

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice à **diagonale fortement dominante** :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|,$$

alors elle est inversible.

Comme A est une matrice carrée, elle est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit à la colonne nulle.

• Considérons donc $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et supposons que $X \neq 0$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Une famille **finie** de réels admet un plus grand élément, donc il existe un indice $1 \leq i_0 \leq n$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0.$$

• Si $AX = 0$, alors (formule du produit matriciel)

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0.$$

En particulier, pour $i = i_0$,

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} a_{i_0,j} x_j$$

et par inégalité triangulaire

$$|a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}| |x_j|.$$

Divisons par $|x_{i_0}| > 0$:

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}.$$

• Il faut préciser d'une part qu'on ne divise pas par zéro (parce que **diviser par zéro, c'est mal**) et d'autre part que le sens de l'inégalité est conservé (il ne suffit pas de ne pas diviser par zéro, il faut ici diviser par un réel **strictement positif**).

Par définition de i_0 ,

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq 1$$

et comme les $|a_{i_0,j}|$ sont tous positifs, on en déduit que

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}|,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale sur les coefficients de la matrice A .

• Par contraposée : si A est une matrice carrée à diagonale fortement dominante, alors son noyau est réduit à la colonne nulle et elle est donc inversible.