle seconde, on applique la formule précédente à elle-même. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) \\
&= \Big[\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{dg}{du}\Big)\Big] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= \Big[\frac{d}{du}\Big(\frac{dg}{du}\Big) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(Fle du 1er ordre)} \\
&= \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}
\end{aligned}$$

et en sommant sur $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\Delta f = \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \|\nabla u\|^2 + \frac{dg}{du} \cdot \Delta u.$$

✍ *Cette égalité doit être comprise comme une égalité entre fonctions des variables x_1, ..., x_n (car f et u sont des fonctions de x_1, ..., x_n). On peut alourdir la formule pour la rendre plus explicite :*

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \Delta u(\mathbf{x})$$

en notant $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pour que la formule reste lisible !

2. a. On rappelle l'astuce usuelle du calcul radial. Comme $u^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, alors

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_k} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 2x_k \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{x_k}{u}.$$

On en déduit en particulier que

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1.$$

✍ *On calcule ici dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*

❧ Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on peut dériver cette expression comme un *produit* de deux fonctions de x_k :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{\partial[1/u]}{\partial x_k} && \text{(dérivée du produit)}\\
&= 1 \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} && \text{(dérivée de l'inverse)}\\
&= \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}.
\end{aligned}$$

✍ *On rappelle que u est une fonction de $x_1, \dots, x_n$.*

❧ En sommant sur $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$\Delta u = \frac{n}{u} - \frac{1}{u^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{n}{u} - \frac{u^2}{u^3} = \frac{n-1}{u}.$$

2. b. D'après la relation générale établie à la première question,

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})}.$$

❧ La fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, si

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0,$$

alors en particulier

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0$$

et $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$.

❧ Réciproquement, la fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est clairement surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $r > 0$, il existe (au moins) un $\mathbf{x} \in \Omega$ tel que $r = u(\mathbf{x})$ et si $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, alors

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad \begin{cases} r = u(\mathbf{x}) \\ g''\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot 1 + g'\big(u(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

✍ *Une fois de plus, j'ai détaillé exagérément les calculs pour distinguer les deux moments de l'équivalence et en particulier mettre en valeur la propriété de **surjectivité** de la fonction u, qui est essentielle pour conclure ici.*

2. c. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique radiale sur Ω. On **admet** qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \qquad f(\mathbf{x}) = g\big(u(\mathbf{x})\big).$$

✍ *Ceux qui refusent d'admettre une telle propriété n'auront qu'à la prendre pour* définition *des fonctions harmoniques radiales.*

❧ D'après la question précédente, cette fonction g est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

On remarque qu'il s'agit ici d'une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre en $g'(r)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que

$$\forall\, r > 0, \quad g'(r) = \frac{K}{r^{n-1}}$$

et donc qu'il existe deux constantes $a = \frac{K}{2-n}$ et b telles que

$$\forall\, r > 0, \quad g(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$$

et donc telles que
$$\forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} + b.$$

✍ *En particulier, si une fonction harmonique et radiale est bornée sur Ω, alors $a = 0$ et cette fonction est nécessairement constante.*

Solution 5 **16-05**

1.

✍ *On utilise ici un changement de variables non linéaire. Comme on doit s'y attendre en pareil cas, il n'est pas simple de justifier la bijectivité de φ et encore moins simple d'exprimer la réciproque φ^{-1}.*

Posons $\varphi(u,v) = (u+v,\ uv)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Il est clair que $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, car ses deux composantes :
$$x = [(u,v) \mapsto u+v] \quad \text{et} \quad y = [(u,v) \mapsto uv]$$
sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiales).
❧ Comme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ par hypothèse, on en déduit que la composée
$$g : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi \in \mathscr{C}^\infty} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f \in \mathscr{C}^2} \mathbb{R}$$
est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
❧ Avant d'aller plus loin, étudions φ pour voir s'il s'agit bien d'un changement de variables.

▶ Tout d'abord, φ n'est pas injectif ! En effet, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
On pourrait se restreindre au demi-plan $[u \geqslant v]$, mais ce demi-plan n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, ce demi-plan contient l'origine mais n'est pas un voisinage de l'origine (faites une figure !).
Nous allons donc nous restreindre au demi-plan $U = [u > v]$, qui est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (faites une figure !).

▶ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(u,v) \in U$ tel que $\varphi(u,v) = (x,y)$ si, et seulement si, u et v sont les racines du polynôme $X^2 - xX + y$ (cf. relations entre coefficients et racines d'un polynôme).
Dans U, il faut que $u > v$ et donc que les racines du polynômes soient réelles et distinctes. Il faut donc que son discriminant : $x^2 - 4y$ soit strictement positif.
Réciproquement, si $x^2 - 4y > 0$, alors le polynôme $X^2 - xX + y$ admet deux racines réelles u et v et si on impose $u > v$, alors le couple (u,v) est unique.

▶ On vient ainsi de démontrer que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert
$$\Omega = [x^2 - 4y > 0].$$

✍ *Faites une figure pour démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$!*
▷ *Par ailleurs,*
$$u(x,y) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \textit{et} \quad v(x,y) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$
mais, fort heureusement, nous n'utiliserons pas ces formules...

2.

✍ *Il nous reste à relier l'EDP $\Delta g = 0$ à l'EDP en f et pour cela il faut exprimer les dérivées partielles secondes d'une des fonctions à l'aide des dérivées partielles de l'autre. Mais dans quel sens procéder ?*

❧ D'après l'expression de φ,
$$\forall\, (u,v) \in U, \quad \operatorname{Jac} \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Avec les formules de Cramer, on en déduit que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(x,y)=\big[\operatorname{Jac}\varphi\big(u(x,y),v(x,y)\big)\big]^{-1}$$
$$=\frac{1}{u-v}\begin{pmatrix}u & -1\\ -v & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Bien entendu, dans cette expression, il faut comprendre que u et v sont des **fonctions** de x et y (puisque le membre de gauche est lui-même une fonction de x et y) et non pas des variables comme dans la jacobienne de φ.

Plus précisément,
$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad (u,v)=\big(u(x,y),\,v(x,y)\big)=(\varphi^{-1})(x,y).$$

✍ *Même si l'expression de $\varphi^{-1}(x,y)$ est compliquée (voire impossible à formuler), on peut facilement calculer la jacobienne de φ^{-1} : il suffit d'inverser la jacobienne de φ.*

❧ Appliquons la règle de la chaîne en tenant compte de la jacobienne (1) de φ.

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Avant de continuer, il faut bien comprendre le sens exact de ces deux relations. La première signifie :

$$\forall\,(u,v)\in U,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)$$

et la signification de la seconde est analogue.

❧ On en déduit les dérivées partielles secondes de g. Comme f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$, on peut simplifier les dérivées partielles secondes croisées avec le Théorème de Schwarz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}&=\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big\}+v\cdot\Big\{\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big\}\\&=\Big\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big\}+v\cdot\Big\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big\}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2v\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+v^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{(par (2))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}&=\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big\}+u\cdot\Big\{\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big\}\\&=\Big\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big\}+u\cdot\Big\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big\}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2u\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+u^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{(par (2) aussi)}\end{aligned}$$

❧ On peut alors calculer le laplacien de g.

$$\Delta g=2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(u+v)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Une fois encore, il faut faire apparaître le changement de variables φ pour expliciter le sens de cette égalité (c'est une égalité entre fonctions de u et v).

$$\begin{aligned}\forall\,(u,v)\in U,\quad \Delta g(u,v)=2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\varphi(u,v)\big)+2(u+v)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)\\+(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\varphi(u,v)\big)\end{aligned}$$

❧ Tenons maintenant compte de l'hypothèse d'harmonicité pour g.

Comme φ réalise une **bijection** de U sur Ω, on en déduit que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2\big[u(x,y)+v(x,y)\big]\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$
$$+\big[u^2(x,y)+v^2(x,y)\big]\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Par définition de φ^{-1}, on a

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \left\{\begin{aligned} u(x,y)+v(x,y) &= x\\ u^2(x,y)+v^2(x,y) &= [u(x,y)+v(x,y)]^2-2u(x,y)v(x,y)\\ &= x^2-2y.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, la fonction f vérifie l'équation

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2x\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(x^2-2y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

sur l'ouvert Ω.

Solution 6 **16-06**

Les applications

$$[(x,y)\mapsto x]\,,\qquad \big[(x,y)\mapsto x^2+y^2\big]\quad\text{et}\quad \big[(x,y)\mapsto x^2-y^2\big]$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions *polynomiales*.

En tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^2\setminus\{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 & \longmapsto & \ell n(x^2+y^2)\end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$.

✍ *Toute partie finie est fermée, donc U est un ouvert (en tant que complémentaire d'un fermé).*

En tant que produit d'applications de classe $\mathscr{C}^\infty$, l'application f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

✍ *L'énoncé définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier : est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ou seulement sur U ?*

❧ Pour $M=(x,y)\neq O$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M)=2x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\ell n(x^2+y^2)\right],\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M)=2y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\ell n(x^2+y^2)\right].$$

Pour $M=O$, on a

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=h\,\ell n\,h^2\xrightarrow[h\to 0]{}0\qquad\text{et}\qquad \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=-h\,\ell n\,h^2\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O)=\frac{\partial f}{\partial y}(O)=0.$$

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

❧ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

✍ *Autrement dit : on passe en coordonnées polaires. De la sorte, le point M tend vers l'origine O si, et seulement si, le réel $r=\|\mathbf{OM}\|$ tend vers 0.*

D'après les expressions des dérivées partielles de f calculées plus haut,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M)-\frac{\partial f}{\partial x}(O)\right|=2r|\cos\theta|\,|2\,\ell n\,r+\cos 2\theta|\leqslant 2r+4r|\ell n\,r|$$

et de même

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M)-\frac{\partial f}{\partial y}(O)\right|\leqslant 2r+4r|\ell n\,r|.$$

On a trouvé un majorant *indépendant de* θ et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc on a démontré que les deux dérivées partielles de f étaient continues en O.

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier (théorème fondamental).

✍ *Si on sait bien appliquer la règle de la chaîne, on peut se contenter de ne calculer qu'une seule des deux dérivées partielles de* f. *Pour exploiter la forme de symétrie de* f, *on considère l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(x,y) = \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = (y,x).$$

On sait alors que

$$\partial_2\varphi_1(x,y) = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \qquad \partial_2\varphi_2(x,y) = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

et que

$$\forall\,(x,y)\in U, \quad f(x,y) = -(f\circ\varphi)(x,y).$$

Comme f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U *(démontré plus haut) et que* φ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* U *dans* U *(en tant qu'application linéaire injective définie sur un espace de dimension finie), on en déduit que la composée* $f\circ\varphi$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U *et que, pour tout* $M=(x,y)\in U$,

$$\begin{aligned}\partial_2 f(M) &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_1(M) - \partial_2 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_2(M)\\ &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec les notations habituelles (Leibniz)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

Solution 7 16-07

On note U, l'ouvert $[x\neq 0]$.

✍ *La partie* U *est l'image réciproque de l'ouvert* $\mathbb{R}^*$ *(= union de deux intervalles ouverts) par l'application continue* $[(x,y)\mapsto x]$, *donc c'est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$.

L'application polynomiale $\big[(x,y)\mapsto x^2\big]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'application

$$\begin{array}{rcccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & \cos y/x\end{array}$$

est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U en tant que composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

✍ *L'énoncé définit* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier : cette fonction est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *tout entier ?*

❧ Pour $M=(x,y)\in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -x\sin\frac{y}{x}.$$

Pour $M=(0,y)\in[x=0]$,

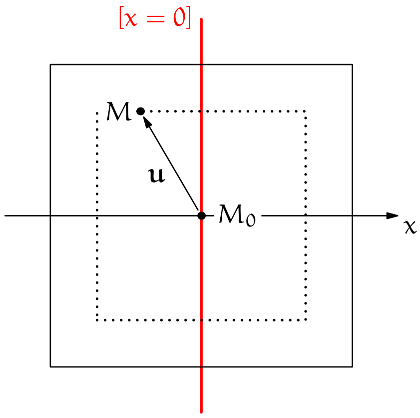
$$\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} = h\cos\frac{y}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \quad\text{et}\quad \frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = 0$$

donc les dérivées partielles de f sont bien définies sur $[x=0]$ et

$$\forall\,M\in[x=0], \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0.$$

❧ Nous allons étudier la continuité de $\partial f/\partial y$ en un point $M_0=(0,y_0)$. Nous allons mesurer les distances avec la norme produit : si $M=(x,y)$, alors

$$\mathbf{M_0M} = (x, y-y_0) \quad\text{et}\quad \|\mathbf{M_0M}\| = \max\big\{|x|, |y-y_0|\big\}.$$



D'après les calculs précédents,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right| = \left|-x\sin\frac{y}{x}\right| \leqslant |x| \leqslant \|\mathbf{M_0M}\|$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) \xrightarrow[M\to M_0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

Autrement dit : la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est continue en chaque point M_0 de l'axe $[x=0]$ et comme f est $\mathscr{C}^1$ sur U, on en déduit que $\partial f/\partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

❧ Nous allons maintenant étudier la continuité de $\partial f/\partial x$ en un point $M_0 = (0, y_0) \in [x=0]$ distinct de l'origine. En conservant les notations précédentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}.$$

Comme précédemment,

$$\left|2x\cos\frac{y}{x}\right| \leqslant 2\|\mathbf{M_0M}\|$$

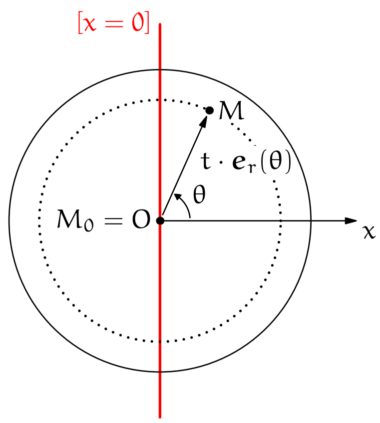
donc le premier terme tend bien vers 0 lorsque M tend vers M_0.

En revanche, lorsque M tend vers M_0, le quotient y/x est équivalent à y_0/x et tend donc vers $\pm\infty$ (selon le signe de y_0). Comme sin n'a pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$ et que y tend vers $y_0 \neq 0$, on en déduit que la variation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

n'a pas de limite lorsque M tend vers M_0 et donc que la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est pas continue en M_0.

❧ Enfin, nous allons étudier la continuité de $\partial f/\partial x$ à l'origine et pour cela, nous allons utiliser la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ (passer en polaires).



Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(O + t\cdot\mathbf{e}_r) - \frac{\partial f}{\partial x}(O)\right| \leqslant 2|x| + |y| \leqslant 3|t| \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ainsi, la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ est continue à l'origine.

❧ En conclusion, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ; la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier mais la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est continue en aucun point de l'axe $[x = 0]$ autre que l'origine.

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

✍ *Au voisinage de l'origine, avec* $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ *et* $h_x \neq 0$,

$$\left|f(O + \mathbf{h})\right| = h_x^2 \left|\cos \frac{h_y}{h_x}\right| \leqslant h_x^2 \leqslant \|\mathbf{h}\|^2$$

(qu'on choisisse la norme euclidienne canonique ou la norme produit). Il est clair que l'encadrement

$$\left|f(O + \mathbf{h})\right| \leqslant \|\mathbf{h}\|^2$$

est encore vrai si $h_x = 0$ *: il est donc vrai au voisinage de l'origine et on en déduit que*

$$f(O + \mathbf{h}) = \mathcal{O}\big(\|\mathbf{h}\|^2\big)$$

et donc que

$$f(O + \mathbf{h}) = f(O) + \omega(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

pour $\mathbf{h}$ *voisin de* 0. *La fonction* f *est donc différentiable à l'origine et l'application linéaire tangente à* f *en* O *est l'application nulle* ω *(ce dernier point étant prévu, puisque les deux dérivées partielles de* f *en* O *sont nulles).*

Solution 8 16-08

✍ *Pour justifier l'existence d'un extremum sur une partie qui n'est pas compacte, on peut quand même recourir à un argument de compacité.*

❧ La partie A sur laquelle la fonction f est définie est un rectangle infini :

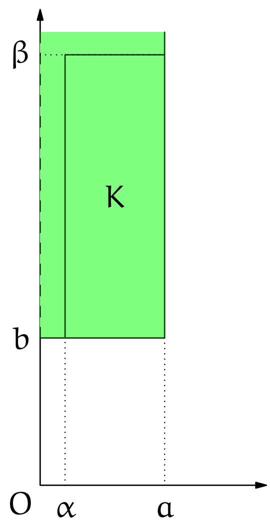
$$A = [0 < x \leqslant a] \cap [b \leqslant y] =]0, a] \times [b, +\infty[.$$

La partie A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point (a, b) appartient à A mais visiblement A n'est pas un voisinage de ce point.

La partie A n'est pas fermée non plus : la suite de terme général

$$M_n = \left(\frac{a}{n}, b\right)$$

est constituée de points de A, elle converge vers le point $M_\infty = (0, b)$, mais ce point n'appartient pas à A, donc A n'est pas stable par passage à la limite.



❧ La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur A (ni x, ni y ne s'annulent sur A), donc f est continue sur A.

❧ Pour $0 < \alpha < a$ et $\beta > b$, on peut définir une partie compacte

$$K = [\alpha, a] \times [b, \beta] \subset A.$$

(Il est clair que K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie.)

Sur ce compact, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes : il existe (au moins) deux points $P_0 \in K$ et $P_1 \in K$ tels que

$$\forall\, M \in K, \qquad f(P_1) \leqslant f(M) \leqslant f(P_0).$$

✍ *Le réel $f(P_0)$ est le maximum de la fonction f restreinte au compact K et le réel $f(P_1)$ est son minimum.*
Pour le moment, on peut choisir librement α et β. Il nous reste à voir comment bien *les choisir.*

► Soit $P = (x, y) \in A$, un point situé en dehors du compact K : on distingue deux cas.

— Ou bien $y > \beta$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geqslant y^2 > \beta y > 0 \\ \quad 0 < xy \leqslant ay, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x,y) \geqslant \frac{\beta}{a}.$$

— Ou bien $y \leqslant \beta$ et $0 < x < \alpha$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x+y)^2 \geqslant y^2 \geqslant b^2 \\ \quad 0 < xy < \beta x, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x,y) \geqslant \frac{b^2}{\beta x} \geqslant \frac{b^2}{\alpha\beta}.$$

► Comme $(a, b) \in A$, nous allons enfin prendre $f(a, b)$ comme valeur de référence.

On peut choisir β assez grand pour que

$$\frac{\beta}{a} \geqslant f(a,b)$$

et, maintenant que β est fixé, on peut choisir α assez proche de 0 pour que

$$\frac{b^2}{\alpha\beta} \geqslant f(a,b).$$

Pour un tel couple (α, β), on a démontré ci-dessus qu'il existait un point $P_1 \in K \subset A$ tel que

$$\forall\, M \in K, \quad f(M) \geqslant f(P_1)$$

et en particulier tel que $f(a, b) \geqslant f(P_1)$ (puisque $(a, b) \in K$). On a également démontré que

$$\forall\, M \in A \setminus K, \quad f(M) \geqslant f(a,b) \geqslant f(P_1).$$

Par conséquent, on a bien démontré que

$$\forall\, M \in A, \qquad f(M) \geqslant f(P_1)$$

c'est-à-dire que f atteint une valeur minimale sur A (égale à $f(P_1)$).

✍ *Et $f(P_1)$? Cette valeur maximale sur K est sans intérêt ! Lorsque x tend vers 0, la valeur de $f(x, b)$ tend vers $+\infty$, donc f n'est pas majorée sur A.*

Nous avons prouvé que f atteignait un minimum sur A. Allons-nous en rester là ? Ou au moins essayer de calculer la valeur de ce minimum ?

❧ **Première méthode.**

Il n'y a que deux possibilités : ou bien f atteint son minimum à l'intérieur de A, c'est-à-dire sur l'ouvert

$$A^\circ =]0, a[\times]b, +\infty[,$$

ou bien f atteint son minimum sur le bord de A, c'est-à-dire sur l'un des deux intervalles suivants :

$$H = \{(x, b),\ 0 < x \leqslant a\}, \qquad V = \{(a, y),\ b \leqslant y\}.$$

► [Premier cas] Si f atteint son minimum en un point P_1 de l'ouvert A°, alors le point P_1 est un point critique de f. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-y)(x+y)}{x^2 y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-x)(x+y)}{xy^2},$$

donc les points critiques de f sont les points de la médiatrice $[y = x]$.

Seulement voilà : la médiatrice ne rencontre pas A° ! En effet, si $(x, y) \in A^\circ$, alors $x < a \leqslant b < y$, donc $x < y$.

La fonction f n'a donc aucun point critique sur l'ouvert A° et, faute de point critique, elle n'atteint pas son minimum sur A°.

▶ [Second cas] La fonction f atteint donc son minimum sur l'intervalle horizontal H ou sur l'intervalle vertical V.
Pour tout $(x, y) \in H$, on a

$$0 < x \leqslant a \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(x, b) = \frac{x}{b} + 2 + \frac{b}{x}.$$

Une étude de fonction montre que le second membre est décroissant sur $]0, b]$ et croissant sur $[b, +\infty[$. Or $x \in]0, a] \subset]0, b]$, donc

$$\min_{(x,y)\in H} f(x, y) = f(a, b).$$

De même, pour tout $(x, y) \in V$, on a

$$b \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(a, y) = \frac{a}{y} + 2 + \frac{y}{a}.$$

C'est la même chose ! Et comme $y \in [b, +\infty[\subset [a, +\infty[$, on en déduit que

$$\min_{(x,y)\in V} f(x, y) = f(a, b).$$

Conclusion : On connaît la valeur minimale de f

$$\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = f(a, b)$$

et le raisonnement précédent nous assure aussi que cette valeur n'est atteinte qu'au seul point (a, b) (*minimum global strict*).

❧ **Deuxième méthode.**
On peut aussi appliquer la méthode des crêtes puisque f est définie sur un rectangle.

▶ [Balayage en y] On fixe $0 < x_0 \leqslant a$ et on étudie les variations de la fonction

$$\left[y \mapsto f(x_0, y) = \frac{x_0}{y} + 2 + \frac{y}{x_0}\right]$$

sur l'intervalle $[b, +\infty[$. C'est déjà fait ! Comme

$$y \in [b, +\infty[\subset [x_0, +\infty[\,,$$

on sait que

$$\forall\, 0 < x_0 \leqslant a, \quad \min_{y \geqslant b} f(x_0, y) = f(x_0, b).$$

▶ [Balayage en x] Il reste à étudier les variations de

$$[x \mapsto f(x, b)]$$

sur l'intervalle $]0, a]$ et c'est déjà fait. Comme

$$x \in]0, a] \subset]0, b]\,,$$

on sait que

$$\min_{0<x\leqslant a} f(x, b) = f(a, b).$$

Par conséquent,

$$\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = \min_{0<x\leqslant a} \left[\min_{y\geqslant b} f(x, y)\right] = f(a, b).$$

Solution 9 **16-09**

1.

✍ *Tout est dans l'analyse du problème ! Il faut ici comprendre que $f(x, y)$ est une fonction **affine** de x et se souvenir que les deux coefficients d'une fonction affine sont déterminés par la donnée de deux points du graphe.*

▶ Soient donc $a < x_1 < x_2 < b$. On sait alors que

$$\forall\, y \in]c, d[\,, \quad \begin{cases} f(x_1, y) &= g(y) + x_1 h(y) \\ f(x_2, y) &= g(y) + x_2 h(y) \end{cases}$$

et comme $x_2 - x_1 \neq 0$,

$$\forall\, y \in]c,d[, \quad \begin{cases} h(y) = \dfrac{f(x_2,y)-f(x_1,y)}{x_2-x_1} & \text{pente} \\[2ex] g(y) = \dfrac{x_2 f(x_1,y) - x_1 f(x_2,y)}{x_2-x_1}. & \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Ainsi les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ en tant que combinaisons linéaires de $[y \mapsto f(x_1,y)]$ et de $[y \mapsto f(x_2,y)]$, qui sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

$$\begin{array}{ccccc}]c,d[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & \Omega & \xrightarrow{f\in\mathscr{C}^2(\Omega)} & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x_0,y) & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array}$$

2. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ et on pose

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

❧ La fonction $[(x,y)\mapsto x]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω (application linéaire sur $\mathbb{R}^2$). Les fonctions $[(x,y)\mapsto g(y)]$ et $[(x,y)\mapsto h(y)]$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c,d[& \xrightarrow{\varphi\in\mathscr{C}^2(]x,d[)} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

Par produit et somme (dans cet ordre), la fonction f est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

✍ *Il n'y a aucun calcul compliqué ici ! Mais il y a quand même une vraie difficulté théorique : il est crucial de tenir compte que f est une fonction de deux variables (c'est-à-dire une **fonction du couple** (x,y) en fait) et qu'il faut justifier la **régularité de** f **en tant que fonction de deux variables*** — et surtout pas en examinant la régularité selon x et selon y séparément.

Cela dit, on vérifie facilement que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y) \quad \text{et donc que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0.$$

❧ Réciproquement, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0.$$

► Fixons $y_0 \in]c,d[$. La fonction

$$[x \mapsto f(x,y_0)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]a,b[$ comme composée :

$$x \longmapsto (x,y_0) \longmapsto f(x,y_0)$$

et que cette fonction est affine (puisque sa dérivée seconde est identiquement nulle sur un *intervalle*). Il existe donc deux constantes réelles, qui dépendent *a priori* de l'ordonnée y_0 choisie et qu'on note donc $g(y_0)$ et $h(y_0)$, telles que

$$\forall\, x \in]a,b[, \quad f(x,y_0) = xg(y_0) + h(y_0).$$

► On a ainsi défini deux fonctions $g, h :]c,d[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

D'après la question précédente, ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

3. On applique exactement la même méthode.

❧ On suppose qu'il existe deux fonctions $g \in \mathscr{C}^2(]a,b[)$ et $h \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega, \qquad f(x,y) = g(x) + h(y).$$

▷ La fonction f ainsi définie est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]a,b[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c,d[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & h(y) \end{array}$$

✍ *On voit une fois de plus sur ce diagramme sagittal qu'il est toujours possible de considérer une fonction d'*une *variable comme s'il s'agissait d'une fonction de* deux *variables...*

Pour une fonction de plusieurs variables*, il est vraiment nécessaire de faire un diagramme sagittal avant de s'en servir. (Pardon !)*

▷ Le calcul des dérivées partielles est sans mystère.

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g'(x)\quad\text{et donc}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial[g'(x)]}{\partial y}(x,y)=0$$

Ceux qui ne font pas confiance au Théorème de Schwarz peuvent recommencer.

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=h'(y)\quad\text{et donc}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial[h'(y)]}{\partial x}(x,y)=0$$

❧ Réciproquement, supposons que f soit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0.$$

▷ Cela signifie que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x,y)=0.$$

On sait dans ce cas qu'il existe une fonction $\eta=\eta(y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c,d[$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\eta(y).$$

▷ Pour tout $x_0\in\,]a,b[$, la fonction $[y\mapsto f(x_0,y)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]c,d[$ (propriété maintenant très classique). D'après le Théorème fondamental du calcul intégral,

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y_0)\in\Omega,\ \forall\,y\in\,]c,d[,\quad f(x,y)&=f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)\,dz\\ &=f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\eta(z)\,dz\end{aligned}$$

et donc, pour un $c<y_0<d$ arbitrairement choisi,

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad f(x,y)=f(x,y_0)+H_0(y)$$

où H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ en tant que primitive de $\eta\in\mathscr{C}^1(]c,d[)$ et $[x\mapsto f(x,y_0)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a,b[$ en tant que composée de $[x\mapsto(x,y_0)]$ par f (qui sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^2$).