# Topologie

## Exercice 1 — 18-01

Soit $E$, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$.

**1.** Un sous-espace vectoriel $F$ qui contient une boule ouverte $B_o(x_0, r)$ contient aussi la boule ouverte $B_o(0_E, r)$.

**2.** L'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de $E$ est vide.

## Exercice 2 — 18-02

Soit $f$, une forme linéaire sur $E$.

**1.** Si $f$ n'est pas continue, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $0_E$ telle que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2.** La forme linéaire $f$ est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

## Exercice 3 — 18-03

Soient $E$, un espace préhilbertien et $F$, un sous-espace vectoriel de $E$.

**1.** L'orthogonal de $F$ est un sous-espace fermé.

**2.** Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale sur $F$ est continue et le sous-espace $F$ est un fermé de $E$.

**3.** Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.

**4.** Si la dimension de $F$ est infinie, il se peut que $F$ ne soit pas fermé, mais $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ et

$$F \oplus F^\perp = F \oplus (\overline{F})^\perp \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp \subset E.$$

## Exercice 4 — 18-04

**1.** Soit $H$, un hyperplan de $E$.

**1. a.** L'adhérence $\overline{H}$ de $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $H \subset \overline{H} \subset E$.

**1. b.** Si $a \in \overline{H} \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

**2.** Un hyperplan de $E$ est une partie fermée ou une partie dense dans $E$.

**3.** Soit $f$, une forme linéaire non nulle sur $E$. L'application $f$ est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

**4.** On suppose maintenant que la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue.

**4. a.** Les images réciproques $[f > 0]$ et $[f < 0]$ sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion $[f \neq 0]$ est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

**4. b.**

$$\forall\, x \in E, \quad d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

## Exercice 5 — 18-05

On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et de période $2\pi$ de la norme de convergence en moyenne quadratique sur $I = [0, 2\pi]$.

**1. a.** La suite de terme général $f_n = [t \mapsto \cos nt]$ est bornée.

**1. b.** Si $n$ et $p$ sont deux entiers non nuls et distincts, alors $\|f_n - f_p\| = 1$ et on ne peut extraire aucune suite convergente de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2.** La boule unité de $E$ est une partie fermée et bornée qui n'est pas compacte.

## Exercice 6 — 18-06

**1.** Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

**1. a.** Le diamètre de la boule fermée $B_f(a, r)$, le diamètre de la boule ouverte $B_o(a, r)$ et le diamètre de la sphère $S(a, r)$ de centre $a$ et de rayon $r$ sont tous les trois égaux à $2r$.

**1. b.** La boule ouverte $B_o(a, r)$ et la boule fermée $B_f(a, r)$ sont des parties convexes de $E$.

**2.** Soit $a$ et $b$, deux points de $E$ et $0 < s \leqslant r$.

**2. a.** La boule ouverte $B_o(b, s)$ est contenue dans la boule ouverte $B_o(a, r)$ si, et seulement si,

$$\|b - a\| \leqslant r - s.$$

**2. b.** Les boules ouvertes $B_o(a, r)$ et $B_o(b, s)$ sont disjointes si, et seulement si, $\|b - a\| \geqslant r + s$.

## Exercice 7 — 18-07

**1.** Représenter un cercle (resp. un carré) comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

**2.** Représenter un disque comme l'image directe d'un carré $[a, b] \times [c, d]$ par une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

**3.** Représenter le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

## Exercice 8 — 18-08

Par définition, un point $x \in E$ est adhérent à la partie $A$ si, et seulement si,

$$\forall\, r > 0, \qquad A \cap B(x, r) \neq \varnothing.$$

Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le point $x$ est adhérent à la partie $A$ de $E$.
2. Il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.
3. La distance de $x$ à $A$ est nulle : $d(x, A) = 0$.

## Exercice 9 — 18-09

**1.** L'adhérence de $A$ est un fermé qui contient $A$.

**2.** Tout fermé $F$ qui contient $A$ contient aussi l'adhérence de $A$ :

$$A \subset F \implies \overline{A} \subset F.$$

## Exercice 10 — 18-10

L'intérieur d'une partie $A$ est un ouvert contenu dans $A$ et tout ouvert $G$ contenu dans $A$ est aussi contenu dans l'intérieur de A :

$$G \subset A \implies G \subset A^\circ.$$

**Exercice 11** **18-11**

Pour toute partie A,

$$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ \quad \text{et} \quad (A^\circ)^c = \overline{(A^c)}.$$

**Exercice 12** **18-12**

Soit K, un compact non vide de E.

**1.** Pour tout $x \in E$,

$$d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y).$$

**2.** Si $K'$ est un compact disjoint de K, alors $d(K, K') > 0$.

**3.** L'axe des abscisses et le graphe de exp sont des fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, mais la distance qui les sépare est nulle.

**Exercice 13** **18-13**

Soient A, un compact et B, un fermé de E.

**1.** La partie

$$A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}$$

est un fermé de E.

**2.** Si B est compact, alors $A + B$ est compact.

**Exercice 14** **18-14**

**1.** Si K est un compact de E qui ne contient pas le vecteur nul, alors le cône positif

$$F = \{\lambda x,\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K\}$$

est un fermé de E.

**2.** La partie $K = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1]$ est bien compacte mais la partie $F = [x_1 > 0] \cup \{(0, 0)\}$ n'est pas fermée.

**Exercice 15** **18-15**

Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, une application continue. Si $K \subset E$ est une partie compacte de E, alors son image $f_*(K)$ est une partie compacte de F.

**Exercice 16** **18-16**

Si $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est une application continue, alors sa restriction à une partie compacte de E est uniformément continue.

**Exercice 17** **18-17**

Si $f : E \to F$ est une application continue et bornée, alors

$$\sup_{x \in A} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in \overline{A}} \|f(x)\|_F$$

pour toute partie $A \subset E$.

**Exercice 18** **18-18**

Soit f, une application linéaire de E dans F.

**1.** Si f est continue, alors

$$A = \{x \in E : \|f(x)\|_F = 1\}$$

est un fermé de E.

**2. a.** Si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui tend vers $0_E$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors l'application f est continue.

**2. b.** Si f n'est pas continue, alors A n'est pas fermée.

**Exercice 19** **18-19**

Soient u et v, deux endomorphismes continus de E. S'il existe un scalaire $\alpha$ tel que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha I_E,$$

alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n$$

et si v n'est pas nilpotent, alors $\alpha = 0$.

**Exercice 20** **18-20**

Soit K, un compact contenu dans un ouvert U de E.

**1.**

$$\forall\, x \in K,\ \exists\, \alpha > 0, \quad B_o(x, \alpha) \subset U.$$

**2.** La fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ est continue sur le compact K et ne s'annule pas, donc

$$\exists\, \alpha_0 > 0,\ \forall\, x \in K, \quad B_o(x, \alpha_0) \subset U.$$

**Exercice 21** **18-21**

Soit E, un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2. On note S, la sphère unité de E.

**1.** Soit $a \in S$.

**1. a.** Si $b \in S$ est différent de $-a$, alors la fonction

$$t \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$$

est continue de $[0, 1]$ dans S.

**2.** La sphère unité S est connexe par arcs.

**3.** Le complémentaire de la boule unité fermée est connexe par arcs.

**4.** Dans $\mathbb{R}^2$, le complémentaire d'un ensemble fini est connexe par arcs.

**Exercice 22** **18-22**

Si $f : E \to F$ est une application uniformément continue, alors il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in E, \qquad \|f(x)\|_F \leqslant a\|x\|_E + b.$$

En particulier, $\|f(x)\|_F = \mathcal{O}(\|x\|_E)$ au voisinage de l'infini.

**Exercice 23** **18-23**

Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, une application continue.

**1.** Démontrer que

$$g(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} f(x, y)$$

est bien défini pour tout $x \in [0, 1]$.

**2.** Démontrer que g est continue sur $[0, 1]$.

### Exercice 24 18-24

Soit

$$V = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A.A^\top.A = A\}.$$

**1.** Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V.
**2.** Que dire des matrices inversibles $A \in V$ ?
**3.** Le groupe orthogonal est ouvert et fermé pour la topologie relative à V.

### Exercice 25 18-25

Le plan $\mathbb{R}^2$ est ici muni de la norme euclidienne canonique.
**1.** Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tend vers $\ell$ au voisinage de $(x_0, y_0)$ si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varphi : ]0, \alpha[ \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que

$$\forall (r, \theta) \in ]0, \alpha[\times\mathbb{R}, \quad \big|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-\ell\big| \leqslant \varphi(r).$$

**2.** Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad \frac{2x^3+3y^3}{2x^2+y^2}, \qquad \frac{xy^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

tendent vers 0 au voisinage de $(0, 0)$.
**3.** Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0, 0)$.

### Exercice 26 18-26

Soient U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. La fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y, t)\, dt$$

est continue sur U.

### Exercice 27 18-27

Soient I et J, deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On considère $U = I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = I \times I \times J$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors la fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y, z) = \int_x^y f(t, z)\, dt$$

est continue.

### Exercice 28 18-28

**1.** L'expression $(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
**2.** L'expression $x^4 + y^2$ tend vers $+\infty$ et le quotient

$$\frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4}$$

tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
**3.** L'expression $x^2 \ell n(x^4 + y^2)$ n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.
**4.** L'expression $x^2y+y\,\ell n^2 y$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.
**5.** Si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$, alors $q(M)$ tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^3$.

### Exercice 29 18-29

L'expression

$$\frac{xy}{x^4+y^4}$$

n'est pas bornée, mais ne tend pas vers l'infini au voisinage de l'origine.

### Exercice 30 18-30

On étudie au voisinage de $(0, 0)$ la fonction f définie par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$$

**1.** Pour $\mathbf{h}$ voisin de l'origine, $f(\mathbf{h}) = \mathcal{O}(\mathbf{h})$.
**2.** Si $\varphi$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(\mathbf{h}) \sim \varphi(\mathbf{h})$ au voisinage de $(0, 0)$, alors

$$\forall\, \mathbf{h} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mathbf{h}) = x - y.$$

La différence $f(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{h})$ est dominée par $\mathbf{h}$, mais pas négligeable devant $\mathbf{h}$.

### Exercice 31 18-31

L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de la norme définie par

$$\|aX^2 + bX + c\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

**1.** L'ensemble U des polynômes de degré 2 est un ouvert de E, qui est dense dans E mais pas connexe par arcs.
**2. a.** Le discriminant $\Delta : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
**2. b.** La partie $F = \big[\Delta(P) = 0\big]$ est un fermé relatif à U qui n'est pas un fermé de E.
**2. c.** Si V est un voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$, alors $V \cap F^c \neq \varnothing$.

### Exercice 32 18-32

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \left| \begin{array}{ll} f'(x) & \text{si } x = y, \\ \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y. \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\, dt.$$

**Solution 1** **18-01**

**1.** Supposons que la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ soit contenue dans $F$ :

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - x_0\| < r \implies x \in F.$$

Considérons maintenant un vecteur $y$ de la boule ouverte centrée à l'origine $B_o(0_E, r)$ : comme $\|y\| < r$, alors

$$\big\|(x_0 + y) - x_0\big\| = \|y\| < r$$

donc $x_0 + y \in B_o(x_0, r) \subset F$. Comme $F$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc

$$y = \underbrace{(x_0 + y)}_{\in F} - \underbrace{x_0}_{\in F} \in F.$$

Par conséquent, la boule ouverte $B_o(0_E, r)$ est contenue dans $F$.

**2.** Soit $F$, un sous-espace vectoriel strict de $E$ : on a donc $F \subsetneq E$.

Supposons que l'intérieur de $F$ ne soit pas vide. Il existe alors un vecteur $x_0$ dans l'intérieur de $F$ et, par définition de l'intérieur, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ soit contenue dans $F$.

D'après la question précédente, la boule ouverte $B_o(0_E, r)$ est contenue dans $F$.

Le vecteur nul $0_E$ appartient à $F$ (puisque $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$).

Si $x \in E$ n'est pas le vecteur nul, alors

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \cdot \Big(\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\Big).$$

La norme du vecteur $(r/2\|x\|) \cdot x$ est égale à $r/2 < r$, donc ce vecteur appartient à $F$ et comme $F$ est un sous-espace vectoriel, $x \in F$.

✍ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. En particulier, si $u \in F$, alors $\lambda \cdot u \in F$ pour tout scalaire $\lambda$.*

On a ainsi démontré que tout vecteur $x \in E$, nul ou non nul, appartenait à $F$, donc $F = E$.

**Solution 2** **18-02**

**1.**

✍ *On sait qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la sphère unité.*

Si $f$ n'est pas continue, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires telle que la suite (réelle) $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \big|f(u_{\varphi(k)})\big| = +\infty.$$

Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est strictement positive à partir d'un certain rang. On peut donc poser

$$x_k = \frac{1}{f(u_{\varphi(k)})} \cdot u_{\varphi(k)}.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\|x_k\| = \frac{u_{\varphi(k)}}{\big|f(u_{\varphi(k)})\big|} = \frac{1}{\big|f(u_{\varphi(k)})\big|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et par linéarité de $f$,

$$f(x_k) = \frac{f(u_{\varphi(k)})}{f(u_{\varphi(k)})} = 1.$$

**2.** Si la forme linéaire $f$ est continue, alors son noyau est fermé en tant qu'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue.

✍ *Dans tout espace vectoriel normé, les singletons sont des parties fermées.*

❧ Réciproquement, si $f$ n'est pas continue, on peut considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $0$ alors que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par linéarité de $f$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n - x_0) = 0$$

donc $y_n = x_n - x_0$ appartient au noyau de $f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-x_0$ :

$$\|y_n - (-x_0)\| = \|(x_n - x_0) + x_0\| = \|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais $-x_0$ n'appartient pas au noyau de $f$ :

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -1 \neq 0.$$

Le noyau de $f$ n'est donc pas stable par passage à la limite, ce qui signifie qu'il n'est pas fermé.

✍ *Le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle est un hyperplan de $E$. Comme l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel, on a donc ici :*

$$\operatorname{Ker} f \subset \overline{\operatorname{Ker} f} \subset E.$$

*Comme $\operatorname{Ker} f$ est un <u>hyperplan</u>, il n'y a donc que deux possibilités, mutuellement exclusives :*

— *ou bien $\operatorname{Ker} f = \overline{\operatorname{Ker} f} \subsetneq E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est fermé, c'est le cas où $f$ est continue ;*

— *ou bien $\operatorname{Ker} f \subsetneq \overline{\operatorname{Ker} f} = E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est dense dans $E$, c'est le cas où $f$ n'est pas continue.*

*Il est difficile de se représenter géométriquement cette alternative, car en dimension finie, seul le premier cas a lieu.*

## Solution 3 — 18-03

**1.** D'après la définition,

$$y \in F^\perp \iff \forall\, x \in F, \quad y \perp x$$

ce qui nous donne l'égalité

$$F^\perp = \bigcap_{x\in F} (\mathbb{R}\cdot x)^\perp.$$

❧ Or l'orthogonal d'un vecteur

$$(\mathbb{R}\cdot x)^\perp = \big[\,\langle\, x \,|\, y\,\rangle = 0\big]$$

est l'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application

$$[y \mapsto \langle\, x \,|\, y\,\rangle] \,:\, E \to \mathbb{R}$$

et cette application <u>linéaire</u> est une fonction <u>continue</u> de $y$ puisque

$$\forall\, y \in E, \quad \big|\langle\, x \,|\, y\,\rangle\big| \leqslant \underbrace{\|x\|}_{\text{Cte}}\ \|y\|.$$

✍ *Oui ! C'est bel et bien l'inégalité de Schwarz !*

❧ Donc $(\mathbb{R}\cdot x)^\perp$ est une partie fermée de $E$ pour tout $x \in F$ et $F^\perp$ est donc un fermé de $E$, en tant qu'intersection de fermés.

**2.** Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale $p$ sur $F$ est bien définie, de même que la projection orthogonale $q$ sur $F^\perp$ et $p + q = I_E$.

D'après le Théorème de Pythagore,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| + \big\|x - p(x)\big\| = \big\|p(x)\big\| + \big\|q(x)\big\| = \|x\|,$$

ce qui prouve que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\| \qquad \text{et que} \qquad \forall\, x \in E, \quad \big\|q(x)\big\| \leqslant \|x\|.$$

Comme $p$ et $q$ sont des applications linéaires, cela prouve que ce sont des applications continues.

✍ *Cela prouve aussi que $|||p||| \leqslant 1$ et que $|||q||| \leqslant 1$.*

*Si $F$ et $F^\perp$ ne sont pas réduits au vecteur nul (ce qui est le cas la plupart du temps), alors $|||p||| = 1$ (puisque $p(x) = x$ pour tout $x \in F$) et $|||q||| = 1$ (puisque $q(x) = x$ pour tout $x \in F^\perp$).*

❧ La projection orthogonale $q$ est la projection sur $F^\perp$ parallèlement à $F$, donc $F = \operatorname{Ker} q$. En tant qu'image réciproque d'une partie fermée (le singleton $\{0_E\}$) par une application continue (la projection $q$), le sous-espace $F$ est donc fermé.

✍ *La projection orthogonale $p$ est la projection sur $F$ parallèlement à $F^{\perp}$, donc $F^{\perp} = \operatorname{Ker} p$ est également une partie fermée de $E$.*

**3.** Dans un espace préhilbertien, tout sous-espace de dimension finie possède une base orthonormée et, de ce fait, la projection orthogonale $p$ sur $F$ est bien définie. Par conséquent, $E = F \oplus F^{\perp}$ et on déduit de la question précédente que le sous-espace $F$ est fermé.

**4.** Pour toute partie $F$ de $E$, on sait que $F \subset \overline{F}$ et donc que $(\overline{F})^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Réciproquement, soit $x \in F^{\perp}$. Par définition,

$$\forall\, y \in F, \qquad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0.$$

Considérons maintenant un vecteur $z \in \overline{F}$. Il existe, par définition de l'adhérence, une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $F$ qui converge vers $z$. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle\, x \,|\, z \,\rangle - \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle\big| = \big|\langle\, x \,|\, z - y_n \,\rangle\big| \leqslant \|x\|\, \|z - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$\langle\, x \,|\, z \,\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle\, x \,|\, y_n \,\rangle = 0$$

puisque les $y_n$ sont, par hypothèse, orthogonaux à $x$. On vient de prouver que $x$ était orthogonal à $\overline{F}$.

Par double inclusion,

$$F^{\perp} = (\overline{F})^{\perp}$$

et donc $F \oplus F^{\perp} = F \oplus (\overline{F})^{\perp}$.

❧ Comme $F$ est un sous-espace de $\overline{F}$, on en déduit que

$$F \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp} \subset E.$$

✍ *Si $E$ est un espace préhilbertien complet (c'est-à-dire un **espace de Hilbert**), on peut démontrer que $F \oplus F^{\perp} = E$ pour tout sous-espace fermé $F$.*

## Solution 4 — 18-04

✍ *Commençons par rappeler les propriétés qu'il faut absolument connaître sur les hyperplans.*

*Soit $H$, une partie d'un espace vectoriel $E$ (de dimension quelconque).*

❧ ***Première caractérisation** — La partie $H$ est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{K})$ non identiquement nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$.*

*En dimension finie, l'hyperplan $H$ est alors représenté par une équation cartésienne :*

$$H = \big[f(x_1, \dots, x_n) = 0\big]$$

*dans le cas $\dim E = n$.*

*Une telle forme linéaire n'est pas unique mais presque : si $H = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, alors il existe un scalaire $\alpha$ non nul tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = \alpha g(x).$$

❧ ***Deuxième caractérisation** — La partie $H$ est un hyperplan si, et seulement si, il existe un vecteur $a \neq 0_E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.*

❧ ***Choix d'un supplémentaire** — Si $H$ est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ quel que soit le vecteur $a \in E \setminus H$.*

❧ ***Lien entre supplémentaire et forme linéaire** — Si l'hyperplan $H \subset E$ est le noyau de la forme linéaire $f$, alors il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et, quel que soit $x \in E$, il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_H + \lambda \cdot a$. Par linéarité de $f$, on en déduit que*

$$x = x_H + f(x) \cdot a.$$

**1. a.** Quelle que soit la partie $H$ de $E$, on a toujours : $H \subset \overline{H} \subset E$.

❧ L'adhérence $\overline{H}$ est, par définition, contenue dans l'espace vectoriel $E$. Le vecteur nul $0_E$ appartient au sous-espace $H$ et par conséquent à $\overline{H}$. Enfin, $\overline{H}$ est stable par combinaison linéaire (propriété dite "linéarité de la limite"). Par conséquent, l'adhérence $\overline{H}$ est encore un sous-espace de $E$.

✍ *L'adhérence de tout sous-espace de $E$ est encore un sous-espace de $E$.*

**1. b.** Soit $a \in \overline{H} \setminus H$ (en admettant qu'un tel vecteur existe). Comme $a \notin H$ et que $H$ est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

❧ D'autre part, $H \subset \overline{H}$ (quelle que soit la partie $H$ de $E$, sous-espace vectoriel ou non) et comme $a \in \overline{H}$, alors $\mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

✍ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire !*

Comme $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $H$ et $\mathbb{K} \cdot a$, il contient la somme $H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

✍ *Un sous-espace vectoriel qui contient à la fois $H$ et $\mathbb{K} \cdot a$ contient nécessairement la somme $H + \mathbb{K} \cdot a$.*

**2.** On distingue alors deux cas.
❧ Si $H = \overline{H}$, alors $H$ est fermé.

✍ *L'adhérence d'une partie est toujours fermée !*

❧ Sinon $H \subsetneq \overline{H}$, donc il existe un vecteur $a \in \overline{H} \setminus H$ et $E \subset \overline{H}$ d'après la question précédente.
Dans ce cas, $\overline{H} = E$ — autrement dit : $H$ est dense dans $E$.

✍ *Il n'y a donc que deux possibilités :*
— *ou bien un hyperplan est fermé (ce qui est toujours le cas si la dimension de $E$ est finie) ;*
— *ou bien il est dense dans $E$.*

**3.** Si la forme linéaire $f$ est continue, alors son noyau est fermé.

✍ *L'image réciproque $\operatorname{Ker} f = [f(x) = 0]$ du fermé $\{0\}$ par une application continue $f : E \to \mathbb{K}$ est fermée.*

❧ Réciproquement, si la forme linéaire $f$ n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de $0_E$ (Théorème de caractérisation des applications linéaires continues). Il existe donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur nul et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|f(u_n)\right| = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout entier $n$ assez grand, le scalaire $f(u_n)$ n'est pas nul :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0, \qquad f(u_n) \neq 0.$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{f(u_n)} \quad \text{et on remarque que} \quad f(v_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|}.$$

Par hypothèse, le numérateur tend vers $0$ et le dénominateur vers $+\infty$, donc la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers le vecteur nul $0_E$.

Cela dit, par linéarité de $f$,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad v_n - v_{n_0} \in \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(v_n - v_{n_0}) = f(v_n) - f(v_{n_0}) = 1 - 1 = 0$ et comme $v_n$ converge vers $0_E$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - v_{n_0} = -v_{n_0} \notin \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(-v_{n_0}) = -f(v_{n_0}) = -1$.

On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker} f$ n'était pas fermé (ce sous-espace n'est pas stable par passage à la limite).

✍ *Cette alternative démontre que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, la forme linéaire est continue.*

**4. a.** Si la forme linéaire $f$ est continue, alors les trois parties

$$[f(x) > 0] = \big[f(x) \in\, ]0, +\infty[\big], \quad [f(x) < 0] = \big[f(x) \in\, ]-\infty, 0[\big], \quad [f(x) \neq 0] = \big[f(x) \in \{0\}\big]^c$$

sont des ouverts de $E$.

✍ *L'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue est ouverte.*
*L'image réciproque d'un intervalle fermé par une application continue est fermée.*
*Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.*

❧ La partie $P_+ = [f(x) > 0]$ est convexe : si deux vecteurs $x_1$ et $x_2$ appartiennent à $P_+$, alors $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$ ; quel que soit $t \in [0,1]$, on a donc

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) > 0$$

ce qui prouve que $(1-t)x_1 + tx_2 \in P_+$.

✍ *Pour $0 < t < 1$, l'expression $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ est la somme de deux termes strictement positifs.*
*Pour $t = 0$, il reste $f(x_1) > 0$ (par hypothèse) ; pour $t = 1$, il reste $f(x_2) > 0$ (par hypothèse aussi).*

Toute partie convexe est connexe par arcs, donc $P_+$ est connexe par arcs.
Il est clair que la même démonstration prouve que $P_- = [f(x) < 0]$ est convexe et donc connexe par arcs.

✍ *On n'a pas eu besoin de la continuité de f pour conclure.*

❧ Comme $f$ n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et comme $f$ est linéaire, $f(-x_0) = -f(x_0)$.
Si $f$ est continue sur $E$ et s'il existe une fonction continue

$$\gamma : [0,1] \to E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} & \gamma(0) = x_0 \\ & \gamma(1) = -x_0 \\ \forall\, t \in [0,1], & \gamma(t) \in P_+ \sqcup P_= H^c \end{cases}$$

alors $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme

$$(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad (f \circ \gamma)(1) = -f(x_0),$$

la fonction $f \circ \gamma$ change de signe et il existe donc un réel $t_1 \in [0,1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_1) = 0$, ce qui signifie que $\gamma(t_1) \in H$ : c'est impossible par hypothèse.
Par conséquent, si la forme linéaire $f \in L(E,\mathbb{R})$ est continue sans être identiquement nulle, alors $[f(x) \neq 0]$ est ouvert mais pas connexe par arcs.

**4. b.**

✍ *Dans la suite, l'hyperplan $H = \operatorname{Ker} f$ est supposé fermé.*
*D'après le cours,*

$$\begin{aligned} d(x,H) = 0 &\iff x \in \overline{H} && \text{(cours !)} \\ &\iff x \in H && \text{(H est fermé)} \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

*La propriété a établir est évidente dans ce cas (très) particulier.*
*Nous supposerons par la suite que $x \notin \operatorname{Ker} f$ et (donc !) que $d(x,H) > 0$.*

❧ **Version euclidienne**
On suppose ici que $E$ est un espace euclidien. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire $a$ tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot a.$$

Comme $x \notin H$, le vecteur $x$ n'est pas le vecteur nul et il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $t \neq 0$ tels que $x = x_H + t \cdot a$. Comme $a$ est orthogonal à $H$, on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\| = |t| \sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}.$$

Par linéarité de $f$, on a $f(x) = t \cdot f(a)$ (puisque $H = \operatorname{Ker} f$) et par conséquent, comme $x \neq 0_E$,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\sqrt{1 + \dfrac{\|x_H\|^2}{t^2}}} \leqslant |f(a)|.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in E \setminus H, \quad |f(x)| \leqslant |f(a)| \cdot \|x\|.$$

Il est clair que cette propriété est encore vraie pour $x \in H = \operatorname{Ker} f$. Nous avons ainsi démontré que $f \in L(E, \mathbb{R})$ était une application continue (ce qui n'est pas une surprise) et que

$$|||f||| \leqslant \big|f(a)\big|.$$

Par ailleurs, comme $a$ est un vecteur unitaire,

$$\big|f(a)\big| \leqslant \big|f(a)\big| \cdot \|a\|$$

et ce cas d'égalité prouve que

$$|||f||| = \big|f(a)\big|.$$

D'autre part, comme $x = x_H + t \cdot a$ où $x_H \in H$ et $a \in H^\perp$, on déduit du cours que $d(x, \operatorname{Ker} f) = \|t \cdot a\| = |t|$ (puisque le vecteur $a$ est unitaire). D'après les calculs précédents,

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = |t| = \frac{\big|f(x)\big|}{\big|f(a)\big|} = \frac{\big|f(x)\big|}{|||f|||}.$$

✍ *La propriété que nous venons de démontrer est vraie en dehors du cadre des espaces euclidiens.*

❧ **Version générale**

Nous supposons toujours que $x \notin H = \overline{H}$ et donc que $f(x) \neq 0$ et que $d(x, H) > 0$.

❧ Comme $x \notin H$ et que $H$ est un hyperplan, on a $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot x$. Pour tout vecteur $y \notin H$ non nul, il existe donc un vecteur $y_H \in H$ et un scalaire $t \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_H + t \cdot x$.

✍ *On a choisi $y$ en dehors du sous-espace vectoriel $H$. Comme $0_E \in H$, on en déduit que $y \neq 0_E$.*

Comme $y \neq 0_E$, le scalaire $t$ n'est pas nul ! On en déduit comme plus haut que

$$\big|f(y)\big| = |t| \cdot \big|f(x)\big| \quad \text{et que} \quad \|y\| = \|y_H + t \cdot x\| = |t| \cdot \left\|x + \frac{1}{t} \cdot y_H\right\|$$

Comme $1/t \cdot y_H \in H$, on en déduit que

$$\|y\| \geqslant |t| \inf_{u \in H} \|x + u\| = d(x, H).$$

✍ *Un espace vectoriel est stable par changement de signe, donc*

$$\inf_{u \in H} \|x + u\| = \inf_{u \in H} \|x - u\| = d(x, H).$$

Ayant majoré le numérateur et minoré le dénominateur, on en déduit que

$$\forall\, y \in E \setminus H, \quad \frac{\big|f(y)\big|}{\|y\|} \leqslant \frac{\big|f(x)\big|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

Le membre de gauche est nul pour tout $y \in H \setminus \{0_E\}$, donc

$$\forall\, y \neq 0_E, \quad \frac{\big|f(y)\big|}{\|y\|} \leqslant \frac{\big|f(x)\big|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

En passant à la borne supérieure par rapport au paramètre $y$, on en déduit que

$$|||f||| \leqslant \frac{\big|f(x)\big|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

❧ Réciproquement, on rappelle que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

Pour tout $y \in H = \operatorname{Ker} f$,

$$\big|f(x)\big| = \big|f(x - y)\big| \leqslant |||f|||\, \|x - y\|$$

puisque l'application linéaire $f$ est supposée continue. On a donc

$$\forall\, y \in H, \quad \|x - y\| \geqslant \frac{\big|f(x)\big|}{|||f|||}.$$

On peut donc passer à la borne inférieure par rapport au paramètre $y$ et obtenir enfin :

$$d(x, \operatorname{Ker} f) \geqslant \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

❧ On a ainsi démontré par double inégalité que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}$$

pour toute forme linéaire $f$ continue sur $E$.

**Solution 5** **18-05**

**1. a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } n = 0, \\ 1/2 & \text{pour } n \geqslant 1. \end{array} \right.$$

Il est donc clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ de convergence en moyenne quadratique.

✍ *Si on ne connaît pas le résultat par cœur, on le retrouve en* linéarisant.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

**1. b.** On suppose que $1 \leqslant n < p$. On déduit de la question précédente que

$$\|f_n - f_p\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_p\|^2 - 2\langle f_n \mid f_p \rangle = 1 - 2\langle f_n \mid f_p \rangle.$$

On linéarise à nouveau :

$$\begin{aligned} \langle f_n \mid f_p \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt \cos pt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+p)t + \cos(n-p)t}{2} \, dt = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant n < p, \qquad \|f_n - f_p\| = 1.$$

❧ S'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait, alors il existerait une limite $\ell \in E$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - \ell\| = 0.$$

Par inégalité triangulaire, on aurait en particulier

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leqslant \|f_{n_{k+1}} - \ell\| + \|\ell - f_{n_k}\|$$

et par encadrement

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 0.$$

Or $1 \leqslant n_1 \leqslant n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 1$ (par définition des *suites extraites* !), donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 1$$

ce qui contredit la limite précédente.

Par conséquent, de la suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ne peut extraire aucune suite convergente.

**2.** La boule unité fermée $B$ de $E$ est fermée (comme son nom l'indique) et bornée (par définition).

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $B$ qui n'a aucune valeur d'adhérence, donc la partie $B$ *n'est pas compacte*.

**Solution 6** **18-06**

**1. a.**

✍ *Ces résultats sont "physiquement" évidents lorsque le plan ou l'espace est muni de la norme euclidienne canonique. Il est intéressant de constater qu'ils restent vrais indépendamment de la norme choisie !*

Soit $A$, une sphère/une boule ouverte/une boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$.

❧ Quels que soient $x$ et $y$ dans $A$,

$$\|x-y\| \leqslant \|x-a\| + \|a-y\| \leqslant 2r$$

donc $A$ est bien une partie bornée et son diamètre est inférieur à $2r$.

❧ Soit $u$, un vecteur unitaire de $E$. On pose alors $x = a + r \cdot u$ et $y = a - r \cdot u$. On a donc

$$\|x-a\| = \|r \cdot u\| = r \cdot \|u\| = r$$

et de même $\|y-a\| = r$, donc $x$ et $y$ sont des points de la sphère/de la boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$. Or

$$\|x-y\| = \|2r \cdot u\| = 2r \cdot \|u\| = 2r.$$

Donc le diamètre de la sphère/de la boule fermée est égal à $2r$.

❧ Si $A$ est la boule *ouverte* de centre $a$ et de rayon $r$, alors on pose

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad x_n = a + \frac{(n-1)r}{n} \cdot u \quad \text{et} \quad y_n = a - \frac{(n-1)r}{n} \cdot u$$

de telle sorte que

$$\|x_n - a\| = \frac{(n-1)r}{n} < r$$

et donc que $x_n \in A$. De même, $y_n \in A$.

Or $\|x_n - y_n\| = \frac{2(n-1)r}{n}$, ce qui tend vers $2r$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Par conséquent,

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} \|x-y\| \geqslant \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 2r$$

et par double inégalité, on a démontré que le diamètre de la boule *ouverte* $A$ était égal à $2r$.

**1. b.** Soit $A$, la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r > 0$.

❧ Quels que soient les points $x$ et $y$ dans $A$, on a donc

$$\|x-a\| < r \quad \text{et} \quad \|y-a\| < r.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\|(1-t)\cdot x + t\cdot y - a\| &= \|(1-t)\cdot(x-a) + t\cdot(y-a)\| \\ &\leqslant \underbrace{(1-t)}_{\geqslant 0}\cdot\|x-a\| + \underbrace{t}_{\geqslant 0}\cdot\|y-a\| \\ &< (1-t)r + tr = r\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant stricte comme somme de deux inégalités dont l'une au moins est stricte (pour $t=0$ et pour $t=1$, une seule est stricte ; pour $0<t<1$, les deux sont strictes).

Cela prouve que $[x,y] \subset A$ et donc que $A$ est convexe.

❧ Si $A$ est une boule fermée, il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.

**2. a.** On suppose que $\|b-a\| \leqslant r-s$.

Considérons un point $x$ de la boule ouverte de centre $b$ et de rayon $s$. On a donc

$$\|x-b\| < r$$

et par inégalité triangulaire

$$\|x-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < s + (r-s) = r$$

donc $x \in B_o(a,r)$.

❧ Réciproquement, on suppose que $a \neq b$ et que $B_o(b,s) \subset B_o(a,r)$. Pour tout $0 < t < s$, le vecteur

$$x_t = b - t \cdot \frac{a-b}{\|a-b\|}$$

appartient à la boule ouverte $B_o(b,s)$ :

$$\|x_t - b\| = t \cdot \left\| \frac{a-b}{\|a-b\|} \right\| = t < s.$$

On a alors

$$x_t = a + (b-a) + t \cdot \frac{b-a}{\|a-b\|} \in B_o(a,r)$$

et donc

$$\forall\, 0 < t < s, \quad \|x_t - a\| = \|b-a\| + t < r.$$

Par passage au sup (par rapport à $t$), on en déduit que $\|b-a\| + s \leqslant r$.

**2. b.** Supposons qu'il existe un point $x \in B_o(b,s) \cap B_o(a,r)$. On a alors

$$\|b-a\| \leqslant \|b-x\| + \|x-a\| < r+s.$$

Par contraposée, si $\|b-a\| \geqslant r+s$, alors les boules ouvertes $B_o(a,r)$ et $B_o(b,s)$ sont disjointes.

❧ Réciproquement, on suppose que $\|b-a\| < r+s$.

▷ Si $\|b-a\| < r$, alors $b$ appartient à $B_o(a,r)$, donc l'intersection des deux boules ouvertes contient au moins $b$ !

▷ On suppose donc que que $\|b-a\| \geqslant r$. On peut donc choisir un réel $\lambda$ tel que

$$0 \leqslant \|b-a\| - r < \lambda < s.$$

On pose alors

$$x = b + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$

On a donc $\|x-b\| = \lambda < s$, donc $x \in B_o(b,s)$. Mais on a aussi

$$x - a = \|b-a\| \cdot \frac{b-a}{\|b-a\|} + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|} = \big(\lambda - \|b-a\|\big) \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|}$$

et donc

$$\|x-a\| = \big|\lambda - \|b-a\|\big|.$$

D'après nos hypothèses,

$$-r < \lambda - \|b-a\| \leqslant s - \|b-a\| \leqslant s - r \leqslant 0$$

donc $\|x-a\| < r$, donc $x \in B_o(a,r)$. On a ainsi trouvé un vecteur $x$ appartenant aux deux boules ouvertes : l'intersection de ces boules n'est donc pas vide.

## Solution 8 — 18-08

On suppose que $x \in E$ est un point adhérent à $A$. Par définition, pour tout $r > 0$, l'intersection $A \cap B_f(x,r)$ n'est pas vide, donc il existe au moins un élément $y(r)$ qui appartienne à la fois à $A$ et à la boule $B_f(x,r)$, c'est-à-dire un élément $y(r) \in A$ tel que

$$\|x - y(r)\| \leqslant r.$$

❧ On suppose que

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, y(r) \in A, \qquad \big\|x - y(r)\big\| \leqslant r.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $r = 2^{-n} > 0$. Il existe donc $y_n \in A$ tel que

$$\|x - y_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Par encadrement, une telle suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ converge vers $x$.

❧ On suppose qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $x$. Par définition,

$$d(x,A) = \inf_{z\in A} \|x-z\|.$$

Comme la borne inférieure est un minorant, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant d(x,A) \leqslant \|x - y_n\|$$

et, par encadrement, $d(x,A) = 0$.

❧ On suppose enfin que $d(x,A) = 0$.

Si $r > 0$, alors

$$r > \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

donc il existe $y(r) \in A$ tel que

$$r > \|x - y(r)\|$$

c'est-à-dire $y \in A \cap B_o(x, r) \subset A \cap B_f(x, r)$. Par conséquent,

$$\forall\, r > 0, \quad A \cap B_f(x, r) \neq \varnothing.$$

✍ *En particulier, le point $x$ appartient à l'adhérence de $A$ si, et seulement si, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments* $\boxed{\text{de } A}$ *qui converge vers $x$.*

## Solution 9 — 18-09

**1.**

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers un point $\ell \in E$.

✍ *Il s'agit maintenant de prouver que $\ell \in \overline{A}$ et donc qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $\ell$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $x_n$ est adhérent à $A$. Or $2^{-n} > 0$, donc il existe un point $u_n \in A$ tel que

$$\|x_n - u_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|\ell - u_n\| = \|\ell - x_n + x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + \|x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + 2^{-n}.$$

Le majorant est la somme de deux quantités de limite nulle, donc $\|\ell - u_n\|$ tend vers $0$ par encadrement.

On a ainsi démontré qu'il existait une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui convergeait vers $\ell$. Donc $\ell \in \overline{A}$.

**2.** On vient de démontrer que l'adhérence de $A$ est un fermé et on sait que l'adhérence de $A$ contient $A$ :

$$A \subset \overline{A}.$$

Considérons maintenant une partie fermée $F$ qui contienne $A$ : $A \subset F$.

Pour tout $y \in \overline{A}$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $y$.

Comme $A \subset F$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $F$ qui converge vers $y$. Or $F$ est fermé, donc la limite $y$ est un élément de $F$.

Ainsi $\overline{A} \subset F$.

✍ *On vient donc de démontrer que l'adhérence de $A$ était un fermé qui contenait $A$ et que, de tous les fermés qui contiennent $A$, l'adhérence de $A$ est le plus petit.*

*On a donc caractérisé l'adhérence $\overline{A}$ comme un "fermé extrémal".*

## Solution 10 — 18-10

Soit $x$, un point intérieur à $A$. Par définition, $A$ est un voisinage de $x$ et en particulier $x \in A$. Donc $A^\circ \subset A$.

✍ *Une partie est ouverte si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points. Il s'agit donc maintenant de vérifier que $A^\circ$ est un voisinage de $x$.*

❧ Plus précisément, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, r)$ soit contenue dans $A$. Or cette boule ouverte est une partie ouverte, donc $B_o(x, r)$ est un voisinage de chacun de ses points et comme $B_o(x, r) \subset A$, la partie $A$ est un voisinage de chaque point de $B_o(x, r)$. De la sorte, la boule $B_o(x, r)$ est tout entière contenue dans $A^\circ$, ce qui prouve que $A^\circ$ est un voisinage de $x$.

On a donc démontré que $A^\circ$ était un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire une partie ouverte de $A$.

❧ Considérons maintenant une partie ouverte $G$ contenue dans $A$ : $G \subset A$.

Par définition, pour tout $x \in G$, la partie $G$ est un voisinage de $x$, donc $A$ est un voisinage de $x$.

✍ *Toute partie qui contient un voisinage de $x_0$ est elle-même un voisinage de $x_0$ (propriétés filtrantes des voisinages).*

Cela signifie que $A$ est un voisinage de chaque point de $G$, c'est-à-dire (définition de l'intérieur d'une partie) que chaque point de $G$ est à l'intérieur de $A$ :

$$G \subset A^\circ \subset A.$$

❧ On vient donc de démontrer que l'intérieur de $A$ est une partie ouverte contenue dans $A$ et que, de tous les ouverts contenus dans $A$, l'intérieur de $A$ est le plus grand de tous.

✍ *On a ainsi caractérisé l'intérieur d'une partie $A$ comme un "ouvert extrémal".*

**Solution 11** **18-11**

On sait que $\overline{A}$ est une partie fermée qui contient $A$ :

$$A \subset \overline{A}.$$

On en déduit que

$$(\overline{A})^c \subset A^c.$$

En tant que complémentaire d'une partie fermée, $(\overline{A})^c$ est une partie ouverte et elle est contenue dans $A^c$.

✍ *L'intérieur d'une partie $B$ est le plus grand ouvert contenu dans $B$.*

Donc

$$(\overline{A})^c \subset (A^c)^\circ.$$

▷ Réciproquement, l'intérieur $(A^c)^\circ$ est un ouvert contenu dans $A^c$. Par passage au complémentaire,

$$A = (A^c)^c \subset [(A^c)^\circ]^c.$$

Ainsi $[(A^c)^\circ]^c$ est une partie fermée qui contient $A$.

✍ *L'adhérence d'une partie $B$ est le plus petit fermé qui contienne $B$.*

Donc

$$\overline{A} \subset [(A^c)^\circ]^c$$

et donc

$$(A^c)^\circ \subset (\overline{A})^c.$$

▷ Par double inclusion, on a démontré que

$$(A^c)^\circ = (\overline{A})^c.$$

❧ La propriété précédente est vraie pour toute partie $A \subset E$, en particulier pour $A^c$. On a donc démontré que

$$[(A^c)^c]^\circ = A^\circ = (\overline{A^c})^c$$

et donc, par passage au complémentaire, que

$$(A^\circ)^c = \overline{A^c}.$$

**Solution 12** **18-12**

**1.** Soit $x \in E$ (fixé). L'application

$$[y \mapsto d(x, y)]$$

est lipschitzienne et donc continue.

✍ *En effet,*

$$\big| d(x,y) - d(x,z) \big| = \big| \|y-x\| - \|x-z\| \big| \leqslant \big\| (y-x) - (x-z) \big\| = \|y-z\|$$

*(inégalité triangulaire).*

Sur une partie compacte, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son minimum, donc il existe un élément $y_0 \in K$ tel que

$$d(x, y_0) = \min_{y \in K} d(x, y)$$

et, par définition $d(x, K) = d(x, y_0)$.

**2.**

✍ *Commençons par rappeler la définition :*

$$d(K, K') = \inf_{(x,y)\in K\times K'} d(x, y).$$

*Cette définition a un sens car*

$$\{\, d(x, y),\ (x, y) \in K \times K' \}$$

*est une partie non vide [car ni $K$, ni $K'$ n'est vide] et minorée [par $0$] de $\mathbb{R}$.*

*Par ailleurs, pour toute partie non vide $A$, l'application $[x \mapsto d(x, A)]$ est lipschitzienne et admet $1$ pour constante de Lipschitz. (Résultat du cours, peut-être méconnu ?)*

L'application

$$[x \mapsto d(x, K')]$$

est continue et sur le compact $K$, elle atteint son minimum. Il existe donc $x_0 \in K$ tel que

$$d(x_0, K') = \min_{x\in K} d(x, K') = d(K, K').$$

D'après la première question, il existe alors un élément $y_0 \in K'$ tel que

$$d(x_0, K') = d(x_0, y_0)$$

et $d(x_0, y_0) > 0$ car $x_0 \neq y_0$ (puisque $x_0 \in K$, $y_0 \in K'$ et $K \cap K' = \varnothing$).

▶ La distance qui sépare deux compacts disjoints est strictement positive.

✍ *Si les compacts ne sont pas disjoints, alors la distance qui les sépare est nulle, car il existe $x_0 \in K \cap K'$ et*

$$0 \leqslant d(K, K') \leqslant d(\underbrace{x_0}_{\in K}, \underbrace{x_0}_{\in K'}) = 0.$$

**3.** On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme produit.

✍ *Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. Par conséquent, la distance entre deux parties $A$ et $B$ est nulle pour une norme quelconque $N$ si, et seulement si, elle est nulle pour la norme produit.*

❧ L'axe des abscisses $A = [y = 0]$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue

$$[(x, y) \mapsto y]\,.$$

Le graphe de la fonction exp :

$$G = [y - \exp(x) = 0]$$

est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue

$$[(x, y) \mapsto y - \exp(x)]\,.$$

❧ Ces deux parties fermées sont disjointes, car si $M = (x, y) \in G$, alors $y = \exp(x) > 0$ et si $M \in A$, alors $y = 0$.

❧ Et pourtant la distance entre ces deux fermés est nulle (à cause de l'asymptote horizontale) :

$$0 \leqslant d(A, G) \leqslant \lim_{x\to-\infty} \big\|\underbrace{(x, e^x)}_{\in G} - \underbrace{(x, 0)}_{\in A}\big\|_\infty = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

✍ *L'hypothèse de compacité était donc essentielle pour conclure à la question précédente.*

**Solution 13** **18-13**

**1.** On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$ et on suppose que cette suite converge vers un point $\ell \in E$.

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Par définition de $A+B$, pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
Comme la partie $A$ est compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $u \in A$.
En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite $\ell$, la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.
En tant que différence de deux suites convergentes, la suite de terme général

$$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k}$$

est convergente, de limite $\ell - u$.
Or tous les $y_{n_k}$ appartiennent à $B$ et $B$ est une partie fermée, donc la limite $(\ell - u)$ appartient encore à $B$.
Ainsi

$$\ell = \underbrace{u}_{\in A} + \underbrace{(\ell - u)}_{\in B} \in A + B.$$

On a démontré que $(A+B)$ était stable par passage à la limite et donc fermée.
**2.**

✍ *Si $B$ est compact, alors $B$ est fermé, donc on étudie ici un cas particulier du résultat précédente, mais le plan de la démonstration n'a plus rien à voir : on considère ici une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(A+B)$ et on cherche à démontrer que cette suite possède une valeur d'adhérence qui appartient bien à $(A+B)$.*

On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$. Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
Puisque tous les $x_n$ appartiennent au compact $A$, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $u \in A$.
Puisque tous les $y_{\varphi(n)}$ appartiennent au compact $B$, il existe une sous-suite extraite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $v \in B$.
En tant que suite extraite d'une suite qui converge vers $u$, la sous-suite extraite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $u$.
Par conséquent, la suite extraite de terme général

$$z_{\varphi\circ\psi(n)} = x_{\varphi\circ\psi(n)} + y_{\varphi\circ\psi(n)}$$

converge vers $u + v \in A + B$, ce qui nous prouve bien que $(A+B)$ est compacte.

✍ ***Variante.*** *Comme $A$ et $B$ sont des parties compactes de $E$, alors le produit cartésien $A \times B$ est une partie compacte de $E \times E$ et $A+B$ est une partie compacte de $E$ en tant qu'image (directe) du compact $A \times B$ par l'application*

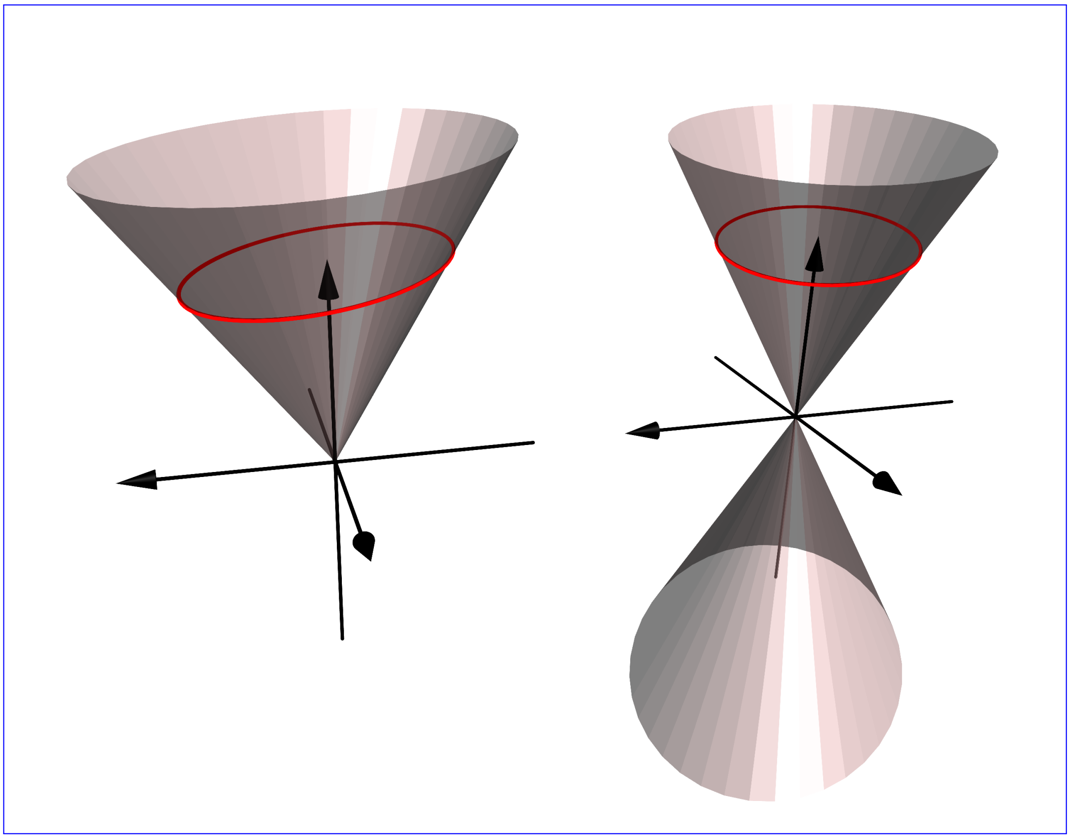
$$[(x, y) \mapsto x + y]$$

*qui est une application continue de $E \times E$ dans $E$.*

**Solution 14** **18-14**

**1.**

✍ *Remarque sur le vocabulaire : pour $x \in K$ fixé (non nul !), l'ensemble des points de $E$ de la forme $\lambda \cdot x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $x$. L'ensemble $F$ est donc l'ensemble des* demi-droites *issues de $O$ et dirigée par un vecteur de $K$, c'est ce qu'on appelle un **cône positif** (figure de gauche).*
*Le **cône** construit sur $K$ est l'ensemble des* droites *vectorielles dirigées par un vecteur de $K$ (figure de droite).*



Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $F$ en supposant que cette suite converge vers une limite $\ell_0 \in E$.

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $u_n$ appartient à $F$, donc il existe un scalaire $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et un vecteur $x_n \in K$ tels que $u_n = \lambda_n \cdot x_n$.
Comme $K$ est compact, il existe une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in K$.
En tant que suite extraite d'une suite de limite $\ell_0$, la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers $\ell_0$.
Comme le vecteur nul n'appartient pas à $K$ et que les scalaires $\lambda_n$ sont tous positifs,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \frac{\|u_n\|}{\|x_n\|} \qquad \text{et en particulier} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n_k} = \frac{\|u_{n_k}\|}{\|x_{n_k}\|}$$

donc

$$\lambda_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\|\ell_0\|}{\|\ell\|} \overset{\text{not.}}{=} \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

✍ *En effet, la norme vue comme une application de $E$ dans $\mathbb{R}$ est une application continue (elle est lipschitzienne et admet $1$ pour constante de Lipschitz d'après l'inégalité triangulaire).*

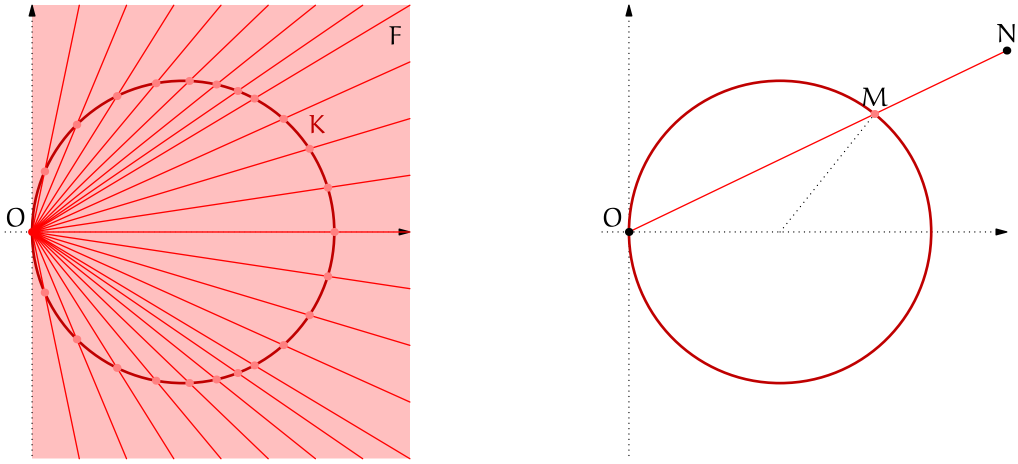
On en déduit que

$$\ell_0 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} \cdot x_{n_k} = \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}_+} \cdot \underbrace{\ell}_{\in K} \in F.$$

On a démontré que $F$ était stable par passage à la limite, donc $F$ est fermé.

**2.** La partie $K$ est la boule fermée de centre $M_0 = (1, 0)$ et de rayon $1$. C'est, par définition, une partie fermée et bornée et comme $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie, la partie $K$ est compacte.

✍ *Contrairement au compact de la question précédente, cette fois, $K$ contient l'origine.*
*Pour comprendre que l'ensemble $F$ est ici encore le cône positif basé sur $K$, il faut bien regarder la figure suivante et connaître un peu de trigonométrie (Théorème de l'angle au centre).*




▷ L'origine O appartient clairement à F. Par conséquent, pour tout point $M \in K$, le point $0 \cdot M = 0$ appartient à F.

▷ Considérons un point $M = (x_1, x_2)$ de K distinct de O. Il existe donc un angle $-\pi < t < \pi$ tel que

$$x_1 = 1 + \cos t \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sin t.$$

Comme $\cos t > 0$, on a bien $x_1 > 0$ et par conséquent

$$\forall\, \lambda > 0, \qquad \lambda \cdot M = (\underbrace{\lambda x_1}_{>0}, \lambda x_2) \in F.$$

▷ Réciproquement, considérons un point $N = (u_1, u_2) \in F$ distinct de O et posons

$$\alpha = \operatorname{Arctan} \frac{u_2}{u_1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[.$$

Comme $\cos\alpha > 0$, il existe donc un réel $r > 0$ tel que

$$(x_1, x_2) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r}{2\cos\alpha} \cdot (2\cos^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{r}{2\cos\alpha} \cdot (1 + \cos 2\alpha, \sin 2\alpha).$$

Par conséquent, il existe un réel $\lambda = \frac{r}{2\cos\alpha} > 0$ et un point $M = (1 + \cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \in K$ tels que $N = \lambda M$.

✍ *Le point M est le point d'intersection d'une demi-droite [ON) issue de O avec le cercle K. L'angle α est la détermination principale de l'argument de N.*

▷ Par double inclusion, on a donc démontré que

$$F = \big\{(0,0)\big\} \cup \big([x \neq 0] \cap [y > 0]\big).$$

❧ Cet ensemble F n'est pas fermé pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. En effet, pour tout indice $n \geqslant 1$, le point

$$M_n = \big(1, 1/n\big)$$

appartient à F. Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point $L = (1, 0)$ qui n'appartient plus à F.
Comme F n'est pas stable par passage à la limite, on en déduit que F n'est pas fermé.

✍ *L'ensemble F n'est pas ouvert non plus, car (0,0) est un point de F mais F n'est pas un voisinage de (0,0) (figure !).*

**Solution 15** **18-15**

On considère une application continue $f : E \to F$ et une partie compacte $K \subset E$. L'image (directe) de K par f est définie par

$$f_*(K) = \big\{f(x),\ x \in K\big\}.$$

Pour démontrer que $f_*(K)$ est une partie compacte de F, on considère une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f*(K)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Comme K est une partie compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Comme $f$ est continue (sur $E$ et en particulier au point $\ell \in K$),

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

(Théorème de composition des limites).

Comme $\ell \in K$, alors $f(\ell) \in f_*(K)$. On a ainsi démontré qu'il existait une suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers une limite $f(\ell) \in f_*(K)$.

Ainsi, toute suite d'éléments de $f_*(K)$ possède une valeur d'adhérence dans $f_*(K)$, ce qui signifie que $f_*(K)$ est une partie compacte de $F$.

**Solution 16** **18-16**

✍ *La fonction $f$ est **uniformément continue sur** $K$ si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, y \in K, \quad \|x-y\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

*Nous allons procéder par contraposée et pour cela, nous commençons par écrire la négation de cette expression formelle.*

► Nous supposons que :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x_\alpha, y_\alpha \in K, \quad \begin{cases} \|x_\alpha - y_\alpha\|_E \leqslant \alpha \\ \|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)\|_F > \varepsilon_0. \end{cases}$$

✍ *Conservons le réel $\varepsilon_0 > 0$ qui nous est donné par l'hypothèse de travail et puisque nous pouvons choisir librement $\alpha$, choisissons $\alpha$ en imposant des contraintes de plus en plus fortes.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = 2^{-n} > 0$. Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, il existe alors deux éléments $x_n$ et $y_n$ de $K$ tels que

$$\|x_n - y_n\|_E \leqslant 2^{-n} \quad \text{et} \quad \big\|f(x_n) - f(y_n)\big\|_F > \varepsilon_0.$$

► Comme tous les $x_n$ appartiennent à $K$ et que $K$ est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Par inégalité triangulaire (et astuce taupinale),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|y_{n_k} - \ell\|_E \leqslant \underbrace{\|y_{n_k} - x_{n_k}\|_E}_{\leqslant 1/2^{n_k}} + \underbrace{\|x_{n_k} - \ell\|_E}_{\to 0}$$

donc la suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers $\ell$.

► Comme $f$ est continue sur $E$, elle est en particulier continue au point $\ell$ et, par composition de limites,

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell) \quad \text{et} \quad f(y_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

ce qui prouve en particulier que

$$\big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Mais cela contredit la propriété établie plus haut :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

► Notre hypothèse de travail est donc fausse et nous pouvons conclure : si $f$ est continue sur $E$, alors la restriction de $f$ à un compact $K \subset E$ est uniformément continue.

**Solution 17** **18-17**

Comme la fonction $f$ est bornée (sous entendu : sur $E$ tout entier), les deux bornes supérieures ont bien un sens.

► Toute partie est contenue dans son adhérence, donc

$$V \overset{\text{not.}}{=} \big\{\|f(x)\|_F,\ x \in A\big\} \subset \big\{\|f(x)\|_F,\ x \in \overline{A}\big\} \overset{\text{not.}}{=} V'$$

et par conséquent

$$\sup_{x\in A} \|f(x)\|_F \leqslant \sup_{x\in\overline{A}} \|f(x)\|.$$

► Réciproquement, soit $x_0 \in \overline{A}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $x_0$ (caractérisation séquentielle de l'adhérence) et, d'après le Théorème de composition des limites,

$$\|f(u_n)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(x_0)\|$$

puisque $f$ est supposée continue.

Comme la borne supérieure est un majorant et que tous les $u_n$ appartiennent à $A$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f(u_n)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$$

et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on vient de démontrer que

$$\forall\, x_0 \in \overline{A}, \qquad \|f(x_0)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x_0$, on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$\sup_{x_0\in\overline{A}} \|f(x_0)\| \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

► L'égalité cherchée est donc démontrée par double inégalité.

**Solution 18** **18-18**

**1.** On étudie ici une application *linéaire* $f : E \to F$.

✍ *Dans un espace vectoriel normé, tout singleton est fermé.*
*L'image réciproque d'une partie fermée de $F$ par une application continue de $E$ dans $F$ est une partie fermée de $E$.*
*D'après l'inégalité triangulaire, l'application $\|\cdot\|_F : F \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et donc continue.*

Si $f : E \to F$ est continue, alors $\|f\|_F : E \to \mathbb{R}$ est continue et

$$A = \left\{x \in E : \|f(x)\|_F = 1\right\}$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\} \subset \mathbb{R}$ par une application continue ($\|f\|_F : E \to \mathbb{R}$), donc $A$ est une partie fermée de $E$.

**2. a.**

✍ *Une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée au voisinage de l'origine :*

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, r > 0,\ \forall\, x \in E, \quad \|x\|_E \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M. \tag{1}$$

*Nous allons procéder par contraposée.*

❧ Si l'application *linéaire* $f$ n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de $0_E$, c'est-à-dire :

$$\forall\, M > 0,\ \forall\, r > 0,\ \boxed{\exists\, x \in E,} \qquad \begin{cases} \|x\|_E \leqslant r, \\ \|f(x)\|_F > M. \end{cases} \tag{2}$$

✍ *La propriété (2) est la* négation formelle *de la propriété (1).*

*On peut raisonner par analogie, comme s'il s'agissait d'événements d'une tribu : dire que l'événement $B$ est une conséquence de l'événement $A$ se traduit en algèbre booléenne par*

$$A \subset B,$$

*c'est-à-dire par*

$$A \cap B^c = \varnothing.$$

*(On vient d'exprimer la contraposée.)*

*La propriété contraire se traduit donc par*

$$A \cap B^c \neq \varnothing$$

*et donc par le fait qu'il existe au moins un $x \in E$ pour lequel l'intersection $A \cap B^c$ est réalisée.*

✍ *Puisqu'on peut choisir librement $M > 0$ et $r > 0$, nous allons choisir ce qui est le plus contraignant : le minorant $M$ de plus en plus grand et le rayon $r$ de plus en plus petit.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe donc un vecteur $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n)\|_F > n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $0_E$ et pourtant la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée, cqfd.

**2. b.** Puisqu'on suppose ici que l'application linéaire $f$ n'est pas continue, nous reprenons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de la question précédente et nous posons

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad y_n = \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F}.$$

✍ *Le dénominateur est strictement supérieur à $1$, on ne risque pas de diviser par zéro.*

Par linéarité de $f$ et homogénéité de $\|\cdot\|_F$,

$$\big\|f(y_n)\big\|_F = \left\|\frac{f(x_n)}{\|f(x_n)\|_F}\right\|_F = 1$$

donc $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $A$.

✍ *Il faut voir la définition des $y_n$ comme un moyen* naturel *de construire une suite d'éléments de $A$.*

D'autre part, par construction de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \|y_n - 0_E\|_E = \left\|\frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F}\right\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|f(x_n)\|_F} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_E$.

Et comme $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de $f$, la limite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ n'appartient pas à $A$.

L'ensemble $A$ n'est donc pas stable par passage à la limite, ce n'est donc pas un fermé de $E$.

## Solution 19 18-19

La propriété

$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha \cdot v^n \tag{$HR_n$}$$

est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.

Si la propriété $(HR_n)$ est vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha \cdot v^{n+1} &= (u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u) \circ v && \text{(composition par } v\text{)}\\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (u \circ v)\\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (v \circ u + \alpha I_E) && (HR_1)\\
&= u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u - \alpha \cdot v^{n+1}
\end{aligned}$$

et donc

$$u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u = [(n+1)+1]\alpha \cdot v^{n+1},$$

ce qui prouve que la propriété $(HR_n)$ est bien fondée et héréditaire.

La propriété $(HR_n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *La suite de l'exercice était facile à traiter avec l'ancien programme, en utilisant la norme d'application linéaire continue. Je donne dans un premier temps l'ancienne preuve et je montre ensuite comment l'adapter dans le cadre du nouveau programme. (Ce sont les mêmes idées, mais cela demande une maîtrise technique bien supérieure : au lieu d'appliquer une recette vue en cours, il faut inventer la recette et le cours qui va avec !)*

❧ L'espace vectoriel $L_c(E)$ des endomorphismes continus de $E$ est normé par

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \big\|u(x)\big\|.$$

La **norme d'application linéaire continue** $|||\cdot|||$, dite aussi **norme subordonnée à la norme** $\|\cdot\|$ sur $E$, est une norme d'algèbre :

$$\forall\, u, v \in L_c(E), \qquad |||u \circ v||| \leqslant |||u|||\,|||v|||.$$

Par homogénéité et inégalité triangulaire, on déduit de $(\mathrm{HR}_n)$ que

$$(n+1)\,|\alpha|\,|||v^n||| \leqslant |||u|||\,|||v^{n+1}||| + |||v^{n+1}|||\,|||u||| \leqslant 2|||u|||\,|||v|||\,|||v^n|||.$$

Par conséquent : ou bien $v$ est nilpotent, ou bien

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)\alpha \leqslant 2|||u|||\,|||v|||$$

et dans ce cas, $\alpha = 0$.

✍ *Comme on suppose que les applications linéaires sont continues, on sous-entend que l'espace $E$ n'est pas un espace de dimension finie !*

*En effet, si $E$ est un espace de dimension finie,*
- *tous les endomorphismes de $E$ sont continus ;*
- *on pourrait aussi raisonner sur le nombre fini de valeurs propres pour conclure.*

**Solution 20** **18-20**

**1.** Soit $x \in K$. Comme $K \subset U$, l'élément $x$ appartient aussi à $U$ et comme $U$ est ouvert, c'est un voisinage de $x$. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, \alpha)$ soit contenue dans $U$.

✍ *Le réel $\alpha$ dépend* a priori *du point $x$ choisi.*

**2.** On sait que, pour toute partie non vide $A$ de $E$, l'application

$$[x \mapsto d(x, A)]$$

est continue (et même 1-lipschitzienne). Donc la fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ est continue.

D'après la question précédente, pour tout $x \in K$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $B_o(x, \alpha) \subset U$. Cela signifie que

$$\forall\, y \in U^c, \qquad y \notin B_o(x, \alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha \leqslant \|y - x\|.$$

On a un minorant indépendant de $y \in U^c$, on peut donc passer à la borne inférieure pour obtenir

$$d(x, U^c) \geqslant \alpha > 0.$$

✍ *On rappelle que, dans ce raisonnement, le réel $\alpha$ dépend du point $x \in K$ considéré.*

❧ Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Donc la fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ atteint en particulier son minimum en un point de $K$ : il existe $x_0 \in K$ tel que

$$\forall\, x \in K, \qquad d(x, U^c) \geqslant d(x_0, U^c)$$

et comme la fonction ne s'annule pas, son minimum est strictement positif.

On a ainsi justifié l'existence d'un réel

$$\alpha_0 = d(x_0, U^c) > 0$$

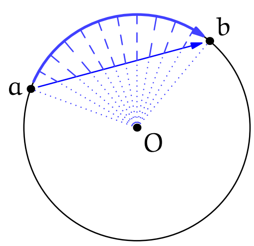
tel que

$$\forall\, x \in K, \qquad d(x, K) \geqslant \alpha_0 > 0.$$

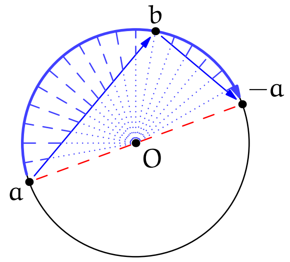
✍ *Et cette fois, grâce à la compacité de $K$, on a trouvé un minorant indépendant de $x \in K$.*

**Solution 21** **18-21**

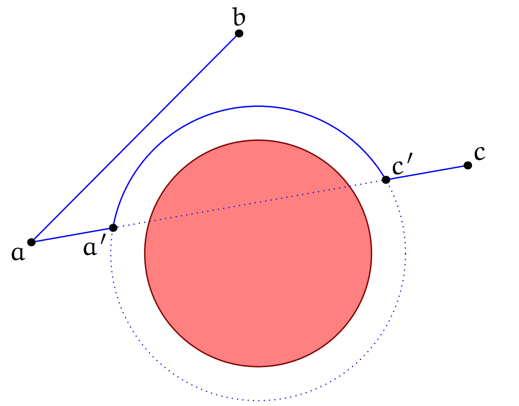
**1. a.**



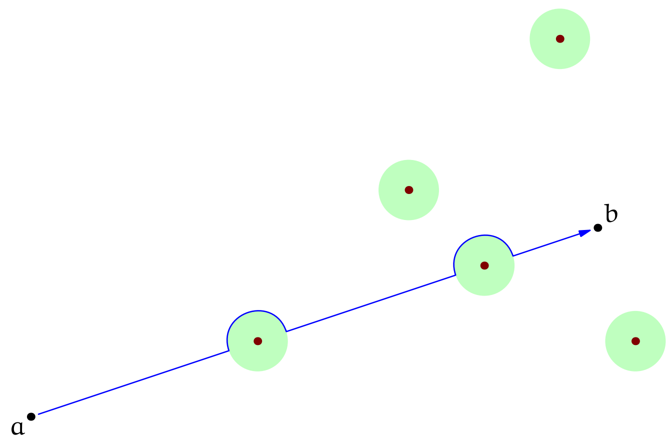
**2.**




**3.**




**4.**




## Solution 22 18-22

Comme $f$ est <u>uniformément</u> continue, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, y, z \in E, \quad \|y - z\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(y) - f(z)\|_F \leqslant 1. \tag{$\star$}$$

✍ *On a choisi $\varepsilon = 1$, c'est sans importance ici.*

❧ Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, on pose

$$n = \left\lfloor \frac{\|x\|}{\alpha} \right\rfloor \qquad \text{pour avoir} \qquad n\alpha \leqslant \|x\| < (n+1)\alpha.$$

On passe de $0_E$ à $x$ en faisant de petit pas :

$$f(x) - f(0_E) = \sum_{k=1}^{n} \left[ f\Big(k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) - f\Big((k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) \right] + \left[ f(x) - f\Big(n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) \right]$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\|f(x) - f(0_E)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\| f\Big(k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) - f\Big((k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) \right\| + \left\| f(x) - f\Big(n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) \right\|.$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left\| k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|} - (k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \alpha \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \alpha$$

et

$$\left\| x - n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \big(\|x\| - n\alpha\big) \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| - n\alpha \leqslant \alpha.$$

On peut donc appliquer l'estimation $(\star)$ à chacun des $(n+1)$ termes de la somme :

$$\big\| f(x) - f(0_E) \big\| \leqslant (n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$$

d'où, par inégalité triangulaire :

$$\big\| f(x) \big\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\| + 1 + \big\| f(0_E) \big\|.$$

- ❧ Il est clair que cette majoration est aussi vraie pour $x = 0_E$ !
- ❧ L'estimation qu'on vient de justifier :

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\| f(x) \big\| \leqslant a\|x\| + b$$

prouve que le quotient $\big\| f(x) \big\| / \|x\|$ reste borné lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, donc

$$\big\| f(x) \big\|_F \underset{\|x\|_E \to +\infty}{=} \mathcal{O}\big(\|x\|_E\big).$$

**Solution 23** 18-23

**1.** Pour tout $x \in [0, 1]$, l'application

$$y \longmapsto (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

est continue sur $[0, 1]$ (en tant que composée d'applications continues). Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes, donc cette application atteint un maximum et $g(x)$ est donc bien défini.

**2.** Soient $x_0 \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. L'application $f$ est continue sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$, donc elle est uniformément continue. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \big\| (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \big\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big| f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \big| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall\, y \in [0, 1],\ \forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [0, 1], \quad \big| f(x, y) - f(x_0, y) \big| \leqslant \varepsilon \tag{$\star$}$$

- ❧ En particulier

$$\forall\, y \in [0, 1],\ \forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [0, 1], \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y) + \varepsilon \leqslant g(x_0) + \varepsilon$$

puisque le maximum est un majorant. On a un majorant indépendant de $y$, donc on peut passer au maximum :

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [0, 1], \quad g(x) = \max_{y \in [0,1]} f(x, y) \leqslant g(x_0) + \varepsilon.$$

- ❧ D'autre part, il existe $y_0 \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_0, y_0) = g(x_0)$$

et $(\star)$ nous donne alors

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [0, 1], \quad g(x_0) - \varepsilon = f(x_0, y_0) - \varepsilon \leqslant f(x, y_0) \leqslant g(x).$$

- ❧ On obtient de cette manière l'encadrement suivant

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [0, 1], \quad g(x_0) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(x_0) + \varepsilon,$$

ce qui prouve que $g$ est bien une fonction continue sur $[0, 1]$.

**Solution 24** 18-24

**1.** Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top.A = I_n$, donc $A.A^\top.A = A$ et $A \in V$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans $V$ et par conséquent

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{3}$$

✍ *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est aussi contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ — mais n'anticipons pas trop.*

**2.** Si $A \in V$ est inversible, alors on peut multiplier (à gauche ou à droite, c'est indifférent) par $A^{-1}$ l'égalité

$$A.A^\top.A = A$$

et obtenir $A^\top.A = I_n$, ce qui signifie que $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Avec la question précédente, on vient en fait de démontrer que

$$O_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{4}$$

**3.** Pour démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est à la fois un ouvert relatif à $V$ et un fermé relatif à $V$, il faut démontrer qu'il existe un ouvert $G$ de $E$ et un fermé $F$ de $E$ tels que

$$O_n(\mathbb{R}) = G \cap V = F \cap V.$$

✍ *On rappelle avant d'aller plus loin que :*
— *toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue ;*
— *en particulier les applications coordonnées (relatives à une base quelconque) sont continues ;*
— *toute combinaison linéaire et tout produit d'applications continues sont encore des applications continues ;*
— *en particulier toute fonction polynomiale des coordonnées (relatives à une base quelconque) est continue ;*
— *tout singleton est fermé.*

▶ Le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbb{R}) = [M^\top.M = I_n]$$

est un fermé de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application

$$\big[M \mapsto M^\top.M\big] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

qui est continue en tant que **produit** des applications continues

$$[M \mapsto M] \qquad \text{et} \qquad \big[M \mapsto M^\top\big]$$

(applications linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace de dimension finie).

On déduit alors de (1) que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif à $V$ (on prend $F = O_n(\mathbb{R})$).

▶ L'ensemble

$$[\det M = 0]$$

est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application

$$[M \mapsto \det M] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

qui est continue en tant que fonction polynomiale des coordonnées relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *La formule*

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$$

*n'a jamais servi à calculer le moindre déterminant, il faut bien qu'elle serve à quelque chose !*

Le groupe linéaire

$$GL_n(\mathbb{R}) = [\det M \neq 0] = [\det M = 0]^c$$

est donc un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que complémentaire d'un fermé et par (2), le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $V$ (on prend $G = GL_n(\mathbb{R})$).

✍ ***Variante***

*On peut aussi appliquer la caractérisation séquentielle des fermés. Pour cela, on considère une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $V$ qui converge vers une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et il s'agit de vérifier que la limite $L$ appartient encore à $V$. Mais comme $A_k \in V$,*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A_k.A_k^\top.A_k = A_k$$

*et comme l'application*

$$\left[A \mapsto A.A^{\top}.A\right]$$

*est continue (en tant que produit de trois applications linéaires sur un espace de dimension finie), on déduit du Théorème de composition des limites que*

$$L.L^{\top}.L = L$$

*et donc que* $L \in V$. *Mission accomplie !*

✍ *Pour la topologie relative à* $V$*, comme pour toutes les topologies, il y a au moins deux parties ouvertes et fermées :* $\varnothing$ *et* $V$. *Mais, au contraire de ce qu'on observe dans un espace vectoriel, ce ne sont pas les seules parties ouvertes et fermées : il y aussi* $O_n(\mathbb{R})$ *(et son complémentaire dans* $V$*, bien sûr).*

**Solution 25** 18-25

**1.** Nous allons bien évidemment procéder par double implication.

❧ Supposons que $f$ tende vers $\ell$ au voisinage de $(x_0, y_0)$.

▷ Par définition de la limite, pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \alpha_1 \implies \left|f(x, y) - \ell\right| \leqslant 1.$$

En particulier, pour tout $0 < r \leqslant \alpha_1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple

$$(x, y) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$$

vérifie bien

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = r \leqslant \alpha_1$$

et la fonction

$$\left[\theta \mapsto f\big(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta\big) - \ell\right]$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ (sa valeur absolue est inférieure à 1).

▷ On peut donc poser

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1, \quad \varphi(r) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \tag{$\star$}$$

pour obtenir

$$\begin{array}{l}\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r) \tag{$\star\star$}$$

(puisque le sup $(\star)$ calculé sur le cercle de centre $(x_0, y_0)$ et de rayon $r$, est un majorant).

▷ Revenons à la définition de la limite.
Pour tout $0 < \varepsilon \leqslant 1$, il existe $0 < \alpha(\varepsilon) \leqslant \alpha_1$ tel que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \alpha(\varepsilon) \implies \left|f(x, y) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Le majorant étant indépendant de $(x, y)$, on peut passer au sup en restant sur le cercle de centre $(x_0, y_0)$ et de rayon $0 < r \leqslant \alpha(\varepsilon)$ :

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha(\varepsilon), \qquad 0 \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

On vient de démontrer que la fonction $\varphi : ]0, \alpha_1] \to \mathbb{R}_+$, définie par $(\star)$ et qui vérifie la propriété $(\star\star)$, tend vers 0 au voisinage de 0.

❧ La réciproque est beaucoup plus simple. On suppose qu'il existe un réel $\alpha_1 > 0$ et une fonction $\varphi$ définie sur $]0, \alpha_1]$ et de limite nulle en 0 telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur $\varphi$, il existe un réel $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$ tel que

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $(x, y)$ tel que

$$\left\|(x, y) - (x_0, y_0)\right\| \leqslant \alpha,$$

le point $(x, y)$ est dans le disque fermé de centre $(x_0, y_0)$ et de rayon $\alpha$, donc il existe $0 \leqslant r \leqslant \alpha$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$$

et par conséquent

$$\bigl|f(x, y) - \ell\bigr| \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

On vient de démontrer que $f$ tend vers $\ell$ au voisinage de $(x_0, y_0)$ ! (Relire ce qui est écrit en rouge...)

**2.** On traite les quatre exemples au moyen des coordonnées polaires en mettant en évidence une fonction $\varphi$ convenable à chaque fois.

**Premier exemple**

$$0 \leqslant f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} \leqslant r^2 = \varphi(r)$$

**Deuxième exemple**

$$0 \leqslant \bigl|f(x, y)\bigr| \leqslant \frac{r^3(|\cos^3\theta| + |\sin^3\theta|)}{r^2} \leqslant 2r = \varphi(r)$$

**Troisième exemple**

$$0 \leqslant \bigl|f(x, y)\bigr| \leqslant \frac{2|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{3r^3}{r^2} = 3r = \varphi(r)$$

**Quatrième exemple**

La fonction $\left[\theta \mapsto \sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\right]$ est continue et $\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint un minimum et comme la fonction ne s'annule jamais (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent s'annuler en même temps !), son minimum $m_0$ est strictement positif.

$$0 \leqslant \bigl|f(x, y)\bigr| \leqslant \frac{r^4}{r^2\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}} \leqslant \frac{r^2}{m_1} = \varphi(r)$$

❧ Les quatre fonctions sont naturellement définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ et continues sur cet ouvert (soit comme fonctions rationnelles, soit par opérations sur des fonctions continues).

On vient de démontrer qu'elles tendent vers $0$ au voisinage de $(0, 0)$. On peut donc, *si on y a intérêt*, les prolonger en fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

**3.** Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite au voisinage du point $O = (0, 0)$, on peut procéder par contraposée en utilisant le Théorème de composition des limites.

✍ *Si $f$ tend vers $\ell$ au voisinage de $O$ et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tend vers $O$ au voisinage de $0$, alors la composée*

$$(f \circ g)(t) = f\bigl(g_x(t),\ g_y(t)\bigr)$$

*tend aussi vers $\ell$ lorsque $t$ tend vers $0$.*

❧ *Par contraposée, si on trouve une fonction continue $\gamma : ]-\alpha, \alpha[ \to \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \xrightarrow[t \to 0]{} (0, 0)$$

*et que $f\bigl(\gamma(t)\bigr)$ ne tende pas vers $\ell$ lorsque $t$ tend vers $0$, alors $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.*

❧ *Variante : si on trouve deux fonctions $g_1$ et $g_2$ définies sur un voisinage de $0$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\lim_{t \to 0} g_1(t) = \lim_{t \to 0} g_2(t) = (0, 0)$$

*et telles que*

$$\lim_{t \to 0} f\bigl(g_1(t)\bigr) \neq \lim_{t \to 0} f\bigl(g_2(t)\bigr),$$

*alors $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.*

**Premier exemple**

Avec $g_1(t) = (t, t)$ et $g_2(t) = (t, -t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que $f$ n'a pas de limite au voisinage de $(0, 0)$.

✍ *En coordonnées polaires, on aurait trouvé*

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 + \cos\theta\sin\theta$$

*et quel que soit $\ell \in \mathbb{R}$, il est impossible de majorer l'écart,* ***qui ne dépend pas de*** $r$***,***

$$\left|f(x,y) - \ell\right|$$

*par une expression qui ne dépend que de $r$ et qui tend vers $0$ lorsque $r$ tend vers $0$.*

**Deuxième exemple**
Avec $g_1(t) = (t, 0)$ et $g_2(t) = (0, t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = 1 \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = -1.$$

✍ *En coordonnées polaires,*

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \cos 2\theta.$$

**Troisième exemple**
Avec $g_1(t) = (t, t)$ et $g_2(t) = (t, -t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{-1}{2}.$$

✍ *En coordonnées polaires,*

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \sin\theta\cos\theta.$$

✍ *Pour trouver les fonctions $g_1$ et $g_2$ qui prouvent que la fonction $f$ n'a pas de limite, il est utile de passer en coordonnées polaires pour voir comment $f$ dépend de $r$.*

*Si $f$ ne dépend pas de $r$ (comme c'est le cas de ces trois exemples), la dépendance en $\theta$ permet de trouver des chemins qui mènent à des valeurs incompatibles.*

## Solution 26 18-26

✍ *Pour démontrer que $F$ est continue sur $U$, il faut prouver que $F$ est continue en chaque point de $U$. La démonstration commence donc par :*

❧ Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme $U$ est un ouvert, il existe un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$K \overset{\text{not.}}{=} \left[\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et $K$, en tant que boule fermée dans un espace de dimension finie, est une partie compacte de $E$.

✍ *Dans la définition des voisinages, il est dit qu'il existe une boule* ouverte *de centre $M_0$ et de rayon $r > 0$ contenue dans $U$.*

*Pour tout $0 < r_0 < r$, la boule* fermée *de centre $M_0$ et de rayon $r_0$ est contenue dans la boule ouverte de centre $M_0$ et de rayon $r$. C'est une telle boule fermée que nous notons $K$.*

*L'avantage de considérer une boule fermée est qu'une telle boule, dans un espace de dimension finie, est une partie compacte. (On dit que les EVN de dimension finie sont* localement compacts*.)*

❧ Un produit de parties compactes est une partie compacte de l'espace produit, donc

$$K \times [a, b]$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Comme la fonction $f$ est continue sur $U \times [a, b]$, sa restriction au compact $K \times [a, b]$ est uniformément continue.

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $b > a$, le réel $\frac{\varepsilon}{b-a}$ est strictement positif et, par *continuité uniforme*, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned}&\forall\, t \in [a,b],\ \forall\, \big((x,y),s\big) \in K \times [a,b],\\ &\qquad \big\|\big((x,y),s\big) - \big((x_0,y_0),t\big)\big\|_\infty \leqslant \alpha\\ &\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \big|f(x,y,s) - f(x_0,y_0,t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\forall\, M = (x,y) \in K,\ \forall\, t \in [a,b],\\ &\left\{\begin{array}{l}|x - x_0| \leqslant \alpha\\ |y - y_0| \leqslant \alpha\end{array}\right\} \Longrightarrow \big|f(M,t) - f(M_0,t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\end{aligned}$$

puisque $\|(M,t) - (M_0,t)\|_\infty = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, 0\}$.

❧ La conservation des inégalités par l'intégrale nous donne alors :

$$\begin{aligned}\big|F(M) - F(M_0)\big| &= \left|\int_a^b f(x,y,t) - f(x_0,y_0,t)\,dt\right|\\ &\leqslant \int_a^b \big|f(x,y,t) - f(x_0,y_0,t)\big|\,dt\\ &\leqslant (b-a) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $M = (x,y) \in U$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$ et $|y - y_0| \leqslant \alpha$.

On a bien démontré que F était continue au point $M_0 \in U$ et comme cela vaut pour tout $M_0 \in U$, on a démontré que F était continue sur U.

**Solution 27** 18-27

✍ *On considère ici une fonction définie par une intégrale qui dépend de trois paramètres : les deux bornes et un troisième paramètre sous le signe* $\int$*. La régularité d'une telle expression ne fait pas partie des théorèmes au programme, mais on peut l'étudier en restant dans le cadre du programme...*

❧ Pour rassurer les inquiets, on précise que I et J sont des intervalles ouverts de longueur strictement positive.

❧ Pour des raisons de commodité, nous munissons les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs normes produit respectives (ce qui n'est pas une restriction comme on sait), qu'on notera toutes les deux $\|\cdot\|_\infty$.

❧ Dans tout ce qui suit, on fixe un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \Omega$.

❧ Comme les intervalles I et J sont ouverts, il existe $r > 0$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times I \times J = \Omega. \tag{5}$$

Comme I est un *intervalle*, il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset [a,b] \quad \text{et} \quad [y_0 - r, y_0 + r] \subset [a,b]. \tag{6}$$

En tant que produits de deux compacts (segments) de $\mathbb{R}$, les rectangles

$$K_1 = [x_0, y_0] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J = U$$

et

$$K_2 = [a,b] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J$$

sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$.

❧ On **fixe** maintenant une tolérance $\varepsilon > 0$.

► Comme la fonction f est continue sur U, elle est en particulier bornée sur le compact $K_2$ :

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, (t,z) \in K_2, \qquad \big|f(t,z)\big| \leqslant A \tag{7}$$

et uniformément continue sur le compact $K_1$ :

$$\begin{aligned}&\exists\, \alpha > 0, \forall\, (t,z), (t_1,z_1) \in K_1,\\ &\qquad \|(t_1,z_1) - (t,z)\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|f(t,z) - f(t_1,z_1)\big| \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

donc en particulier

$$\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [x_0, y_0],\ \forall\, z \in [z_0 - r, z_0 + r], \qquad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies \big|f(t, z) - f(t, z_0)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

► Nous disposons de deux réels strictement positifs : $r$ donné par (1) et $\alpha$ donné par (4). Nous noterons dans la suite $\alpha_0$, le plus petit de ces deux réels :

$$\alpha_0 = \min\{r,\ \alpha\} > 0.$$

De cette manière,

$$[z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset [z_0 - r, z_0 + r]$$

et

$$|z - z_0| \leqslant \alpha_0 \implies |z - z_0| \leqslant \alpha.$$

D'après (3),

$$\forall\, (t, z) \in [a, b] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset K_2, \quad \big|f(t, z)\big| \leqslant A \tag{9}$$

et d'après (4),

$$\forall\, (t, z) \in [x_0, y_0] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0], \quad \big|f(t, z) - f(t, z_0)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

► Nous appliquons maintenant l'astuce taupinale et l'inégalité triangulaire avec opiniâtreté. Quel que soit $(x, y, z) \in [a, b] \times [a, b] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0]$,

$$\begin{aligned}
&\big|F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)\big| \\
&\quad = \left|\left(\int_x^{x_0} f(t, z)\,dt + \int_{x_0}^{y_0} f(t, z)\,dt + \int_{y_0}^{y} f(t, z)\,dt\right) - \int_{x_0}^{y_0} f(t, z_0)\,dt\right| \\
&\quad \leqslant \left|\int_x^{x_0} f(t, z)\,dt\right| + \left|\int_{x_0}^{y_0} f(t, z) - f(t, z_0)\,dt\right| + \left|\int_{y_0}^{y} f(t, z)\,dt\right| \\
&\quad \leqslant A|x - x_0| + \left|\int_{x_0}^{y_0} f(t, z) - f(t, z_0)\,dt\right| + A|y - y_0| && \text{(par (5))}
\end{aligned}$$

car $[x \leftrightarrow x_0] \subset [a, b]$ et $[y \leftrightarrow y_0] \subset [a, b]$. et d'après (6),

$$\left|\int_{x_0}^{y_0} f(t, z) - f(t, z_0)\,dt\right| \leqslant |y_0 - x_0|\,\varepsilon \leqslant (b - a)\varepsilon.$$

► Si on impose *en outre* $|x - x_0| \leqslant \varepsilon/A$ et $|y - y_0| \leqslant \varepsilon/A$, c'est-à-dire

$$\max\big\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\big\} \leqslant \underbrace{\min\{\alpha_0,\ \varepsilon/A\}}_{>0} \quad \text{et} \quad |z - z_0| \leqslant \alpha_0,$$

alors

$$\big|F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)\big| \leqslant (b - a + 2)\varepsilon.$$

Les réels $a$ et $b$ ayant été choisis **avant** $\varepsilon$, ce sont bien des *constantes* et cela prouve que $F$ est continue au point $(x_0, y_0, z_0)$.

**Solution 28** 18-28

**Cas d'une limite finie**

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\varphi\ :\ ]R_0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$$

de limite nulle au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{matrix}\forall\, r \geqslant R_0, \\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{matrix} \qquad (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x, y) - \ell\big| \leqslant \varphi(r)$$

alors la fonction $f$ tend vers $\ell$ au voisinage de l'infini.

**Cas d'une limite infinie**

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\psi\ :\ ]R_0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$$

qui tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, r \geqslant R_0,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \qquad (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x,y)\big| \geqslant \psi(r)$$

alors la fonction $f$ tend vers l'infini au voisinage de l'infini.

✍ *On doit être conscient que l'étude de* $f$ au voisinage de l'infini *signifie que la norme de la variable tend vers* $+\infty$*. Pour se représenter géométriquement la situation, on peut imaginer que la variable peut évoluer n'importe où dans l'ensemble de définition* $A$ *en restant en dehors d'un disque arbitrairement grand.*

*Nous avons choisi les coordonnées polaires à cause des expressions étudiées. On pourrait utiliser n'importe quelle autre norme sur* $\mathbb{R}^2$ *sans modifier les résultats obtenus.* La seule règle est de choisir la norme en fonction de l'expression $f(x,y)$ étudiée.

**1.** Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|(x+y)e^{-(x^2+y^2)}\big| \leqslant \big(|x|+|y|\big)e^{-(x^2+y^2)} \leqslant 2re^{-r^2} = \varphi(r).$$

**2.** Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^4 + y^2 = r^2(r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta).$$

❧ La fonction $\big[\theta \mapsto \cos^4\theta + \sin^2\theta\big]$ est continue et $\pi$-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes (c'est comme si la fonction n'était définie que sur le compact $[0,\pi]$). Comme cette fonction ne s'annule pas (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent pas s'annuler simultanément), son minimum $\alpha$ est strictement positif.

❧ Pour $r \geqslant 1$, on a donc

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad r^2\underbrace{\cos^4\theta}_{\geqslant 0} + \sin^2\theta \geqslant 1\cdot\cos^4\theta + \sin^2\theta \geqslant \alpha > 0$$

et donc

$$\forall\, r \geqslant 1,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad x^4 + y^2 \geqslant \alpha\, r^2 = \psi(r).$$

► La fonction $\big[\theta \mapsto 2\cos^4\theta + \sin^4\theta\big]$ est continue et $\pi$-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Comme cette fonction ne s'annule pas, son minimum $m_1$ est strictement positif. *(Air connu)*

$$\forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4} \leqslant \frac{r^2}{m_1 r^4} = \frac{1}{m_1 r^2} = \varphi(r)$$

✍ *Pour les deux exemples suivants, il est important de remarquer que si l'une des coordonnées* $x$ *ou* $y$ *tend vers l'infini, alors le vecteur* $(x,y)$ *tend aussi vers l'infini puisque*

$$\big\|(x,y)\big\| = r \qquad \textit{et} \qquad r \geqslant |x|, \quad r \geqslant |y|.$$

**3.** Si on se déplace sur l'axe des abscisses,

$$f(x,0) = 4x^2\,\ell n|x| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$$

donc la fonction $f$ n'est pas bornée au voisinage de l'infini.

Si on se déplace sur l'axe des ordonnées,

$$\forall\, y \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

donc la fonction $f$ ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

✍ *Utilisation habituelle du Théorème de composition des limites pour prouver qu'une fonction ne tend pas vers une valeur donnée.*

**4.** Déplaçons-nous sur la courbe d'équation $x^2y = 1$, qui est clairement contenue dans l'ensemble de définition de $f$.

$$[x^2y = 1] \subset A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

Dans ce cas,

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x,y) = f\Big(x, \frac{1}{x^2}\Big) = 1 + \frac{4}{x^2}\,\ell n^2\, x$$

expression qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, la fonction $f$ ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

**5.**

✍ *On rappelle qu'une* ***forme quadratique*** *sur* $\mathbb{R}^3$ *est une fonction* $q$ *définie par la relation*

$$\forall\, u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = u^\top.H.u$$

*où* $H$ *est une matrice symétrique réelle. Cette forme quadratique est* ***définie positive*** *lorsque les valeurs propres de* $H$ *sont toutes strictement positives.*

D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P$ et trois réels

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$$

tels que

$$P^\top.H.P = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{\text{not.}}{=} \Delta$$

et donc

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = u^\top.P.\Delta.P^\top.u = (P^\top.u)^\top.\Delta.(P^\top.u).$$

En notant

$$P^\top.u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad q(u) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et on en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(u) = \lambda_1 a^2 + \underbrace{\lambda_2}_{\geqslant \lambda_1} \underbrace{b^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\lambda_3}_{\geqslant \lambda_1} \underbrace{c^2}_{\geqslant 0} &\geqslant \lambda_1(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \lambda_1 (P^\top.u)^\top (P^\top.u) = \lambda_1 u^\top.u \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{>0} \|u\|^2 = \psi(u) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $q$ tend vers $+\infty$ lorsque $u$ tend vers l'infini (= lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$).

## Solution 29 18-29

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine en tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est $O = (0, 0)$.

❧ Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^4} = \frac{1}{2x^2}.$$

Lorsque la coordonnée $x$ tend vers 0, le point $M = (x, x)$ tend vers $O$ (puisque $\|\mathbf{OM}\|_\infty = |x|$ tend vers 0) et $f(x, x)$ tend vers $+\infty$. Donc la fonction $f$ n'est pas bornée au voisinage de $O$.

❧ Pour tout $x \neq 0$, on a aussi $f(x, 0) = 0$. Lorsque la coordonnée $x$ tend vers 0, le point $N = (x, 0)$ tend vers $O$ (puisque $\|\mathbf{ON}\|_\infty = |x|$ tend vers 0) et $f(x, 0)$ reste bornée (et même constante), donc la fonction $f$ ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de $O$.

## Solution 30 18-30

**1.** La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ en tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est l'origine $O$.

✍ *L'ensemble de définition* $U$ *est un ouvert en tant que complémentaire du fermé* $\{O\}$ *(tout singleton et, plus généralement, tout ensemble fini est fermé).*

*Plus généralement encore, toute fonction rationnelle est définie sur un ouvert car l'ensemble de ses pôles est un fermé. En effet, une fonction rationnelle s'exprime sous la forme*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$$

*où* $P$ *et* $Q$ *sont des fonctions polynomiales sur* $\mathbb{R}^n$.

*En tant que fonctions polynomiales,* $P$ *et* $Q$ *sont des applications continues sur* $\mathbb{R}^n$ *et l'ensemble des pôles de* $f$ *:*

$$\pi(f) = [Q(x_1, \dots, x_n) = 0]$$

*est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application continue $Q$.*

*L'ensemble de définition de $f$ est donc ouvert en tant que complémentaire d'une partie fermée :*

$$U = [\pi(f)]^c$$

*et $f$ est continue sur $U$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule en aucun point de $U$.*

Pour $h = (x, y) \neq O$, en coordonnées polaires (c'est-à-dire en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique),

$$\big|f(O + h)\big| = \big|f(x, y)\big| = r\,|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leqslant 2r = 2\|h\|.$$

Cela prouve bien que $f(h) = \mathcal{O}(h)$ au voisinage de $O$.

En particulier, cela implique que $f(h)$ tend vers $0$ lorsque $h$ tend vers $O$ et qu'on peut donc prolonger $f$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(O) = 0.$$

**2.** L'hypothèse faite sur $f$ signifie que $f$, une fois prolongée par continuité, serait différentiable au point $O$ et que $\varphi$ serait son application linéaire tangente.

$$df(O) = \varphi$$

On sait alors que

$$\varphi(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(0, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Or, pour tout $x \neq 0$ et pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1$$

donc $f$ admet des dérivées partielles au point $O$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = -1.$$

Donc, $\boxed{\textbf{si}}$ $f$ est différentiable au point $O$, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}\big(df(O)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = x - y.$$

❧ Pour $(x, y) \neq O$,

$$f(x, y) - \varphi(x, y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2} = r \cdot \underbrace{\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)}_{\text{expression bornée}}.$$

Il est donc clair que

$$f(O + h) = f(O) + \varphi(h) + \mathcal{O}(h)$$

lorsque $h$ tend vers $0$.

Cependant, le quotient

$$\frac{\big|f(h) - \varphi(h)\big|}{\|h\|}$$

est **indépendant de** $r = \|h\|$ sans être identiquement nul (on peut prendre $\theta = \pi/6$ ou $\theta = -\pi/4$ par exemple), donc ce quotient ne tend pas vers $0$ lorsque $r$ tend vers $0$.

Par conséquent, $f(h) - \varphi(h) \neq o(h)$, ce qui prouve que $f$ *n'est pas* différentiable au point $O$ (bien que $f$ soit continue au point $O$ et admette des dérivées partielles en ce point — ce sont les dérivées partielles de $f$ qui ne sont pas continues au point $O$).

**Solution 31** 18-31

**1.** La norme considérée par l'énoncé est bien une norme sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ : il s'agit de la norme produit associée à la base canonique de $E$ !

$$\|P\| = \left\|\mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}(P)\right\|_\infty$$

Dans le même ordre d'idée, les trois applications coordonnées

$$\varepsilon_2 = \left[P = aX^2 + bX + c \mapsto a\right] \qquad \varepsilon_1 = [P \mapsto b] \qquad \varepsilon_0 = [P \mapsto c]$$

sont linéaires et (donc) continues sur $E$, espace de dimension finie.

❧ Le noyau de la première forme coordonnée :

$$[\varepsilon_2(P) = 0] = [a = 0]$$

est un fermé de $E$ (en tant que noyau d'une forme linéaire continue).

L'ensemble $U$ des polynômes de degré 2 (dont le degré est *exactement égal* à 2) est, par définition, le complémentaire de $[\varepsilon_2(P) = 0]$ :

$$U = [\varepsilon_2(P) \neq 0] = [\varepsilon_2(P) = 0]^c$$

et <u>$U$ est donc un ouvert de $E$</u>.

▶ Soit $P = aX^2 + bX + c$, un polynôme de $E$.
Si $a \neq 0$, alors $P \in U$.
Si $a = 0$, alors $P \notin U$ et on pose alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad P_n = \frac{1}{n}X^2 + bX + c \in U.$$

On a ainsi défini une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $U$ qui converge vers $P$ :

$$\|P - P_n\| = \left\|\frac{1}{n}X^2\right\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc <u>l'ouvert $U$ est bien dense dans $E$</u>.

▶ Les polynômes $A = X^2$ et $B = -X^2$ appartiennent tous les deux à $U$.
S'il existe une application *continue* $f : [0,1] \to E$ telle que

$$f(0) = A, \quad f(1) = B \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad f(t) \in U$$

alors la fonction

$$(\varepsilon_2 \circ f) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

est continue (en tant que composée d'applications continues) sur l'intervalle $[0,1]$, strictement positive en $t = 0$ (car $\varepsilon_2(A) = +1$) et strictement négative en $t = 1$ (car $\varepsilon_2(B) = -1$). D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, il existe donc un instant $t_0 \in\, ]0,1[$ tel que

$$(\varepsilon_2 \circ f)(t_0) = 0$$

c'est-à-dire $f(t_0) \notin U$ : c'est absurde !

Donc <u>l'ouvert $U$ n'est pas connexe par arcs</u>.

✍ *L'ouvert $U$ est l'union de deux composantes connexes par arcs :*

$$U = [a > 0] \sqcup [a < 0].$$

*En effet, si $A = a_1X^2 + b_1X + c_1$ et $B = a_2X^2 + b_2X + c_2$ avec $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, alors la fonction* affine *définie par*

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) &= (1-t)A + tB \\ &= \big[(1-t)a_1 + ta_2\big]X^2 + \big[(1-t)b_1 + tb_2\big]X + \big[(1-t)c_1 + tc_2\big]\end{aligned}$$

*est continue, elle vérifie $f(0) = A$ et $f(1) = B$ et*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad (\varepsilon_2 \circ f)(t) = (1-t)a_1 + ta_2 \in [a_1 \leftrightarrow a_2] \subset \mathbb{R}_+^*.$$

*On vient en fait de démontrer que les deux composantes connexes par arcs de $U$ sont des parties <u>convexes</u> !*

*Idem si $a_1$ et $a_2$ sont strictement négatifs.*

**2. a.** L'application

$$\left[P \mapsto b^2 - 4ac\right]$$

est une fonction continue sur $E$ en tant que fonction polynomiale des coordonnées.

Le discriminant $\Delta$ est donc une fonction continue en tant que restriction à l'ouvert $U$ d'une application continue sur $E$.

✍ *Le discriminant n'est défini que sur $U$, pas sur $E$ tout entier !*

**2. b.** Par définition de $\Delta$,

$$F \stackrel{\text{not.}}{=} \left[\Delta(P) = 0\right] = [b^2 - 4ac = 0] \cap U.$$

La partie $[b^2 - 4ac = 0]$ est un fermé de $E$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue (fonction polynomiale des coordonnées), donc <u>$F$ est un fermé relatif à $U$</u>.

► Mais <u>$F$ n'est pas un fermé de $E$</u> ! Considérons les polynômes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$P_n = 2^{-n}X^2.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une suite d'éléments de $F$ et que cette suite converge vers le polynôme nul :

$$\|P_n - 0\| = 2^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

alors que le polynôme nul n'appartient pas à $F$. La partie $F$ n'est donc pas stable par passage à la limite.

**2. c.** On considère un point $P_0 \in F$ et $V$, un voisinage relatif à $U$ de ce point. Il existe donc un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \cap U \subset V.$$

Comme $U$ est un ouvert, si le rayon $r_0 > 0$ est choisi assez petit, on a

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et donc

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset V.$$

Si on note $P_0 = a_0^2 + b_0X + c_0$, on sait que

$$a_0 \neq 0 \quad \text{et que} \quad b_0^2 - 4a_0c_0 = 0$$

(par définition de $P_0 \in F$). Il est alors clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_0^2 - 4a_0(c_0 + 2^{-n}) = -2^{-n+2}a_0 \neq 0$$

et donc que

$$Q_n = a_0X^2 + b_0X + (c_0 + 2^{-n}) \notin F$$

alors que

$$Q_n \in U \qquad \text{et} \qquad \|Q_n - P_0\| = 2^{-n}$$

ce qui signifie que $Q_n \in V$ pour tout $n$ assez grand.

En clair : si $P_0 \in F$, on a trouvé une suite de polynômes $(Q_n)$ qui converge vers $P_0$ alors qu'aucun de ces polynômes n'appartient à $F$.

En VO : tout voisinage relatif à $U$ d'un polynôme $P_0 \in F$ rencontre $F^c$, c'est-à-dire : $F$ est une partie d'intérieur vide relativement à $U$.

✍ *Il faut faire le parallèle avec $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ! L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et d'intérieur vide, puisque tout voisinage d'un nombre $x_0 \in \mathbb{Q}$ contient des irrationnels.*

**Solution 32** 18-32

La fonction $F$ est naturellement définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la diagonale $\Delta = [y = x]$ et comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $F$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que quotient de la différence des fonctions continues

$$(x,y) \overset{\text{lin.}}{\longmapsto} x \overset{\text{cont.}}{\longmapsto} f(x) \quad \text{et de} \quad (x,y) \longmapsto y \longmapsto f(y)$$

par la fonction linéaire (ou polynomiale)

$$(x,y) \longmapsto x - y$$

qui ne s'annule pas sur la diagonale $\Delta$.

► Le prolongement de $F$ à $\mathbb{R}^2$ défini par l'énoncé est le plus naturel qui soit. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé*,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \xrightarrow[y \to x]{} f'(x)$$

puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{y \to x} F(x,y) = F(x,x), \tag{11}$$

condition minimale pour que $F$ soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Il reste à prouver que ce prolongement est bien continu sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire (compte tenu de ce qui précède) continu en chaque point $(x_0, x_0)$ de la diagonale $\Delta$.

✍ *La propriété (1) n'indique qu'une "continuité partielle" de la fonction $F$, puisqu'une seule variable varie ($y$), l'autre variable étant fixée ($x$ est fixée par le quantificateur).*

*NB : La "continuité partielle" n'a pas de sens mathématique, c'est juste une façon imagée de parler.*

► **Première méthode**

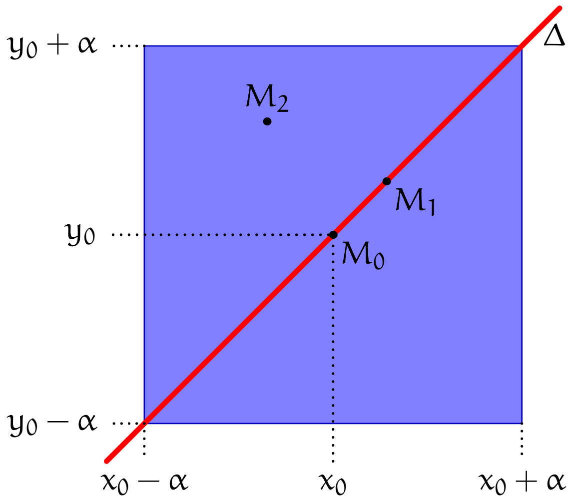
Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, le point $M_0 = (x_0, x_0)$ sur la diagonale et une tolérance $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \qquad \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

▷ Considérons maintenant un point $M = (x,y)$, distinct de $M_0$, tel que

$$\|\mathbf{M_0 M}\|_\infty \leqslant \alpha.$$

On doit distinguer deux cas : ou bien $M$ est sur la diagonale (cas $M_1$), ou bien $M$ n'est pas sur la diagonale (cas $M_2$).




▷ Si $x = y$, alors

$$\left|F(x,y) - F(x_0,x_0)\right| = \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

par (2), car $|x - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ Si $x \neq y$, alors (Thm des accroissements finis) il existe

$$c \in [x \leftrightarrow y] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

tel que $F(x,y) = f'(c)$ et par conséquent, à nouveau par (2),

$$\left|F(x,y) - F(x_0,x_0)\right| = \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

car $|c - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ *Dans les deux cas,* on a bien

$$\left|F(x,y) - F(x_0,y_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

▷ On a donc démontré qu'il existait un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^2, \quad \|\mathbf{M_0M}\|_\infty \leqslant \alpha \implies \left|F(M) - F(M_0)\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que F est continue au point $M_0 = (x_0, y_0)$, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et donc que F est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

► **Variante savante**

Pour $x = y$,

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \int_0^1 f'(x)\,dt = f'(x).$$

Pour $x \neq y$, on effectue le changement de variable affine

$$u = x + t(y-x) = (1-t)x + ty$$

et on trouve

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \frac{1}{y-x}\int_x^y f'(u)\,du = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Donc, quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt.$$

✍ *Évidemment, c'est un début assez siouxx ! L'avantage est de disposer maintenant d'une expression* unique *pour* F.

▷ Il nous reste à vérifier les hypothèses du théorème de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre.

❧ Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

❧ Quel que soit $t \in [0,1]$, la fonction

$$[(x,y) \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions continues.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathscr{C}^0} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x + t(y-x) & \longmapsto & f'(x + t(y-x)) \end{array}$$

❧ Restreinte à un segment $[-a,a]$, la fonction $f'$ est bornée (puisqu'elle est continue), donc il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall\, t \in [0,1],\ \forall\,(x,y) \in [-a,a] \times [-a,a], \quad \Big|f'\big(\underbrace{x + t(y-x)}_{\in[-a,a]}\big)\Big| \leqslant A.$$

❧ D'après le Théorème de convergence dominée (version "convergence bornée"), la fonction

$$F = \left[(x,y) \mapsto \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt\right]$$

est continue sur tout compact de la forme $[-a,a] \times [-a,a]$.

▷ Comme la continuité est une propriété locale, la fonction F est continue sur

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a>0} [-a,a] \times [-a,a].$$