

Soit $n \geq 5$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un sous-espace V de dimension $k \leq n - 4$. La projection orthogonale sur V est notée π_V et la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de cette projection est notée P .

On note A , la matrice P privée de sa diagonale et $D = P - A$.

On considère un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ sont supposées indépendantes et de même loi :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

On étudie ici la variable aléatoire

$$R = d(X, V) = \min_{v \in V} \|X - v\|.$$

1. Démontrer que $R(\omega) \leq \sqrt{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \langle x | x - \pi_V(x) \rangle.$$

3. En déduire que

$$R^2 = n - k - X^\top \cdot A \cdot X.$$

Calculer $\mathbf{E}(R^2)$.

4. Démontrer que $\text{tr } D^2 \geq k^2/n$.

5. Démontrer que

$$\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] \leq \frac{2k(n-k)}{n}.$$

6. Démontrer que

$$\mathbf{P}(R \geq \sqrt{n-k} + 2) \leq \frac{k}{8n}.$$

1. D'après le cours,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega)^2 = \|X(\omega) - \pi_V(X(\omega))\|^2 = \|(I - \pi_V)(X(\omega))\|^2 \leq \|X(\omega)\|^2$$

puisque $I - \pi_V$ est une projection orthogonale (la projection orthogonale sur $V^\perp$).

Comme les coordonnées de X sont des variables aléatoires de Rademacher,

$$\|X(\omega)\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2(\omega) = n$$

et on a donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq R(\omega) \leq \sqrt{n}.$$

2. Cf cours.

3. (Dorénavant, la variable ω sera sous-entendue.)

Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée. Par conséquent, d'après la première question,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^\top \cdot (I - P) \cdot X \\ &= X^\top \cdot (I - D - A) \cdot X \\ &= X^\top \cdot (I - D) \cdot X - X^\top \cdot A \cdot X. \end{aligned}$$

En notant $c_1, \dots, c_n$, les coefficients diagonaux de la matrice D ,

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{i=1}^n (1 - c_i) X_i^2 - X^\top \cdot A \cdot X \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - c_i) - X^\top \cdot A \cdot X \quad (\text{car } X_i^2 = 1) \\ &= (n - \text{tr } D) - X^\top \cdot A \cdot X. \end{aligned}$$

Par définition, les coefficients diagonaux de D sont aussi les coefficients diagonaux de P , donc $\text{tr } D = \text{tr } P = \text{rg } P$ (puisque la trace de toute projection est aussi le rang de cette projection). Comme π_V est la projection sur un sous-espace de dimension k , le rang de P est égal à k et on a donc bien

$$\forall \omega \in \Omega, \quad R^2(\omega) = n - k - X^\top(\omega) \cdot A \cdot X(\omega).$$

♣ Comme R^2 est une variable aléatoire bornée, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $a_{i,i} = 0$ (par construction de A) et d'après la formule du produit matriciel,

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{i \neq j} X_i \cdot a_{i,j} \cdot X_j.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires bornées. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\top \cdot A \cdot X) = \sum_{i \neq j} a_{i,j} \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes (puisque $i \neq j$) et centrées, donc

$$\forall i \neq j, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) = 0$$

donc $\mathbf{E}(X^\top \cdot A \cdot X) = 0$ et finalement

$$\mathbf{E}(R^2) = n - k.$$

4. Avec les notations utilisées plus haut,

$$\text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

On a déjà remarqué que

$$\sum_{i=1}^n c_i = \text{tr } D = \text{tr } P = k.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$k = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 1 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(D^2)}$$

et par conséquent

$$\text{tr}(D^2) \geq \frac{k^2}{n}.$$

5. On a justifié précédemment que

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j$$

était une combinaison linéaire de variables aléatoires centrées. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] &= \mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) \\ &= \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 \mathbf{V}(X_i X_j) + \sum_{\substack{(i,j) \neq (p,q) \\ \text{avec } i \neq j, p \neq q}} a_{i,j} a_{p,q} \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_p X_q). \end{aligned}$$

♣ Pour $i \neq j$, le produit $X_i X_j$ est une variable aléatoire centrée, donc

$$\mathbf{V}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i^2 X_j^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

♣ Pour $(i, j) \neq (p, q)$ avec $i \neq j$ et $p \neq q$, il faut distinguer plusieurs cas.

► Si $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$, alors $X_i X_j$ et $X_p X_q$ sont indépendantes (lemme des coalitions), donc leur covariance est nulle.

► Si $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ est un singleton, on peut supposer que $i = p$ et $j \neq q$ (puisque $i \neq j$ et $p \neq q$). Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_i X_q) &= \mathbf{E}(X_i^2 X_j X_q) - \mathbf{E}(X_i X_j) \mathbf{E}(X_i X_q) \\ &= \mathbf{E}(X_j X_q) = 0 \end{aligned}$$

puisque $X_i^2 = 1$ et que les trois variables aléatoires $X_i X_j$, $X_i X_q$ et $X_j X_q$ sont centrées (les indices sont distincts).

► Enfin, si $\{i, j\} = \{p, q\}$, alors $i = q$ et $j = p$ (puisque les couples (i, j) et (p, q) sont distincts), donc

$$\mathbf{Cov}(X_i X_j, X_j X_i) = \mathbf{V}(X_i X_j) = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) = \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j} a_{j,i}.$$

Comme elle représente une projection orthogonale dans une base orthonormée, la matrice P est symétrique (réelle) et la matrice A est symétrique elle aussi, donc

$$\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] = \mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) = 2 \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2.$$

♣ Il est temps de se souvenir de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] &= 2 \left[\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 \right] \\ &= 2 [\text{tr}(P^\top \cdot P) - \text{tr}(D^\top \cdot D)] \\ &= 2 [\text{tr} P - \text{tr}(D^2)] \end{aligned}$$

puisque $P^\top \cdot P = P^2 = P$ (matrice de projection orthogonale relative à une base orthonormée) et $D^\top \cdot D = D^2$ (matrice diagonale, donc symétrique).

On a vu plus haut que $\text{tr} P = k$ et d'après la minoration de la question précédente,

$$\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] = 2[k - \text{tr}(D^2)] \leq 2\left[k - \frac{k^2}{n}\right] = \frac{2(n-k)k}{n}.$$

6. Comme R est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned} [R \geq \sqrt{n-k} + 2] &= [R^2 \geq n-k + 4 + 4\sqrt{n-k}] \\ &= [-X^\top \cdot A \cdot X \geq 4 + 4\sqrt{n-k}] \\ &\subset [(X^\top \cdot A \cdot X)^2 \geq 16(1 + \sqrt{n-k})^2]. \end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Markov et de la majoration précédente que

$$\mathbf{P}(R \geq \sqrt{n-k} + 2) \leq \frac{\mathbf{E}((X^\top \cdot A \cdot X)^2)}{16(1 + \sqrt{n-k})^2} \leq \frac{k}{8n} \cdot \frac{(n-k)}{(1 + \sqrt{n-k})^2} \leq \frac{k}{8n}.$$

1. Soit E , un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On rappelle que, par définition, un sous-espace H de E est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que H et D soient supplémentaires dans E .

Démontrer qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire ℓ sur E , non identiquement nulle, telle que

$$H = \text{Ker } \ell.$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \text{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $E^* = L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

3. Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & 1 \\ 1 & \text{---} & 0 & 0 \\ 0 & \text{---} & 1 & 0 \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer $\text{tr}(J_r C)$ pour $1 \leq r \leq n$.

4. En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

1. Supposons que H soit un hyperplan de E . Par définition, il existe une droite D telle que

$$E = H \oplus D$$

et comme D est une droite, il existe un vecteur u (non nul!) tel que $D = \mathbb{K} \cdot u$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc un unique couple

$$(y, \ell(x)) \in H \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x) \cdot u. \quad (1)$$

On a ainsi défini une application $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$.

► Étant donnés deux vecteurs x_1 et x_2 dans E , il existe donc deux vecteurs y_1 et y_2 dans H et deux scalaires $\ell(x_1)$ et $\ell(x_2)$ tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1) \cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2) \cdot u.$$

Pour tout scalaire α , on a donc

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = (\alpha \cdot y_1 + y_2) + [\alpha \ell(x_1) + \ell(x_2)] \cdot u.$$

Mais en appliquant (1) au vecteur $\alpha \cdot x_1 + x_2$, on a aussi

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in H} + \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) \cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (1) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) = \alpha \ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que ℓ est bien une forme linéaire sur E .

► Comme $u = 0_E + 1 \cdot u$ avec $0_E \in H$ et $1 \in \mathbb{K}$, l'unicité de la décomposition (1) nous dit que $\ell(u) = 1$, donc la forme linéaire ℓ n'est pas identiquement nulle.

► Si $\ell(x) = 0$, alors $x = y + \ell(x) \cdot u = y \in H$.

Réciproquement, si $x \in H$, alors $x = x + 0 \cdot u$ avec $x \in H$ et $0 \in \mathbb{K}$. À nouveau, l'unicité de la décomposition (1) nous donne $\ell(x) = 0$.

L'hyperplan H est donc bien le noyau de la forme linéaire ℓ .

• Réciproquement, si H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non identiquement nulle, alors il existe un vecteur u tel que $\ell(u) \neq 0$. Par linéarité de ℓ , ce vecteur u ne peut être nul et

$$\forall x \in H, \quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot \ell(u) = \ell\left(\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\right),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u$$

appartient à $\text{Ker } \ell = H$ (principe de superposition).

Chaque vecteur $x \in E$ admet donc une décomposition

$$\underbrace{\left[x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\right]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K} \cdot u},$$

ce qui prouve que $E = H + \mathbb{K} \cdot u$.

Enfin, comme $\ell(u) \neq 0$, le vecteur u n'appartient pas à H et la droite dirigée par $\mathbb{K} \cdot u$ est donc en somme directe avec H .

On a ainsi démontré que $E = H \oplus D$ et donc que H est un hyperplan.

Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.

Considérons un espace E de dimension 3 et un plan $P \subset E$: il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de ce plan et on peut la compléter en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E . À cette base correspondent des formes coordonnées $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*$ telles que

$$\forall u \in E, \quad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan P est le noyau de la forme coordonnée ε_3^* :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E , le plan P peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le plan P apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall u : (x, y, z) \in E, \quad \ell(u) = ax + by + cz.$$

On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \text{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Φ est donc bien une application de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace dual $E^* = L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E .

• Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ , un scalaire. Alors

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}[(\lambda A + B)M] &= \text{tr}(\lambda AM + BM) \\ &= \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) \\ &= \lambda \Phi(A)(M) + \Phi(B)(M). \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda \Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que Φ est une application linéaire de E dans E^* .

On sait que $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ et que $\dim L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = n^2 \times 1 = n^2$, c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que Φ soit injective pour que Φ soit un isomorphisme.

Soit $A \in \text{Ker } \Phi$. Cela signifie que $\text{tr}(AM) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Avec les notations habituelles,

$$\text{tr}(AM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \text{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que Φ était un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

▮ Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle A^T | M \rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3. La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice I_n , donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

• Multiplier à gauche par J_r revient à annuler les $(n - r)$ dernières lignes de la matrice C . Par conséquent,

$$\forall 1 \leq r \leq n, \quad \text{tr}(J_r C) = 0.$$

4. Soit H , un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire *non nulle* ℓ telle que $H = \text{Ker } \ell$ (première question) et une matrice A *non nulle* telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \text{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit} \quad A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \text{tr}(QJ_rP^{-1}M) = \text{tr}(J_rP^{-1}M.Q)$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et $\ell(M) = \text{tr}(J_r C) = 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible PCQ^{-1} .

On a ainsi démontré que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Soient E , un espace vectoriel et $\mathcal{A}$, une sous-algèbre de $L(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0_E\}$ et E .
 Démontrer que, quels que soient les vecteurs $x \neq 0$ et y dans E , il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

• Il est clair que l'ensemble

$$F = \{u(x), u \in \mathcal{A}\}$$

est contenu dans l'espace vectoriel E .

• Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, alors l'application nulle ω_E appartient à $\mathcal{A}$ et par conséquent

$$0_E = \omega_E(x) \in F.$$

Quels que soient le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et les vecteurs a et b dans F , il existe deux endomorphismes u et v dans $\mathcal{A}$ tels que

$$a = u(x) \quad \text{et} \quad b = v(x).$$

Par conséquent,

$$\lambda a + b = (\lambda u + v)(x).$$

Or $\lambda u + v \in \mathcal{A}$ (une algèbre est stable par combinaison linéaire), donc

$$\lambda a + b \in F.$$

Ainsi, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E .

• Une algèbre est, par définition, unitaire, donc $I_E \in \mathcal{A}$ et donc

$$x = I_E(x) \in F.$$

Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, le sous-espace F n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

• Soit $a \in F$: il existe donc $v \in \mathcal{A}$ tel que $a = v(x)$.

Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la composée $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ (stable par $\circ$, qui est la multiplication interne), donc

$$u(a) = (u \circ v)(x) \in F.$$

Le sous-espace F est donc stable par $\mathcal{A}$. Comme il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, il est par hypothèse égal à E .

• Pour tout $y \in E$, on a donc $y \in F$ et, par construction de F , il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

1. Démontrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$M^{-1} = P(M).$$

2. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$M^{-1} = P(M)$$

pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$?

1. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal $P_0 \in \mathbb{K}[X]$. Or les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres et M est inversible, donc 0 n'est pas racine du polynôme minimal. Ainsi, le coefficient constant du polynôme minimal n'est pas nul :

$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$

Comme P_0 est un polynôme annulateur de M , on en déduit que

$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \dots + a_1M + a_0I_n = 0_n$$

et donc que

$$M(M^{d-1} + a_{d-1}M^{d-2} + \dots + a_2M + a_1I_n) = -a_0I_n,$$

ce qui prouve que le polynôme

$$P = \frac{-1}{a_0}(X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \dots + a_2X + a_1)$$

vérifie $M^{-1} = P(M)$.

2. Le polynôme P qu'on vient d'exhiber dépend de la matrice M .

S'il existait un polynôme P indépendant de la matrice M (entre les deux questions, seule la position des quantificateurs est modifiée), alors il faudrait en particulier que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda I_n) = \frac{1}{\lambda} I_n$$

et donc que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la propriété précédente est impossible (limite à l'origine ou à l'infini !). Il n'existe donc pas de polynôme universel !

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda^{-1} = \lambda$$

et le polynôme $P = X$ vérifie la condition nécessaire.

Il y a $16 = 2^4$ matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, parmi lesquelles six sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que ces six matrices vérifient $A^2 = I_2$, c'est-à-dire $A^{-1} = A$. Autrement dit, le polynôme X convient pour toutes les matrices de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

► Ce n'est pas vrai dans $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ puisque les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont distinctes.

⚡ *Cela prouve que le polynôme X n'est pas universel, cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de polynôme universel !*

► Quels que soient l'entier $n \geq 1$ et le nombre premier p , l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne contient que p^{n^2} matrices, donc le groupe $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini.

En parcourant l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on n'a donc qu'un nombre *fini* de polynômes minimaux.

Le ppcm de ces polynômes est donc un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et le raisonnement de la première question permet d'en déduire qu'il existe un polynôme universel P tel que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad P(M) = M^{-1}.$$

On note D , l'opérateur de dérivation sur l'espace $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'.$$

Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\Phi \in L(E)$ tel que $\Phi \circ \Phi = D$.

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un endomorphisme Φ de E tel que $\Phi^2 = D$.

• On considère le vecteur $f = [x \mapsto e^{-x}] \in E$ et on pose alors

$$g = \Phi(f) \in E.$$

Ce vecteur g n'est pas nul, car

$$\Phi(g) = \Phi \circ \Phi(f) = D(f) = -f \neq 0_E.$$

Le vecteur g est donc un vecteur propre de D associé à la valeur propre -1 :

$$D(g) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(f) = \Phi[(\Phi \circ \Phi)(f)] = \Phi[D(f)] = -\Phi(f) = -g$$

par linéarité de Φ .

• Mais chercher les vecteurs propres de D associés à la valeur propre -1 :

$$D(y) = (-1) \cdot y$$

équivalent à résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.

Les solutions de cette équation différentielle constituent la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot f$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \cdot f$.

• Par linéarité de Φ , on en déduit que

$$\Phi(g) = \lambda \cdot \Phi(f) = \lambda \cdot g.$$

Mais, par définition de g ,

$$\Phi(g) = (\Phi \circ \Phi)(f) = D(f) = -f,$$

donc

$$f = -\lambda \cdot g = -\lambda \cdot (\lambda \cdot f) = -\lambda^2 \cdot f.$$

Comme $f \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible puisque $\lambda \in \mathbb{R}$.

CQFD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$.

1. On suppose que $\text{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On suppose que $\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1. On connaît un polynôme annulateur de A et il est scindé :

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1).$$

La matrice A est donc trigonalisable. Comme notre polynôme annulateur possède une racine double, rien ne prouve pour le moment que la matrice A soit diagonalisable. On sait cependant que le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur connu :

$$\text{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

Si $\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A)$, alors en fait

$$\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$$

et en particulier A est inversible. Par conséquent, il reste $A^2 = I_n$ et A admet $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme annulateur est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

Dans ce cas, le polynôme $(X-1)(X+1)$ est en fait le polynôme minimal de A .

2. Dans un second temps, on a

$$\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

► Si $n = 2$, alors A possède au plus deux valeurs propres distinctes, donc $\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$ et, pour les mêmes raisons que précédemment, la matrice A est diagonalisable.

► Si $n = 3$ et si $\text{Sp}(A) = \{0, \pm 1\}$, alors A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles).

► Si $n = 3$ et si $\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$, alors A est inversible et, comme plus haut, elle est donc diagonalisable.

► Si $n = 4$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

vérifie bien $A^4 = A^2$ mais

$$A(A - I_4)(A + I_4) = A^3 - A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4,$$

donc son polynôme minimal est $X^2(X-1)(X+1)$, ce qui prouve que A n'est pas diagonalisable.

On aurait pu aussi observer que le noyau de A était une droite et que, par conséquent, la somme des dimensions des sous-espaces propres était égale à 3 (et pas à 4) pour conclure.

|| Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, deux matrices telles que AB soit diagonalisable et inversible.
 || Alors BA est aussi diagonalisable.

✎ On propose une première solution en supposant que les deux matrices A et B sont carrées. On traitera dans un second temps le cas général.

♣ Par hypothèse,

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) \neq 0$$

donc A et B sont inversibles.

On en déduit que

$$B(AB)B^{-1} = BA$$

ce qui prouve que les matrices AB et BA sont semblables.

Comme AB est diagonalisable, on en déduit que BA est aussi diagonalisable.

✎ On en déduit également que les matrices AB et BA ont même polynôme minimal, même polynôme annulateur, mêmes valeurs propres...

♣ On suppose ici que $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, si bien que $AB \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$.

Comme AB est diagonalisable, son polynôme minimal P_0 est scindé, à racines simples et comme AB est inversible, 0 n'est pas racine de P_0 . Il existe donc un entier $d \geq 2$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ deux à deux distincts et non nuls tels que

$$P_0 = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k) \quad (*)$$

mais aussi des scalaires $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ tels que

$$P_0 = X^d + \alpha_{d-1}X^{d-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0$$

et donc tels que

$$P_0(AB) = 0_n = (AB)^d + \alpha_{d-1}(AB)^{d-1} + \dots + \alpha_1(AB) + \alpha_0 I_n$$

En multipliant à gauche par B et à droite par A , on en déduit que

$$0_n = B(AB)^d A + \alpha_{d-1} B(AB)^{d-1} A + \dots + \alpha_1 B(AB)A + \alpha_0 BA$$

et comme $B(AB)^k A = (BA)^{k+1}$, on en déduit que

$$P_1 = XP_0 = X \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$$

est un polynôme annulateur de BA .

Comme P_0 est scindé, à racines simples et n'admet pas 0 parmi ses racines, le polynôme P_1 est lui aussi scindé, à racines simples, ce qui prouve que BA est diagonalisable.

✎ Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de lignes et au nombre de colonnes de cette matrice.

En supposant que $AB \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on fait l'hypothèse que le rang de AB est égal à n . Or le rang de AB est inférieur au rang de A et donc au nombre de colonnes de A , donc $n \leq p$.

Si $n \neq p$, alors $n < p$. Comme le rang de $BA \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ est majoré par le rang de B et donc par le nombre n de lignes de B , le rang de BA est inférieur à n et donc strictement inférieur à p : en aucun cas, la matrice BA ne peut être inversible.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = AM + MA.$$

1. Démontrer que Φ est diagonalisable.
2. Exprimer la trace de Φ en fonction du rang de A .

1. Comme $A^2 = A$,

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi \circ \Phi(M) &= \Phi(AM + MA) \\ &= \Phi(M) + 2AMA, \\ \Phi^3(M) &= \Phi(M) + 6AMA. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\Phi^3 - 3\Phi^2 = -2\Phi$$

et donc que

$$X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de Φ . Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que Φ est diagonalisable.

2. Comme A est une matrice de projection, il existe une matrice inversible P et un entier $0 \leq r \leq n$ (le rang de A) tels que

$$P^{-1}AP = J_r \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P^{-1}\Phi(M)P = J_r P^{-1}MP + P^{-1}MP J_r = \Psi(P^{-1}MP) \quad (2)$$

où Ψ est l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Psi(Q) = J_r Q + Q J_r.$$

La relation (2) montre que la matrice M est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ si, et seulement si, la matrice $N = P^{-1}MP$ est un vecteur propre de Ψ associé à λ . Comme la **conjugaison** $[M \mapsto P^{-1}MP]$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que Φ et Ψ ont même spectre et que leurs sous-espaces propres ont mêmes dimensions.

• On sait donc déjà que les valeurs propres de Ψ sont 0, 1 et 2. On effectue les calculs par blocs : avec

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix},$$

on a

$$J_r Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q J_r = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \Psi(Q) = \begin{pmatrix} 2Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

- $\Psi(Q) = 2Q$ si, et seulement si, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ et $Q_4 = 0$, le bloc Q_1 étant quelconque ;
- $\Psi(Q) = Q$ si, et seulement si, $Q_1 = 0$ et $Q_4 = 0$, les blocs Q_2 et Q_3 étant quelconques ;
- $\Psi(Q) = 0_n$ si, et seulement si, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ et $Q_3 = 0$, le bloc Q_4 étant quelconque.

• On en déduit que

$$\dim \text{Ker}(\Phi - 2I) = r^2, \quad \dim \text{Ker}(\Phi - I) = 2r(n-r) \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker} \Phi = (n-r)^2.$$

On a ainsi retrouvé par un calcul direct que Φ était diagonalisable et on en déduit la trace de Φ .

$$\text{tr} \Phi = 2r^2 + 2r(n-r) = 2rn$$

✎ On peut faire semblant d'éviter les calculs par blocs (mais la démarche qui suit revient précisément à faire du calcul par blocs) en considérant un projecteur p .

On sait que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ (propriété de tous les projecteurs) et on va appliquer un certain nombre de fois le Théorème de caractérisation des applications linéaires : si $E = F \oplus G$, quelles que soient les applications linéaires $f \in L(F, E)$ et $g \in L(G, E)$, il existe un, et un seul, endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$\forall x \in F, \quad u(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad u(x) = g(x).$$

► Considérons l'application identiquement nulle $f : \text{Ker } p \rightarrow E$, une application linéaire $g : \text{Im } p \rightarrow E$ telle que $\text{Im } g \subset \text{Ker } p$ et l'endomorphisme u caractérisé par f et g .

On peut vérifier sans peine que

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad u \circ p(x) &= 0_E = u(x) & \forall x \in G, \quad u \circ p(x) &= u(x) \\ \forall x \in F, \quad p \circ u(x) &= 0_E & \forall x \in G, \quad p \circ u(x) &= 0_E \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = u$ et $p \circ u = \omega$ et donc que $\Phi(u) = u$.

Le sous-espace propre de Φ associé à 1 contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à $L(\text{Im } p, \text{Ker } p)$.

► Considérons une application linéaire quelconque $f : \text{Ker } p \rightarrow E$ telle que $\text{Im } f \subset \text{Im } p$, l'application identiquement nulle $g : \text{Im } p \rightarrow E$ et l'endomorphisme u caractérisé par f et g .

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad u \circ p(x) &= 0_E & \forall x \in G, \quad u \circ p(x) &= 0_E \\ \forall x \in F, \quad p \circ u(x) &= u(x) & \forall x \in G, \quad p \circ u(x) &= 0_E = u(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = \omega$ et $p \circ u = u$ et donc que $\Phi(u) = u$.

Le sous-espace propre de Φ associé à 1 contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à $L(\text{Im } p, \text{Ker } p)$.

Ces deux sous-espaces vectoriels sont clairement en somme directe (leur intersection est réduite à l'endomorphisme nul), donc le sous-espace propre de Φ associé à 1 contient un sous-espace de dimension $2r(n-r)$.

► Considérons une application linéaire quelconque $f : \text{Ker } p \rightarrow E$ telle que $\text{Im } f \subset \text{Ker } p$, l'application identiquement nulle $g : \text{Im } p \rightarrow E$ et l'endomorphisme u caractérisé par f et g .

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad u \circ p(x) &= 0_E & \forall x \in G, \quad u \circ p(x) &= 0_E \\ \forall x \in F, \quad p \circ u(x) &= 0_E & \forall x \in G, \quad p \circ u(x) &= 0_E \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = p \circ u = \omega$ et donc que $\Phi(u) = \omega$.

Le noyau de Φ (= le sous-espace propre associé à 0) contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à $L(\text{Ker } p, \text{Ker } p)$. La dimension du noyau de Φ est donc au moins égale à $(n-r)^2$.

► Considérons l'application identiquement nulle $f : \text{Ker } p \rightarrow E$ et une application linéaire quelconque $g : \text{Im } p \rightarrow E$ telle que $\text{Im } g \subset \text{Im } p$, ainsi que l'endomorphisme u caractérisé par f et g .

On vérifie cette fois que

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad u \circ p(x) &= 0_E = u(x) & \forall x \in G, \quad u \circ p(x) &= u(x) \\ \forall x \in F, \quad p \circ u(x) &= 0_E = u(x) & \forall x \in G, \quad p \circ u(x) &= u(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \circ p = p \circ u = u$ et donc que $\Phi(u) = 2u$.

Le sous-espace propre de Φ associé à 2 contient donc un sous-espace vectoriel isomorphe à $L(\text{Im } p, \text{Im } p)$. La dimension de ce sous-espace propre est donc au moins égale à r^2 .

► Comme $2(n-r)r + (n-r)^2 + r^2 = n^2$, ces inclusions sont en fait des égalités et on a caractérisé les vecteurs propres de Φ .

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'application $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A(M) = AM.$$

Démontrer que A et f_A ont même spectre.

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors

$$AX = \lambda X$$

donc la matrice

$$M = (X \quad \cdots \quad X) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

n'est pas la matrice nulle (puisque X n'est pas la colonne nulle) et

$$f_A(M) = AM = (AX \quad \cdots \quad AX) = \lambda M$$

donc M est un vecteur propre de f_A associé à λ .

✎ Les matrices

$$(X \ 0 \ \cdots \ 0), \quad (0 \ X \ 0 \ \cdots \ 0), \quad \dots, \\ (0 \ \cdots \ 0 \ X \ 0), \quad (0 \ \cdots \ 0 \ X)$$

forment une famille libre de n vecteurs propres de f_A associés à λ . Si la matrice A est diagonalisable, alors on peut définir une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et en déduire une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de f_A : cela prouve que f_A est diagonalisable.

♣ Réciproquement, s'il existe une matrice carrée

$$M = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n) \neq 0_n$$

telle que

$$f_A(M) = \lambda M,$$

alors

$$(AC_1 \ AC_2 \ \cdots \ AC_n) = AM = \lambda M = (\lambda C_1 \ \lambda C_2 \ \cdots \ \lambda C_n).$$

Comme $M \neq 0_n$, il existe au moins une colonne C_j non nulle et comme

$$AC_j = \lambda C_j,$$

on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A .

Soient $E = \mathbb{C}[X]$ et $Q \in E$, un polynôme distinct du polynôme nul. Pour tout $P \in E$, on pose

$$N_Q(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)Q(t)|.$$

1. Démontrer que N_Q est une norme sur E .

2. Les normes N_Q et N_1 sont-elles équivalentes ?

NB : La norme N_1 désigne ici la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $[-1, 1]$ (ce qui revient à choisir $Q = 1$ dans la norme N_Q).

1. Comme le produit PQ peut être considéré comme une application continue sur le compact $[-1, 1]$, il est clair que l'application N_Q est bien définie sur E ; qu'elle prend des valeurs positives; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Enfin, si $N_Q(P) = 0$, alors $PQ = 0$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme) et comme $\mathbb{C}[X]$ est un anneau sans diviseur de zéro, on en déduit que $P = 0$: l'application N_Q sépare les points et c'est donc bien une norme sur E .

2. Comme la fonction (associée à) Q est continue sur le compact $[-1, 1]$, elle est bornée et par conséquent

$$\forall P \in E, \quad N_Q(P) = \|PQ\|_\infty \leq \|Q\|_\infty \cdot \|P\|_\infty = \|Q\|_\infty \cdot N_1(P).$$

La norme N_1 domine donc la norme N_Q .

✱ Réciproquement, si Q n'a pas de racines sur le segment $[-1, 1]$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad |Q(t)| \geq \alpha.$$

🔗 Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes : on peut donc prendre pour α le minimum de $|Q(t)|$ — minimum qui n'est pas nul.

On en déduit alors que

$$\forall P \in E, \forall t \in [-1, 1], \quad |P(t)Q(t)| \geq \alpha |P(t)|.$$

Comme $|P(t)|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$, il existe $t_0 \in [-1, 1]$ tel que

$$|P(t_0)Q(t_0)| \geq \alpha |P(t_0)| = \alpha \|P\|_\infty.$$

Comme le sup est un majorant, on en déduit que

$$\alpha \|P\|_\infty \leq \|PQ\|_\infty = N_Q(P).$$

Le facteur α est strictement positif et indépendant de P (il ne dépend que de Q), donc on a bien démontré que la norme N_Q domine dans ce cas la norme N_1 .

Ainsi, si Q n'a pas de racine dans $[-1, 1]$, les normes N_1 et N_Q sont équivalentes.

✱ Supposons maintenant que Q admette au moins une racine $\omega \in [-1, 1]$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, les normes N_1 et N_Q ne sont pas équivalentes en établissant qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_1(P_n) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} N_Q(P_n) = 0.$$

► Fixons $\varepsilon > 0$.

▷ Par continuité de Q , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\omega - t| \leq \alpha \implies |Q(t)| \leq \varepsilon.$$

▷ Il existe une fonction f_ε continue sur $[-1, 1]$ telle que $f_\varepsilon(\omega) = 1$ et vérifiant aussi

$$\forall t \in [-1, 1], \quad 0 \leq f_\varepsilon(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad |t - \omega| \geq \alpha \implies f_\varepsilon(t) = 0.$$

✎ *Faites une figure ! On peut choisir une fonction f_ε affine par morceaux...*

La fonction f_ε est continue sur le segment $[-1, 1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe donc $P_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$$

▷ On en déduit d'abord que

$$\begin{aligned} |t - \omega| \geq \alpha &\implies |P_\varepsilon(t)| = |P_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)| \\ &\implies |P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

ensuite que

$$\|P_\varepsilon\|_\infty \leq \|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty + \|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1 + \varepsilon$$

par inégalité triangulaire (le côté classique) et enfin que

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon(\omega)| &= |P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega) + f_\varepsilon(\omega)| \\ &\geq |f_\varepsilon(\omega)| - |P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega)| \\ &\geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire (le côté méconnu).

Cette dernière inégalité montre que $\|P_\varepsilon\|_\infty \geq 1 - \varepsilon$.

▷ Pour $|t - \omega| \geq \alpha$,

$$|Q(t)P_\varepsilon(t)| \leq \|Q\|_\infty \|P_\varepsilon\|_\infty \leq \|Q\|_\infty \cdot \varepsilon.$$

D'autre part, pour $|t - \omega| \leq \alpha$,

$$|Q(t)P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \cdot \|P_\varepsilon\|_\infty.$$

En prenant une constante K supérieure à $\|Q\|_\infty$ et à $1 + \varepsilon \geq \|P_\varepsilon\|_\infty$, on a donc

$$N_Q(P_\varepsilon) = \|QP_\varepsilon\|_\infty \leq K\varepsilon.$$

► Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $\varepsilon = 1/n$, si bien que $0 < \varepsilon \leq 1/2$. On a justifié l'existence d'une suite $(U_n)_{n \geq 2}$ de polynômes (avec $U_n = P_{1/n}$) telle que

$$\forall n \geq 2, \quad N_1(U_n) = \|U_n\|_\infty \geq 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

et que

$$\forall n \geq 2, \quad N_Q(U_n) = \|QU_n\|_\infty \leq K \frac{1}{n}$$

(où on a choisi $K \geq \|Q\|_\infty$ et $K \geq 2 \geq \|U_n\|_\infty$).

► Ces encadrements prouvent que la norme N_1 n'est pas dominée par N_Q et donc que ces normes ne sont pas équivalentes.

✱ En conclusion, la norme N_1 et la norme N_Q sont équivalentes si, et seulement si, le polynôme Q n'a pas de racine sur $[-1, 1]$.

Déterminer les nombres complexes z pour lesquels l'ensemble

$$G = \{\exp(izt), t \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $[t \mapsto \exp(izt)]$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Par conséquent, son image G est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

• Si z a pour représentation cartésienne $a + ib$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\exp(izt)| = \exp(-bt).$$

Par conséquent, si $b \neq 0$, alors $\exp(izt)$ tend vers 0 $\notin G$ lorsque t tend vers $+\infty$ (pour $b > 0$) ou lorsque t tend vers $-\infty$ (pour $b < 0$). Cela contredit le fait que G est supposé fermé.

• Supposons réciproquement que z soit réel. Dans ce cas, l'application $[t \mapsto e^{izt}]$ est $\frac{2\pi}{z}$ -périodique. De ce fait, l'ensemble G est l'image du compact $[0, \frac{2\pi}{z}]$ par une fonction continue, donc G est compact et en particulier fermé.

• On a donc démontré que G était fermé si, et seulement si, z était réel (c'est-à-dire $\text{Im } z = 0$). Dans ce cas, G est en fait égal au cercle unité $\mathbb{U}$.

Soit E , l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_{\infty}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. Soit $f \in E$. Exprimer f en fonction de $g = f + 2f' + f''$.
3. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_{\infty} \leq \alpha N(f).$$

4. Les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes ?

1. Il est clair que N est bien définie sur E (norme infinie d'une fonction continue sur un segment) ; qu'elle est positive ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation).

Enfin, si $N(f) = 0$, alors f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 2x' + x = 0$$

qui vérifie en outre $x(0) = x'(0) = 0$, donc f est la fonction nulle (soit par un calcul explicite sachant que $f(t) = (at + b)e^{-t}$, soit en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Donc N est bien une norme sur E .

⚡ Bien entendu, N n'est pas une norme sur $\mathcal{C}^2([0, 1])$.

2. La fonction $f \in E$ considérée est la solution du problème de Cauchy :

$$\forall t \in [0, 1], \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = g(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x_H(t) = (at + b)e^{-t}$ et la méthode de variation des constantes nous donne une solution particulière :

$$x_0(t) = e^{-t} \int_0^t e^s(t-s)g(s) \, ds$$

et en même temps (puisqu'on raisonne sur le couple (x, x') en faisant varier les constantes)

$$x'_0(t) = e^{-t} \int_0^t e^s(1+s-t)g(s) \, ds.$$

⚡ On pourrait dériver et simplifier l'expression de $x_0(t)$: ce n'est pas compliqué, mais c'est un peu long. L'avantage de la méthode de variation des constantes est de nous donner directement une expression simple de la dérivée — et de ne la donner que si nous en avons réellement besoin.

Il apparaît que $x_0(0) = x'_0(0) = 0$, donc $f = x_0$!

3. On déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad |f(t)| &\leq \int_0^t \underbrace{e^{s-t}(t-s)}_{\geq 0} \|g\|_{\infty} \, ds \\ &\leq N(f) e^{-t} \int_0^t e^s(t-s) \, ds. \end{aligned}$$

(Les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant.)

Or, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq e^{-t} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad 0 \leq e^s(t-s) \leq e \cdot 1$$

donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq e^{-t} \int_0^t e^s(t-s) \, ds \leq e.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $t \in [0, 1]$, donc on peut passer au sup :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_{\infty} \leq e N(f).$$

✎ On vient de démontrer que la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est dominée par la norme N .

Mais la norme N prend en compte les variations de f (présence de f' et de f''), alors que la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ ne tient compte que de l'amplitude de f et pas de ses variations. Pour démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, on va chercher des fonctions dont l'amplitude est limitée et dont les variations sont de plus en plus rapides.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = t \sin nt.$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, que $f_n(0) = f'_n(0) = 0$ et que $\|f_n\|_{\infty} \leq 1$.

Mais

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) + 2f'_n(t) + f''_n(t) = [2 + (1 - n^2)t] \sin nt + n(2 + t) \cos nt$$

et en particulier $f_n(0) + 2f'_n(0) + f''_n(0) = 2n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \geq 2n.$$

Le quotient $N(f_n)/\|f_n\|_{\infty}$ tend vers $+\infty$, donc la norme N n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Soit A , une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On considère une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Démontrer qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $f(t_0)$ appartienne à la frontière ∂A de A .

On rappelle que $\bar{A} = A^\circ \sqcup \partial A$ (par définition de la frontière) et que

$$A = \overset{\circ}{A} \sqcup \partial A \sqcup B$$

où B est le complémentaire de l'adhérence de A (B est donc ouvert).

2. Démontrer que : si A est distinct de E et de l'ensemble vide, alors sa frontière n'est pas vide.

1. Comme $f(1) \in A^c$, alors deux cas se présentent : ou bien $f(1) \in \partial A$ (et dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer), ou bien $f(1) \in B$. Dans la suite, on peut donc supposer que $f(1) \in B$.

On considère l'ensemble

$$X = \{t \in [0, 1] : f(t) \in A\}.$$

Il s'agit d'une partie de $[0, 1]$, donc d'une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Par hypothèse, $f(0) \in A$, donc $0 \in X$: c'est une partie non vide.

D'après l'axiome de la borne supérieure, l'ensemble X admet une borne supérieure t_0 et nous allons démontrer que $f(t_0)$ appartient à la frontière de A , c'est-à-dire (par définition de l'adhérence) que $f(t_0)$ appartient à l'adhérence de A sans appartenir à l'intérieur de A .

Par hypothèse, $f(1) \in B$ et comme B est ouvert, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x - f(1)\| \leq r \implies x \in B \subset A^c.$$

Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [1 - \alpha, 1], \quad \|f(t) - f(1)\| \leq r.$$

Par conséquent

$$\forall t \in [1 - \alpha, 1], \quad f(t) \in A^c.$$

On en déduit que $0 \leq t_0 \leq 1 - \alpha < 1$.

Comme t_0 est la borne supérieure de X , il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers t_0 , c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \in A \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = t_0.$$

Par continuité de f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(t_0) \in \bar{A}.$$

Si $f(t_0)$ appartenait à l'intérieur de A , alors il existerait un réel $r > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x - f(t_0)\| \leq r \implies x \in \overset{\circ}{A}.$$

Par continuité de f et comme $t_0 < 1$, il existerait alors $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad \|f(t) - f(t_0)\| \leq r$$

et par conséquent

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad f(t) \in \overset{\circ}{A} \subset A.$$

Cela signifierait que $[t_0, t_0 + \alpha] \subset X$ et contredirait donc la définition de t_0 comme borne supérieure de X .

Par conséquent, $f(t_0)$ n'appartient pas à l'intérieur de A et appartient bien à la frontière de A .

2. Si $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors il existe $x \in A$ et $y \in A^c$. Comme E est un espace vectoriel, il est convexe et la fonction affine (donc continue)

$$f = [t \mapsto (1 - t)x + ty] : [0, 1] \rightarrow E$$

vérifie

$$f(0) \in A \quad \text{et} \quad f(1) \notin A.$$

D'après la question précédente, la frontière de A possède au moins un point.

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n + an + b + o(1).$$

Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n \ln n + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Ensuite, comme la fonction $f = [t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t) dt = 2 \ln 2 - 1 > 0$$

(théorème sur les sommes de Riemann). Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) - n \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (2 \ln 2 - 1)n$$

et par suite $a = 2 \ln 2 - 1$.

Enfin, on s'intéresse à la différence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 \ln(1+t) dt$$

qui peut aussi s'écrire (relation de Chasles)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n [f(k/n) - f(t)] dt.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) = \frac{1}{1+t}, \quad |f''(t)| = \frac{1}{(1+t)^2} \leq 1.$$

Alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout entier $0 \leq k < n$,

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad \left|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1 + k/n}\right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On peut alors borner chaque intégrale de la manière la plus classique qui soit : pour tout entier $0 \leq k < n$,

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left(f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1 + k/n} \right) dt \right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left| f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1 + k/n} \right| dt \leq \frac{1}{2n^2}$$

et par inégalité triangulaire, la quantité

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 \ln(1+t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \cdot \frac{t - k/n}{1 + k/n} dt \right|$$

est majorée par $1/2n$ (il y a n termes dans la somme).

Il reste à calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \cdot \frac{t - k/n}{1 + k/n} dt = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1}{1 + k/n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + k/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\ln 2}{2}.$$

Finalement, on a trouvé

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n + (2 \ln 2 - 1)n - \frac{\ln 2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

(ce qui est même un peu plus précis que prévu).

Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt.$$

1. Déterminer la limite de F au voisinage droit de 1.

2. Démontrer que F est injective.

Tout d'abord, la fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{e^t}{t} \right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 1$, le segment $[\ln x, 2 \ln x]$ est contenu dans $]0, +\infty[$. Par conséquent, l'expression $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

1. Soit $x > 1$. Par croissance de la fonction $\exp$,

$$\forall t \in [\ln x, 2 \ln x], \quad \frac{x}{t} = \frac{e^{\ln x}}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2 \ln x}}{t} = \frac{x^2}{t}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall x > 1, \quad x \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{dt}{t} \leq f(x) \leq x^2 \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 1, \quad x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2.$$

On peut conclure par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \ln 2.$$

▮ Variante plus compliquée, qui permet néanmoins de réviser plusieurs idées intéressantes...

On peut aussi utiliser le développement en série entière de la fonction $\exp$.

Si le rayon de convergence d'une série entière est infini, il y a convergence normale sur le segment $[\ln x, 2 \ln x]$ (quel que soit $x > 1$) et par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} dt = \ln 2 + \int_{\ln x}^{2 \ln x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} dt && \text{(linéarité)} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{t^{k-1}}{k!} dt && \text{(intégration terme à terme)} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1) \ln^k x}{k \cdot k!} \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(2^k - 1)u^k}{k \cdot k!}$$

est infini. Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ et par composition de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1) \ln^k x}{k \cdot k!} = \lim_{u \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)u^k}{k \cdot k!} = 0.$$

On a ainsi redémontré que $f(x)$ tendait vers $\ln 2$ au voisinage de 1.

2. D'après le Théorème fondamental, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \quad F'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{e^{2 \ln x}}{2 \ln x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0.$$

Comme F est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$, elle est injective.

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la continuité de f .
2. Calculer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer un équivalent de f au voisinage de 0 .

Une remarque préalable : pour tout $x \neq 0$, le terme général de la série est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et pour $x = 0$, le terme général ne tend pas vers 0 , donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Comme elle est évidemment paire, il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie par

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie de u_n , pour tout $a > 0$,

$$\forall x \geq a, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La somme f est donc continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

2. Essayons de deviner l'équivalent de $f(x)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

on peut imaginer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

Il reste à vérifier cette conjecture : pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2x^2} - \frac{1}{1+n^2x^2} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2(1+n^2x^2)}$$

et on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) \leq \frac{\zeta(4)}{x^4}.$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

▮ Variante : pour tout $x > 0$,

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

et cette nouvelle série de fonctions converge normalement sur $]0, +\infty[$ puisque

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et retrouver ainsi l'équivalent calculé ci-dessus.

3. Lorsque x tend vers 0, le terme général de la série tend vers 1 : cela permet de deviner que f tend vers $+\infty$ mais pas de deviner son ordre de grandeur...

Il est temps de remarquer que la fonction φ définie par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{1 + t^2 x^2}$$

est une fonction continue, positive et décroissante de t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme on a démontré que la série $\sum \varphi(n, x)$ était convergente pour tout $x > 0$, on en déduit que $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ et nous allons pouvoir comparer cette intégrale à la somme $f(x)$.

En s'aidant d'une figure, on arrive à

$$\forall x > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 x^2}.$$

Avec le changement de variable $u = xt$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x \right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Cet encadrement prouve que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et en particulier que f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

🔗 Comme f est une fonction paire, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0-}{\sim} \frac{\pi}{2|x|}.$$

Soit A , une partie de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!}$$

et on suppose que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.$$

1. Soit I , une partie finie de A . Calculer

$$\sum_{n \in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$$

et en déduire que A est une partie finie.

2. Que peut-on en conclure ?

Tout d'abord, la série de Poisson $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toute sous-famille d'une famille sommable étant elle-même sommable, on en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait (cours sur la fonction Γ) que $[x \mapsto x^n e^{-x}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale (puisque I est un ensemble **fini**, il est permis d'invoquer la linéarité!), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = \sum_{n \in I} 1 = \#(I).$$

Or $I \subset A$ et le terme général est positif, donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq e^{-x} f(x)$$

et par hypothèse, la fonction $[x \mapsto e^{-x} f(x)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\#(I) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx.$$

Le majorant ne dépendant pas de I , on peut en conclure que la partie A est finie.

Par définition, le cardinal d'une partie A est infini si, et seulement si, on peut extraire de A une partie finie de cardinal arbitrairement grand.

2. Puisque A est un ensemble fini d'indices, la fonction f est en fait polynomiale. Par conséquent, l'équivalent proposé est impossible !

Soit f , une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi f(0)}{2}.$$

Transformons l'intégrale avec le changement de variable linéaire $u = nx$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_n(u) = \frac{f(u/n)}{1+u^2}.$$

• **Intégrabilité** — Comme f est continue et bornée, chaque fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\varphi_n(u) = \mathcal{O}(1/u^2)$ lorsque u tend vers $+\infty$, donc chaque fonction φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• **Convergence simple** — Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0. Par composition de limites, on en déduit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$\varphi = \left[u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2} \right].$$

• **Domination** — Par ailleurs, comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, \quad |\varphi_n(u)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la convergence est dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(u) du = \int_0^{+\infty} \varphi(u) du = f(0) [\operatorname{Arctan} u]_0^{+\infty}$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot f(0).$$

Soit $a > 0$. On considère une fonction g , continue sur $[0, a]$ et telle que $g(0) \neq 0$, et la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^a g(t) e^{-xt} dt.$$

Démontrer que

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

Tout d'abord, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

► Pour $x > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on étudie $x \rightarrow +\infty$), on peut effectuer le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$xF(x) = \int_0^{xa} g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du.$$

► On considère donc la fonction φ définie par

$$\forall 0 \leq u \leq xa, \quad \varphi(x, u) = g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall u > xa, \quad \varphi(x, u) = 0.$$

► **Intégrabilité** — On a déjà justifié que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$[u \mapsto \varphi(x, u)]$$

était intégrable sur $I = [0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, u) du = xF(x).$$

► **Convergence simple** — Comme g est continue en 0,

$$\forall u \in I, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x, u) = g(0) e^{-u}$$

et la fonction $[u \mapsto g(0) e^{-u}]$ est continue sur I (et bien entendu intégrable sur cet intervalle).

► **Domination** — Comme g est continue sur le compact $[0, a]$, elle est bornée. Par conséquent,

$$\forall u \in I, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |\varphi(x, u)| \leq \|g\|_\infty e^{-u}.$$

La majorant trouvé est indépendant de $x > 0$ et intégrable sur I en tant que fonction de u .

Par conséquent, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_I \varphi(x, u) du = \int_I g(0) e^{-u} du = g(0).$$

Comme $g(0) \neq 0$, on peut en déduire que

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

Si $g(0) = 0$, on a seulement démontré que $F(x) = o(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on n'a pas trouvé d'équivalent.

Soit f , une fonction à valeurs réelles, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On note S , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + f(x)y(x) = 0.$$

1. Pour y_1 et y_2 dans S , on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Que dire de w ?

2. Démontrer que S contient des fonctions non bornées.

1. La fonction w est constante.

► Première méthode : comme y_1 et y_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction w est dérivable et

$$w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1(-f y_2) - (f y_1) y_2 \equiv 0.$$

La fonction w est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

► Deuxième méthode : la fonction w est un wronskien de l'équation différentielle. Sous forme résoluble du premier ordre, l'équation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Y'(x) = AY(x) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque wronskien W (et en particulier pour w), il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = K \cdot \exp[x \operatorname{tr} A].$$

Comme la trace de A est nulle, on en déduit que tous les wronskiens sont constants.

2. Si une fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée, alors le produit fy est intégrable (produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée).

Si y est une solution de l'équation différentielle, alors en fait $y'' = -fy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse, on en déduit que la dérivée y' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Comme la fonction y est supposée bornée, la limite de y' est nécessairement nulle.

Ainsi, si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées, alors le wronskien w est constant et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (chaque terme est le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Cela prouve que w est en fait la fonction nulle et donc que y_1 et y_2 sont proportionnelles.

Or S est un plan vectoriel (ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire, linéaire et homogène du second ordre), donc il existe des vecteurs non proportionnels dans S .

Il existe donc des fonctions non bornées dans S .

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax | x \rangle = 0.$$

2. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si, pour toute solution de l'équation différentielle $X' = AX$, l'application $[t \mapsto \|X(t)\|]$ est constante.

1. Supposons que la matrice A soit antisymétrique.

En choisissant une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle Ax | x \rangle = (AX)^T \cdot X = X^T \cdot A^T \cdot X = -X^T \cdot A \cdot X = -\langle x | Ax \rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax | x \rangle = 0.$$

• Réciproquement, supposons que $\langle Ax | x \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle A(x+y) | x+y \rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$\underbrace{\langle Ax | x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Ay | y \rangle}_{=0} + \langle Ax | y \rangle + \langle Ay | x \rangle = 0.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle y | Ax \rangle + \langle Ay | x \rangle = 0.$$

En choisissant à nouveau une **BON** de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$0 = Y^T \cdot (AX) + (AY)^T \cdot X = Y^T \cdot [(A + A^T)X] = 0.$$

Cette propriété étant vraie quelles que soient les colonnes X et Y , on peut en déduire que

$$A + A^T = 0_n$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique.

2. Considérons maintenant la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \|X(t)\|^2 = \langle X(t) | X(t) \rangle$$

où X est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2 \langle X'(t) | X(t) \rangle.$$

► Si X est une solution de l'équation différentielle, alors $X'(t) = A \cdot X(t)$ et comme A est antisymétrique,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2 \langle AX(t) | X(t) \rangle = 0.$$

La dérivée de la fonction f étant identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante et par conséquent que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t .

► Réciproquement, si f est constante pour chaque solution de l'équation différentielle, alors en particulier, quelle que soit la condition initiale $(t = 0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(0) = 2 \langle AX(0) | X(0) \rangle = 2 \langle Ax_0 | x_0 \rangle.$$

D'après le lemme initial, on en déduit que la matrice A est antisymétrique.

On peut aussi remarquer que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire

$$X(t) = \exp(tA) \cdot x_0$$

et donc, dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|X(t)\|^2 &= x_0^T \cdot [\exp(tA)]^T \cdot \exp(tA) \cdot x_0 \\ &= x_0^T \cdot \exp(tA^T) \cdot \exp(tA) \cdot x_0 \\ &= x_0^T \cdot \exp(-tA) \cdot \exp(tA) \cdot x_0 = x_0^T \cdot x_0 = \|X(0)\|^2 \end{aligned}$$

puisque $\exp(-M) = [\exp(M)]^{-1}$ pour toute matrice M .

Démontrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(M) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g\left(\frac{x}{1 + y^2}\right).$$

Notons $U = \mathbb{R}^2$, l'ouvert sur lequel la fonction f est définie et considérons le changement de variables défini par

$$\forall (x, y) \in U, \quad (u, v) = \varphi(x, y) = \left(\frac{x}{1 + y^2}, y\right).$$

Il est clair que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(u, v) = \varphi(x, y) \iff (x, y) = (u(1 + v^2), v).$$

Cela prouve que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2$. En outre, il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (sa première composante est une fonction rationnelle sans pôle sur U , sa deuxième composante est polynomiale) et que la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (ses deux composantes sont polynomiales).

Par conséquent, la fonction $f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, la composée $g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

• D'après la règle de la chaîne, quel que soit $M = (u, v) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}[\varphi^{-1}(M)] \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(M) = 2uv \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1 + y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

▮ Dans les deux dernières lignes, les dérivées partielles de f sont évaluées au point de coordonnées $\varphi^{-1}(M)$; les coordonnées x et y sont considérées comme des fonctions de u et v .

Comme φ^{-1} réalise une bijection de V sur U , on en déduit que

$$\forall (u, v) \in V, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \iff \forall (x, y) \in U, \quad 2xy \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

et on rappelle que, par construction, les fonctions f et g sont liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y).$$

• D'après le cours, une fonction $g(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u, v) \in V, \quad g(u, v) = G(u).$$

Par conséquent, une fonction $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = G\left(\frac{x}{1 + y^2}\right).$$

|| Soit $n \geq 2$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n .

✎ On rappelle que $M \in SL_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det M = 1$.

✎ On rappelle également que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est une application polynomiale). Déterminons l'application linéaire tangente à $\det$ en I_n : pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)} = (1 + h_{1,1}) \cdots (1 + h_{n,n}) + o(H) \quad (*)$$

$$= 1 + \operatorname{tr} H + o(H). \quad (**)$$

On rappelle avant d'aller plus loin que $h_{i,j} = \mathcal{O}(\|H\|_\infty)$ lorsque H tend vers la matrice nulle 0_n , quels que soient les indices i et j .

Lorsque $\sigma \neq I$, au moins deux facteurs $a_{i, \sigma(i)}$ sont situés hors de la diagonale de $I_n + H$: le produit est donc $\mathcal{O}(\|H\|_\infty^2)$ et par conséquent $o(H)$ lorsque H tend vers 0_n .

En développant le terme qui correspond à $\sigma = I$, on trouve un terme constant (égal à 1), les termes $h_{1,1}, \dots, h_{n,n}$ et des termes qui contiennent au moins deux facteurs $h_{i,j}$.

Le développement limité ainsi obtenu nous dit que l'application linéaire tangente à $\det$ en I_n est l'application tr .

✎ On considère une application f définie sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ (avec $\alpha > 0$), de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \det f(t) = 1$$

et telle que $f(0) = I_n$.

On a donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + t f'(0) + o(t)$$

et d'après le développement limité de $\det$

$$1 = \det f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t \operatorname{tr}[f'(0)] + o(t).$$

On en déduit que $\operatorname{tr}[f'(0)] = 0$. Chaque vecteur tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n est donc une matrice de trace nulle.

✎ Réciproquement, si H est une matrice de trace nulle, alors on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tH).$$

Il est clair que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (ses n^2 composantes sont des séries entières dont le rayon de convergence est infini), que

$$f(0) = \exp(0_n) = I_n,$$

que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = H \cdot \exp(tH)$$

(cours sur les équations différentielles!) et donc que $f'(0) = H$.

Enfin, toujours d'après le cours sur les équations différentielles,

$$\det[f(t)] = \exp(t \operatorname{tr} H) = \exp(0) = 1,$$

donc f est bien une fonction qui prend ses valeurs sur $SL_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, H est bien un vecteur tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n .

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Soient $m < n$, deux entiers strictement positifs. On note E , l'ensemble $\mathfrak{P}_m([1, n])$ des parties de $[1, n]$ dont le cardinal est égal à m et on considère une variable aléatoire $A : \Omega \rightarrow E$:

$$\forall F \in \mathfrak{P}_m([1, n]), \quad [A = F] \in \mathcal{A}$$

dont la loi est uniforme :

$$\forall F, G \in \mathfrak{P}_m([1, n]), \quad \mathbf{P}(A = F) = \mathbf{P}(A = G).$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = \max A - \min A$$

et son espérance.

2. Première variante

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On extrait m boules de l'urne et on note M , le plus grand des numéros tirés. Calculer l'espérance et la variance de M .

3. Deuxième variante

On répartit aléatoirement m boules parmi n cases numérotées de 1 à n (chaque case pouvant contenir au plus une boule). Soit Δ , la différence entre le plus grand numéro et le plus petit numéro des cases occupées. Calculer la loi et l'espérance de Δ .

1. Comme $\#(E) = \binom{n}{m}$, on a $\mathbf{P}(A = F) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$ pour toute partie $F \in E$.

• Pour toute partie $F \in E$, on a

$$1 \leq \min F \leq n - m + 1 \quad \text{et} \quad m \leq \max F \leq n.$$

Par conséquent, $\min A$ et $M = \max A$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[1, n - m + 1]$ et $[m, n]$ respectivement.

• Il est fastidieux, mais pas difficile de prouver que $\min A$ et $\max A$ sont effectivement des variables aléatoires discrètes : on peut écrire $[\min A = k]$ et $[\max A = k]$ comme des unions finies disjointes d'ensembles de la forme $[A = F] \in \mathcal{A}$.

• Soit $m \leq k \leq n$. Le maximum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m - 1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $[1, k - 1]$.

Comme la loi de A est uniforme sur E ,

$$\forall m \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(M = k) = \mathbf{P}(\max A = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

• Soit $1 \leq k \leq n - m + 1$. Le minimum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m - 1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $[k + 1, n]$. Par conséquent,

$$\forall 1 \leq k \leq n - m + 1, \quad \mathbf{P}(\min A = k) = \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

• Remarque en passant

Comme $[\max A = m] = [A = \{1, \dots, m\}] \subset [\min A = 1]$, alors

$$[\max A = m] \cap [\min A = 1] = [\max A = m]$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) = \mathbf{P}(\max A = m) = \frac{1}{\binom{n}{m}} > 0.$$

Or la loi de $\min A$ est connue et comme $1 \leq m < n$,

$$\mathbf{P}(\min A = 1) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n} < 1.$$

Donc $\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) \neq \mathbf{P}(\min A = 1) \mathbf{P}(\max A = m)$ et les deux variables $\min A$ et $\max A$ ne sont pas indépendantes.

♣ Passons à la loi du couple $(\min A, \max A)$.

► Comme la partie $A(\omega)$ compte m éléments, alors nécessairement

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \geq m - 1.$$

D'autre part, $\max A(\omega) \leq n$ et $\min A(\omega) \geq 1$, donc

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \leq n - 1.$$

Ainsi X est une variable aléatoire discrète (en tant que différence de deux variables aléatoires discrètes) à valeurs dans $\llbracket m - 1, n - 1 \rrbracket$.

► Soient donc deux entiers k et ℓ tels que

$$1 \leq k \leq n - m + 1, \quad m \leq \ell \leq n \quad \text{et} \quad m - 1 \leq \ell - k \leq n - 1.$$

Le minimum de $F \in E$ est égal à k et son maximum est égal à ℓ si, et seulement si, la partie F contient k et ℓ et si les $(m - 2)$ éléments restants de F sont choisis dans le sous-intervalle $\llbracket k + 1, \ell - 1 \rrbracket$. L'astuce taupinale nous permet de dénombrer en toute sérénité :

$$\ell - 1 = k + (\ell - k - 1).$$

Il y a donc $(\ell - k - 1)$ entiers dans $\llbracket k + 1, \ell - 1 \rrbracket$ et par conséquent,

$$\mathbf{P}(\min A = k, \max A = \ell) = \frac{\binom{\ell - k - 1}{m - 2}}{\binom{n}{m}}.$$

♣ On peut en déduire la loi de X .

Soit $m - 1 \leq q \leq n - 1$. D'après la Formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = q) &= \sum_{k=1}^{n-m+1} \mathbf{P}(X = q, \min A = k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-m+1 \\ k+q \leq n}} \mathbf{P}(\min A = k, \max A = k + q) \\ &= \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} = (n - q) \frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} \end{aligned}$$

(puisque les termes de la somme sont tous égaux).

✎ Pour calculer les espérances de M et de X , il faut se souvenir que

$$\forall 1 \leq m < n, \quad \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Cette propriété peut se démontrer

→ par récurrence sur n (à partir de la formule dite du triangle de Pascal);

→ de manière combinatoire : choisir $(m + 1)$ entiers dans $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ consiste à choisir d'abord le plus grand de ces entiers (on choisit K entre $(m + 1)$ et $(n + 1)$) et à choisir ensuite m entiers dans le sous-intervalle $\llbracket 1, K - 1 \rrbracket$ — on prend $k = K - 1$ pour écrire la somme;

→ en se fondant sur le fait que M est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket m, n \rrbracket$ et donc que

$$\sum_{k=m}^n \mathbf{P}(M = k) = 1.$$

(Il convient ici de décaler les valeurs de m et n .)

♣ L'espérance de M est, par définition, égale à

$$\sum_{k=m}^n k \mathbf{P}(M = k) = \sum_{k=m}^n k \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \sum_{k=m}^n m \frac{\binom{k}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{m(n+1)}{m+1}.$$

♣ On peut calculer de manière analogue

$$\mathbf{E}(\min A) = \sum_{k=1}^{n-m+1} k \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}} = (n+1) - \mathbf{E}(M).$$

(Il y a quelques astuces classiques en route.) Mais un tel résultat est surprenant et mérite d'être expliqué.

Comme l'application $\sigma : E \rightarrow E$ définie par

$$\forall F \in E, \quad \sigma(F) = \{n - x + 1, x \in F\}$$

est une bijection de E dans E (c'est même une sorte de symétrie, puisque $\sigma \circ \sigma = I_E$) et comme la loi de A est uniforme sur E , on en déduit que la loi de $B = \sigma(A)$ est aussi la loi uniforme sur E :

$$\forall F \in E, \quad \mathbf{P}(B = F) = \mathbf{P}(\sigma(A) = F) = \mathbf{P}(A = \sigma^{-1}(F)) = \frac{1}{\#(E)}.$$

Comme A et B ont même loi, les variables aléatoires $\min A$ et $\min B$ ont également même loi et en particulier

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B).$$

Par définition de σ ,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad y \in B(\omega) \iff (n+1) - y \in A(\omega)$$

donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \min B(\omega) = (n+1) - \max A(\omega).$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B) = (n+1) - \mathbf{E}(\max A) = \frac{n+1}{m+1}.$$

🔗 Il est intéressant de noter que

$$\min A \stackrel{\text{loi}}{=} (n+1) - \max A$$

alors que ces deux variables ne sont certainement pas égales en tant que fonctions de Ω dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

♣ Par linéarité de l'espérance, on trouve enfin

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\max A) - \mathbf{E}(\min A) = \frac{(m-1)(n+1)}{m+1}.$$

2. Avec le modèle probabiliste précédent, $M = \max A$.

3. Avec le modèle probabiliste précédent, $\Delta = X$.

Soit $r > 0$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \int_0^1 r x^{k-1} (1-x)^r dx.$$

1. Démontrer que $(p_k)_{k \geq 1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X , une variable aléatoire discrète telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Pour quelles valeurs de r la variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ? Calculer $\mathbf{E}(X)$ dans ce cas.

1. Il est clair que tous les p_k sont positifs. Il reste donc à prouver d'une part que la série $\sum p_k$ est convergente et d'autre part que la somme de cette série est égale à 1.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_k(x) = r x^{k-1} (1-x)^r.$$

► Il est clair que les fonctions f_k sont continues sur le segment $[0, 1]$ (puisque $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$). Elles sont donc intégrables sur cet intervalle.

► La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, 1]$ (série géométrique de raison x pour $0 \leq x < 1$; de terme général nul pour $x = 1$).

► La somme S_0 de cette série de fonctions est continue et intégrable sur $[0, 1[$ puisque

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad S_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = r(1-x)^{r-1} \quad \text{et} \quad S_0(1) = 0.$$

• La somme S_0 n'est continue sur $[0, 1]$ que pour $r > 1$.

► Comme les fonctions f_k sont positives, on a donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq S_0(x).$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $[0, 1[$, donc la convergence est dominée.

• On peut donc intégrer terme à terme : la série $\sum p_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-1} dx = 1.$$

2. Pour étudier l'espérance de X , on reprend la même étude avec la série de fonctions $\sum k f_k$.

• Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k(x) = r(1-x)^r \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = r(1-x)^{r-2}.$$

► Si $r > 1$, alors la somme S_1 est intégrable sur $[0, 1[$ et le même raisonnement que le précédent montre que la série $\sum k p_k$ est convergente (ce qui prouve que X est une variable d'espérance finie) et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-2} dx = \frac{r}{r-1}.$$

► Si $0 < r \leq 1$, alors la somme S_1 n'est pas intégrable sur $[0, 1[$.

Si la série $\sum k p_k$ était convergente, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k p_k = \int_0^1 k f_k(x) dx = \int_0^1 |k f_k(x)| dx$$

et on pourrait donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme à la série $\sum k f_k$. Dans ce cas, la somme S_1 serait une fonction intégrable sur $[0, 1[$, ce qui est faux.

- La série $\sum k p_k$ est donc convergente si, et seulement si, $r > 1$.

La variable X est donc une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, $r > 1$ et

$$\forall r > 1, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{r}{r-1}.$$

|| Soient X_1 et X_2 , deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Calculer l'espérance de $U = \min\{X_1, X_2\}$ et de $V = \max\{X_1, X_2\}$.

Comme de coutume, on notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

- Il est clair que U et V sont des applications de Ω dans $\mathbb{N}$.
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par définition du minimum,

$$[U > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k] \in \mathcal{A}.$$

► On en déduit que

$$[U = 0] = [U > 0]^c \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad [U = k] = [U > k-1] \cap [U > k]^c \in \mathcal{A}$$

et donc que U est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

► Par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U > k) = \mathbf{P}(X_1 > k) \mathbf{P}(X_2 > k) = (q_1 q_2)^k$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k) = (q_1 q_2)^{k-1} [1 - q_1 q_2],$$

ce qui montre que U suit la loi géométrique de paramètre

$$p_0 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

(Il n'est pas nécessaire de s'assurer que $\mathbf{P}(U = 0) = 0$.)

- Par définition du maximum,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [V \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k].$$

► Comme plus haut, on en déduit que V est bien une variable aléatoire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [V = k] \in \mathcal{A}.$$

► De même, par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(V \leq k) = (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$$

et donc

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(V = k) = \mathbf{P}(V \leq k) - \mathbf{P}(V \leq k-1) = q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1} (1 - q_1 q_2).$$

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, strictement positives. On suppose que X et $1/X$ sont des variables aléatoires d'espérance finie. Démontrer que X/Y est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(X/Y) \geq 1.$$

Comme Y est strictement positive, le quotient X/Y est une variable aléatoire réelle.

Comme X et Y ont même loi, les variables aléatoires $\sqrt{Y}$ et $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ admettent des moments d'ordre deux et on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$1 = \mathbf{E}(1)^2 = \mathbf{E}\left(\sqrt{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}\right)^2 \leq \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et Y ont même loi, on en déduit que

$$1 \leq \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et $1/Y$ sont indépendantes et d'espérance finie, le produit $X \cdot \frac{1}{Y}$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \geq 1.$$

Soit X , une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$. Démontrer que

$$V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Comme X est bornée, elle admet un moment d'ordre deux et donc une variance.

• Si $P(X = a) = P(X = b) = 1/2$, alors $E(X) = (a + b)/2$ et

$$V(X) = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

La majorant indiqué est donc la variance de la variable aléatoire qui prend les valeurs extrêmes avec équiprobabilité.

• La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[a, b]$ si, et seulement si, la variable aléatoire

$$X - \frac{a+b}{2}$$

prend ses valeurs dans le segment $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha = \frac{b-a}{2}$. De plus,

$$V(X) = V\left(X - \frac{a+b}{2}\right).$$

Pour résoudre le problème posé, on peut donc supposer que X prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$.

• Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$, alors il existe une variable aléatoire Y , indépendante de X et de même loi que $-X$. Par symétrie du segment, Y prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et

$$V(Y) = V(-X) = V(X).$$

La combinaison convexe

$$Z = \frac{X + Y}{2}$$

prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et, par indépendance de X et Y ,

$$V(Z) = \frac{V(X) + V(Y)}{2} = V(X).$$

En outre, par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = \frac{E(X) + E(Y)}{2} = \frac{E(X) - E(X)}{2} = 0.$$

On peut donc se restreindre aux variables aléatoires à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ qui sont *centrées* pour majorer la variance.

• Comme X est centrée et prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X(\omega) - E(X))^2 = X^2(\omega) \leq \alpha^2$$

et par conséquent

$$V(X) \leq \alpha^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Soit X , une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre deux. On suppose aussi que X n'est pas presque sûrement nulle.

1. Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq \lambda \mathbf{E}(X) + X(\omega) \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}.$$

2. Démontrer que, pour tout $0 < \lambda < 1$,

$$\mathbf{P}(X \leq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq \frac{(1 - \lambda)^2 \cdot \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

L'intérêt de cet exercice est de présenter une variante de l'inégalité de Markov.

1. Comme X est positive et admet un moment d'ordre deux, alors elle est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

De plus, $\mathbf{P}(X = 0) < 1$ par hypothèse, donc $\mathbf{E}(X) > 0$ et (même raisonnement pour X^2) $\mathbf{E}(X^2) > 0$.

Comme $\lambda > 0$, on en déduit que le seuil $\lambda \mathbf{E}(X)$ est strictement positif.

✦ Pour tout $\omega \in \Omega$, on distingue deux cas :

► Si $X(\omega) < \lambda \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} = 0$ et donc

$$X(\omega) < \lambda \mathbf{E}(X) = \lambda \mathbf{E}(X) + X(\omega) \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}.$$

► Si au contraire $X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} = 1$ et donc

$$X(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} \leq X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} + \lambda \mathbf{E}(X)$$

car $\lambda \mathbf{E}(X) > 0$.

► Dans tous les cas, on a bien

$$X \leq \lambda \mathbf{E}(X) + X \mathbb{1}_{A_\lambda}$$

où la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{A_\lambda}$ est définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) = \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}.$$

2. D'après cette inégalité,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) \geq X(\omega) - \lambda \mathbf{E}(X).$$

L'espérance est linéaire et conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}) \geq \mathbf{E}(X) - \lambda \mathbf{E}(X) = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X).$$

Or $\mathbf{E}(X) > 0$ et $0 < \lambda < 1$, donc $(1 - \lambda) \mathbf{E}(X) > 0$ et donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})^2 \geq [(1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X)]^2.$$

Par hypothèse, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre deux et toute variable aléatoire de Bernoulli admet également un moment d'ordre deux : on peut donc appliquer l'inégalité de Schwarz.

$$[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})]^2 \leq \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_\lambda}^2) = \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda)$$

On en déduit finalement que

$$\mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda) \geq [\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})]^2 \geq [(1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X)]^2.$$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On procède à des tirages sans remise : après chaque tirage, on enlève de l'urne les boules qui ont un numéro supérieur à celui de la boule tirée.

On note X_n , le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

2. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \quad E(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k).$$

3. Calculer $E(X_n)$ et en déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

1.

✎ Exercice infaisable dans le cadre du programme : il s'appuie d'une part sur la formule de l'espérance totale (une variante de la formule des probabilités totales) et d'autre part sur la propriété de Markov...

Allons-y comme d'habitude — à la one-again.

• Comme on retire au moins une boule à chaque tirage et que l'urne contient initialement n boules, les valeurs de X_n sont comprises entre 1 et n . Par conséquent, X_n est bornée et donc d'espérance finie (s'il s'agit bien d'une variable aléatoire).

• Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule boule dans l'urne, qu'on enlève au premier tirage. Par conséquent, la variable aléatoire X_1 est constante, égale à 1, et $E(X_1) = 1$.

• Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne.

Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $[B_1 = i]$ le fait que la première boule tirée soit la boule numérotée i et admettons que

$$P(B_1 = 1) = P(B_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors l'urne est vidée du premier coup : $X_2 = 1$.

► Sinon, il ne reste plus que la boule 1 et l'urne est nécessairement vidée au second coup : $X_2 = 2$.

► On en déduit que

$$[X_2 = 1] = [B_1 = 1] \quad \text{et} \quad [X_2 = 2] = [B_1 = 2]$$

donc $X_2 = B_2$ et par conséquent

$$E(X_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

2. Si l'urne contient initialement n boules, alors on dispose d'un système complet d'événements :

$$[B_1 = 1], \quad [B_1 = 2], \quad \dots, \quad [B_1 = n]$$

qui sont tous de probabilité $1/n$. (Ces événements nous indiquent quelle est la première boule tirée.)

Comme X_n est une variable aléatoire d'espérance finie, on peut appliquer la formule de l'espérance totale :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n E_{B_1=k}(X_n) \cdot P(B_1 = k).$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors X_n prend nécessairement la valeur 1, donc

$$E_{B_1=1}(X_n) = 1.$$

► Pour $2 \leq k \leq n$, si la première boule tirée est la boule k , alors après avoir tiré cette première boule, on continue pour vider une urne qui contient $(k-1)$ boules. "Donc" (rires nerveux dans l'assistance qui connaît la théorie des chaînes de Markov)

$$\forall 2 \leq k \leq n, \quad E_{B_1=k}(X_n) = \underbrace{1}_{\text{premier tirage}} + \underbrace{E(X_{k-1})}_{\text{tirages suivants}}.$$

► Bref :

$$E(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} E(X_{k-1}) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k).$$

3. En posant $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, on dispose de la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = n(u_n - 1)$$

et donc que

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} [n(u_n - 1) + u_n] = 1 - \frac{n}{n+1} + u_n.$$

Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $u_1 = 1$,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp(nt^2/2).$$

2. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp(-a^2/2n).$$

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont bornées et sont donc d'espérance finie.

1. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = [\mathbf{E}(e^{tX})]^n.$$

D'après la loi de X ,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On vérifie sans peine (par récurrence) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2^k \cdot k! \geq (2k)!.$$

On en déduit que

$$\text{ch } t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^k}{2^k \cdot k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc que

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp(nt^2/2).$$

2. Comme la loi des X_k est symétrique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \{\pm 1\}, \quad \mathbf{P}(X_k = x) = \mathbf{P}(X_k = -x) = \frac{1}{2}$$

et que les X_k sont indépendantes, alors

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\text{loi}}{=} (-X_1, \dots, -X_n).$$

Par conséquent,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{k=1}^n (-X_k) = -S_n.$$

On en déduit que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbf{P}(-S_n \geq a) = \mathbf{P}(S_n \geq a)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a) = \mathbf{P}(S_n \geq a) + \mathbf{P}(S_n \leq -a) = 2 \mathbf{P}(S_n \geq a).$$

✚ Pour tout $t > 0$, la fonction $[u \mapsto e^{tu}]$ est strictement croissante, donc

$$[S_n \geq a] = [e^{tS_n} \geq e^{ta}].$$

Comme e^{tS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbf{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq e^{-ta} \mathbf{E}(e^{tS_n})$$

et on déduit de la première inégalité que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-ta} e^{nt^2/2}.$$

• On remarque alors que le membre de gauche est indépendant de $t > 0$: on peut donc passer à la borne inférieure selon le paramètre t .

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq \inf_{t>0} 2e^{-ta} e^{nt^2/2}.$$

Pour cela, on étudie les variations de

$$f(t) = -at + \frac{nt^2}{2}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+^*$: il s'agit d'un trinôme du second degré, qui atteint son minimum pour $t = a/n > 0$ et ce minimum est égal à $f(a/n) = -\frac{a^2}{2n}$. Par croissance de $\exp$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall a > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp \frac{-a^2}{2n}.$$

On considère un hyperplan H de l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \in H \iff \operatorname{tr}(A^\top \cdot M) = 0.$$

Cette matrice A est-elle unique ?

2. L'hyperplan H contient au moins une matrice inversible.

1. Par définition, l'hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire φ non identiquement nulle sur E . Cette forme linéaire φ n'est pas unique : quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, le noyau de $\lambda \cdot \varphi$ est égal au noyau de φ et donc à H .

Les coefficients $m_{i,j}$ d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont aussi les coordonnées de cette matrice relatives à la base duale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, il existe une, et une seule, famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de scalaires tels que

$$\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_{i,j}.$$

Il s'agit ici de la décomposition de φ dans la base duale de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est la base canonique de l'espace dual de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient

$$\varphi(M) = \operatorname{tr}(A^\top \cdot M)$$

et par conséquent

$$M \in H \iff \operatorname{tr}(A^\top \cdot M) = 0.$$

2. Comme la matrice $A^\top$ n'est pas la matrice nulle, son rang r est supérieur à 1 et elle est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et par conséquent équivalente à la matrice

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ 1 & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(obtenue par permutation circulaire des r premières colonnes de J_r). Il existe donc deux matrices inversibles P_1 et Q_1 telles que la trace de la matrice

$$K_r = Q_1^{-1} \cdot A^\top \cdot P_1$$

soit nulle (tous les coefficients diagonaux sont nuls).

On en déduit que

$$\varphi(P_1 Q_1^{-1}) = \operatorname{tr}(A^\top \cdot P_1 Q_1^{-1}) = \operatorname{tr}(Q_1^{-1} \cdot A^\top \cdot P_1) = \operatorname{tr}(K_r) = 0$$

et donc que l'hyperplan H contient la matrice inversible $P_1 Q_1^{-1}$.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif : le produit de deux matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est encore une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \det(A + kB) = \pm 1.$$

1. Démontrer que la matrice A est inversible.

2. Démontrer que $\det B = 0$.

1. Pour $k = 0$, on a $\det A = \pm 1$, donc A est inversible en tant qu'élément de (l'algèbre) $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Cela dit, d'après les formules de Cramer,

$$A \cdot \text{Com}(A)^\top = \det A \cdot I_n = \pm I_n.$$

Puisque les coefficients de la comatrice sont des déterminants de matrices extraites de A (et donc de matrices à coefficients entiers), la comatrice appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ et la matrice A est donc inversible dans l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

2. Supposons que $\det B \neq 0$. D'après la propriété de morphisme de $\det$ et l'hypothèse,

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \det(AB^{-1} + kI_n) = \frac{\pm 1}{\det B}.$$

Dans cette identité, le paramètre k prend $(2n + 1)$ valeurs et l'expression $\det(AB^{-1} + kI_n)$ prend au plus deux valeurs : cette expression prend donc l'une des valeurs au moins $(n + 1)$ fois.

Or l'application

$$[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n + AB^{-1})]$$

est une application polynomiale de degré n : c'est le polynôme caractéristique de la matrice $-AB^{-1}$.

Si une application polynomiale prend $(n + 1)$ fois la même valeur, il n'y a que deux possibilités : ou bien elle est constante, ou bien son degré est au moins égal à $(n + 1)$. Quoi qu'il en soit, son degré ne peut pas être égal à n . Notre hypothèse est donc absurde, on a démontré que $\det B = 0$.

Soit φ , une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A).$$

Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$.

✎ Pour se lancer dans la démonstration qui suit, il faut commencer par traduire l'énoncé : deux matrices semblables ont toujours même image par φ .

On note, comme de coutume, $E_{i,j}$ (pour $1 \leq i, j \leq n$) les matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $D = \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$. Pour $i \neq j$, la matrice $D + E_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D (mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités).

Par hypothèse, $\varphi(D + E_{i,j}) = \varphi(D)$ et par linéarité de φ ,

$$\forall i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) = 0.$$

• Pour tout $1 \leq i \leq n$, les matrices $E_{1,1}$ et $E_{i,i}$ sont semblables : la matrice de permutation

$$P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P_{1,i}^{-1}E_{i,i}P_{1,i} = E_{1,1}$ et par conséquent, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$.

✎ Autre point de vue : la matrice $E_{1,1}$ représente l'application linéaire

$$[(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)]$$

dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ et la matrice $E_{i,i}$ représente cette même application linéaire dans la base

$$(e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

En posant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, on a donc

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \lambda = \lambda \text{tr } A$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer toutes les fonctions continues

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

telles que

$$\forall x \geq 0, \quad f(f(x)) = x.$$

Une telle fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et est sa propre réciproque. L'identité $[x \mapsto x]$ est une telle fonction. Y en a-t-il d'autres ?

- Comme f est continue et injective, il faut que f soit (strictement) monotone.

Supposons qu'il existe $x_0 \geq 0$ tel que $y_0 = f(x_0) \neq x_0$. On a aussi

$$f(y_0) = (f \circ f)(x_0) = x_0$$

et comme x_0 et y_0 jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $x_0 < y_0$. On a donc

$$x_0 < y_0 \quad \text{et} \quad y_0 = f(x_0) > f(y_0) = x_0.$$

Comme f est monotone, il faudrait que f fût décroissante.

Mais comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, il existe un réel $z_0 \geq 0$ tel que $f(z_0) = 0$.

Comme f est strictement décroissante et positive, on aurait donc

$$\forall x > z_0, \quad 0 \leq f(x) < f(z_0) = 0$$

ce qui est absurde.

- Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = x$.

✎ Si on cherchait f continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la fonction inverse $[x \mapsto 1/x]$ serait une solution.

Déterminer les fonctions continues

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

telles que $f \circ f = f$.

Par hypothèse,

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(f(x)) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall y \in J = f_*([0, 1]), \quad f(y) = y.$$

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, son image J est également un segment $[m, M]$.

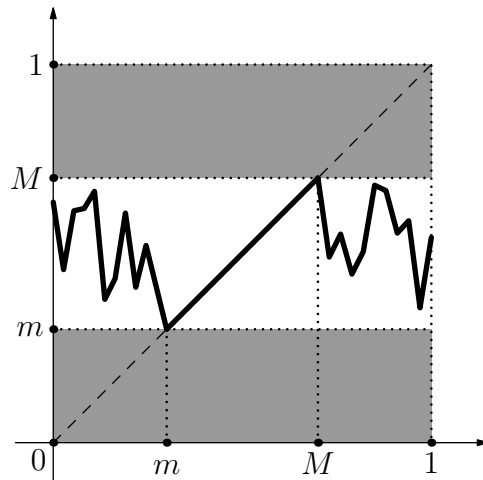
Réciproquement, si on considère une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dont l'image est le segment $[m, M]$ et si

$$\forall x \in [m, M], \quad f(x) = x,$$

alors

$$\forall x \in [0, 1], \quad (f \circ f)(x) = f\left(\underbrace{f(x)}_{\in [m, M]}\right) = f(x).$$

Ainsi, les fonctions cherchées sont les fonctions f telles que $f(y) = y$ pour tout y appartenant à l'image de f .



✎ Pour $0 \leq y < m$ et $M < y \leq 1$, on peut choisir $f(y)$ arbitrairement, en se bornant à respecter deux contraintes : f doit être continue sur $[0, 1]$ et

$$\forall y \in [0, m[\cup]M, 1], \quad m \leq f(y) \leq M.$$

REMARQUE.— Si $0 < m < M$ ou si $m < M < 1$, alors la fonction f ne peut pas être dérivable (point anguleux pour l'abscisse m dans le premier cas et pour l'abscisse M dans le second cas).

Ainsi, si on impose à f d'être dérivable sur $[0, 1]$, les seules fonctions possibles sont $[x \mapsto x]$ d'une part et les fonctions constantes $[x \mapsto C]$ (pour lesquelles on a $m = M = C$) d'autre part.

Soient f et g , deux applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, telles que

$$f \circ g = g \circ f.$$

On note f^n et g^n les itérées n -ièmes de f et g :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \quad g^n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}}.$$

1. On suppose que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) < g(x).$$

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n(x) \geq f^n(x) + n\alpha.$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

1. Comme f et g sont continues sur le segment $[0, 1]$, la différence $g - f$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle atteint son minimum en un point $x_0 \in [0, 1]$. Avec l'hypothèse qui est faite, ce minimum est strictement positif : on pose donc

$$\alpha = g(x_0) - f(x_0) = \min_{x \in [0, 1]} g(x) - f(x) > 0.$$

On a donc, par définition de α ,

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) \geq f(x) + \alpha \quad (3)$$

et la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

• Cette propriété est vérifiée pour $n = 0$, puisque $f^0(x) = g^0(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

• Supposons pour terminer la démonstration par récurrence qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad g^n(x) \geq f^n(x) + n\alpha. \quad (4)$$

En appliquant (1) avec $x \leftarrow g^n(x)$, on obtient

$$g^{n+1}(x) = g(g^n(x)) \geq f(g^n(x)) + \alpha.$$

Comme f et g commutent, alors f et g^n commutent aussi et donc

$$f(g^n(x)) + \alpha = g^n(f(x)) + \alpha \geq [f^n(f(x)) + n\alpha] + \alpha$$

par hypothèse de récurrence (avec cette fois $x \leftarrow f(x)$). On a ainsi démontré que

$$\forall x \in [0, 1], \quad g^{n+1}(x) \geq f^{n+1}(x) + (n+1)\alpha$$

et donc que la propriété étudiée était héréditaire.

• On a donc démontré par récurrence que la propriété (2) était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Par hypothèse, f et g prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$. Il en va donc de même pour f^n et g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad \underbrace{g^n(x) - f^n(x)}_{\leq 1} \geq n\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui est absurde.

L'hypothèse

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) < g(x)$$

est donc fautive, donc il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) \geq g(a)$.

Par symétrie, l'assertion suivante est fautive également :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) > g(x).$$

Donc, parmi tous les $a \in [0, 1]$ tels que $f(a) \geq g(a)$, il en existe au moins un pour lequel $f(a) = g(a)$.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) = (n+1) \mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k).$$

2. On suppose que X est une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \mathbf{P}(X > n) = 0.$$

Que peut-on en déduire sur la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$?

3. On suppose que X n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est divergente.

1. Pour $0 \leq k \leq n$,

$$[X > k] = [X = k+1] \sqcup \dots \sqcup [X = n] \sqcup [X > n]$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X > k) = \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=k+1}^n \mathbf{P}(X = i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=k+1}^n \mathbf{P}(X = i) = (n+1) \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{P}(X = i) \\ &= (n+1) \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}(X = i). \end{aligned}$$

Il reste à rajouter le terme $i \mathbf{P}(X = i)$ pour $i = 0$, qui est évidemment nul, pour obtenir le résultat souhaité.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[X > n] = \bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k].$$

Il s'agit d'une union **dénombrable** d'événements deux à deux disjoints, donc la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est convergente et

$$\mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)$$

(par σ -additivité de $\mathbf{P}$).

Si X est d'espérance finie, alors la série $\sum k \mathbf{P}(X = k)$ est convergente et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = 0.$$

Or

$$\forall k \geq n+1, \quad 0 \leq (n+1) \mathbf{P}(X = k) \leq k \mathbf{P}(X = k)$$

et donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq (n+1) \mathbf{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k).$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 0.$$

☞ La relation démontrée précédemment montre que la suite des sommes partielles de $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente (somme de deux suites convergentes), ce qui prouve que la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(X).$$

3. Si X n'est pas d'espérance finie, alors la série de terme général positif $\sum k \mathbf{P}(X = k)$ est divergente, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

D'après la relation établie à la première question,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) \geq \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k)$$

et par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) = +\infty.$$

☛ On a donc démontré qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

☞ On peut aboutir au même résultat en démontrant que la famille $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ définie par

$$\forall 0 \leq n \leq k, \quad u_{n,k} = 0$$

et par

$$\forall 0 \leq k < n, \quad u_{n,k} = \mathbf{P}(X = n)$$

est sommable si, et seulement si, X est une variable aléatoire d'espérance finie. (Évidemment, il faut utiliser plusieurs fois le Théorème de Fubini.)

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois) jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur. Modéliser la loi du nombre X_n de boules qui restent dans l'urne à l'issue des tirages.

2. On considère deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois), en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable jusqu'à ce que l'on constate que l'urne choisie soit vide. Modéliser la loi du nombre Y_n de boules qui restent dans l'autre urne à ce moment-là. Calculer un équivalent de l'espérance de Y_n .

1. On modélise les tirages par une famille $(U_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en faisant l'hypothèse que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{0, 1\}^k, \quad \mathbf{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_k = \varepsilon_k) = \frac{n - \sigma_k}{2n - k}$$

où $\sigma_k = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$.

☞ Ce modèle est raisonnable : si l'événement $[U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_k = \varepsilon_k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu $\sigma_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ fois "1". On a donc obtenu $k - \sigma_k$ fois "0". Comme l'urne contient initialement n boules de type "1" et n boules de type "0", il reste donc $(2n - k)$ boules, parmi lesquelles on compte $(n - \sigma_k)$ boules de type "1" et (donc) $(n - k + \sigma_k)$ boules de type "0". Le quotient $(n - \sigma_k)/(2n - k)$ peut donc s'interpréter comme une hypothèse d'équiprobabilité sur le résultat du $(k + 1)$ -ième tirage.

En supposant de plus que

$$\mathbf{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2} \left(= \frac{n}{2n} \right),$$

ce modèle est complet, puisque les hypothèses qu'on vient de poser permettent de calculer

$$\mathbf{P}(U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_{2n} = \varepsilon_{2n})$$

quel que soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \{0, 1\}^{2n}$ par l'intermédiaire de la Formule des probabilités composées.

♣ On peut en particulier vérifier que

$$\mathbf{P}(U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_{2n} = \varepsilon_{2n}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

pour toute famille $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ telle que $\sigma_{2n} = n$ (= les familles qui constituent le support de la loi du vecteur $(U_k)_{1 \leq k \leq 2n}$).

Cette forme d'équiprobabilité va nous permettre de ramener le calcul de la loi de X_n à du dénombrement.

► L'événement $[X_n = k]$ signifie qu'il ne reste k boules, toutes du même type, dans l'urne. On a donc effectué $(2n - k)$ tirages, qui ont amené les n boules d'un premier type et $(n - k)$ du second type :

$$[X_n = k] = [X_n = k, U_{2n} = 1] \sqcup [X_n = k, U_{2n} = 0]$$

et par équiprobabilité

$$\mathbf{P}(X_n = k) = 2 \mathbf{P}(X_n = k, U_{2n} = 0).$$

► D'après la règle du jeu, l'événement $[X_n = k, U_{2n} = 0]$ est égal à

$$[X_n = k, \underbrace{U_{2n-k} = 1}_{\text{dernière boule de type "1"}}, \underbrace{U_{(2n-k)+1} = U_{(2n-k)+2} = \dots = U_{(2n-k)+k} = 0}_{\text{les } k \text{ derniers tirages}}].$$

C'est donc la réunion de tous les événements

$$[U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_n = \varepsilon_n]$$

tels que $\varepsilon_{2n-k} = 1$ et $\varepsilon_{2n-k+1} = \varepsilon_{2n-k+2} = \dots = \varepsilon_{2n} = 0$.

Comme il existe exactement $\binom{2n-k-1}{n-1}$ événements de ce genre (on place les $(n-1)$ boules de type "1" qui ont précédé la dernière boule de type "1" parmi les $(2n-k-1)$ premiers tirages), on en déduit que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{2 \binom{2n-k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

✎ Il n'est pas inutile de vérifier la cohérence de ce résultat ! Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{2n-k-1}{n-1} &= \sum_{k=1}^n \binom{(n-1) + (n-k)}{n-1} = \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{k}{n-1} \quad (k \leftarrow 2n-k-1) \\ &= \binom{2n-1}{n} \quad (\text{triangle de Pascal}) \\ &= \frac{n}{2n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

on a bien $\mathbf{P}(X_n = 1) + \dots + \mathbf{P}(X_n = n) = 1$.

2. On modélise la seconde expérience par une famille $(V_k)_{1 \leq k \leq 2n+2}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en supposant que la probabilité

$$\mathbf{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2})$$

est la même pour tout vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq 2n+2} \in \{0, 1\}^{2n+2}$ tel que

$$\sigma_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k = n+1.$$

Cela revient à dire qu'on effectue de manière équiprobable $(2n+2)$ tirages successifs, tantôt dans l'urne "1", tantôt dans l'urne "0", et qu'on effectue exactement $(n+1)$ tirages dans chacune des urnes.

Le cardinal de l'ensemble E_{n+1} des vecteurs ε tels que $\sigma_{2n+2} = n+1$ est égal à $\binom{2n+2}{n+1}$ (on choisit les positions de n éléments égaux à "0" parmi $(2n+2)$ positions possibles, les n éléments égaux à "1" occuperont les positions restées libres).

► Ce modèle est évidemment complet, puisque la loi du vecteur aléatoire $(V_k)_{1 \leq k \leq 2n+2}$ est parfaitement définie.

► Ce modèle est aussi raisonnable au regard de la situation étudiée.

En effet, dans l'énoncé, chaque urne contient n boules et après avoir tiré les n boules de l'urne, il faut un $(n+1)$ -ième tirage pour constater que l'urne est vide.

On peut aussi bien imaginer que chaque urne contient en fait $(n+1)$ boules et que la procédure s'arrête lors du tirage de cette $(n+1)$ -ième boule fictive : cet artifice permet de ramener cette nouvelle situation à la situation précédente.

► Il reste cependant à vérifier que ce modèle est cohérent avec l'énoncé qui exige que

$$\forall 1 \leq k \leq 2n+2, \quad \mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Or

$$[V_k = 1] = \bigsqcup_{\substack{\varepsilon \in E_{n+1} \\ \text{t.q. } \varepsilon_k = 1}} [V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2}].$$

Ces événements sont tous équiprobables et leur nombre est égal à $\binom{2n+1}{n}$ (il faut placer n "1", la position k est occupée par un "1" et on choisit n positions parmi les $(2n+1)$ autres positions pour placer les n autres "1"). Donc

$$\mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Jusqu'ici, tout va bien...

► La valeur prise par la variable aléatoire Y_n est comprise entre 0 (lorsqu'on vide la seconde urne avant de constater que la première urne vidée est bien vide) et n (lorsqu'on constate qu'une urne est vide avant de tirer la première boule de l'autre urne).

► Comme dans le premier cas,

$$[Y_n = k] = [Y_n = k, V_{2n+2} = 0] \sqcup [Y_n = k, V_{2n+2} = 1]$$

et par équiprobabilité,

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = 2 \mathbf{P}(Y_n = k, V_{2n+2} = 0).$$

L'événement $[V_{2n+2} = 0]$ signifie que le dernier tirage a lieu dans l'urne "0" et donc qu'on a déjà constaté que l'urne "1" a été vidée.

La contrainte $[Y_n = k]$ signifie alors qu'on a tiré k fois de suite dans l'urne "0" avant d'effectuer le $(2n+2)$ -ième et dernier tirage (également dans l'urne "0"). Autrement dit, on s'intéresse aux événements

$$[(V_1, \dots, V_{2n+2}) = \varepsilon]$$

tels que

$$V_{2n+1-k} = 1, \quad V_{(2n+1-k)+1} = \dots = V_{(2n+1-k)+k} = 0, \quad V_{2n+2} = 0$$

(on constate que l'urne "1" est vide; on tire encore k boules dans l'urne "0" et on constate pour finir que l'urne "0" est vide elle aussi).

Le nombre de ces événements est égal à $\binom{2n-k}{n}$ (on choisit la place des n boules "1" parmi les $(2n-k)$ positions libres) et par conséquent

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2 \binom{2n-k}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}.$$

✎ On constate que les variables aléatoires Y_n et $X_{n+1} - 1$ suivent la même loi : les encadrements $1 \leq k \leq n+1$ et $0 \leq k-1 \leq n$ sont équivalents et

$$\mathbf{P}(X_{n+1} - 1 = k - 1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{2 \binom{2(n+1)-k-1}{(n+1)-1}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \frac{2 \binom{2n-(k-1)}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \mathbf{P}(Y_n = k - 1).$$

Si on veut traiter l'exercice dans le temps imparti, il serait judicieux de partir de cette remarque, en la fondant par un argument combinatoire (sans entrer dans les détails).

♣ Comme Y_n est bornée, c'est bien une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{n} = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \left[2n \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} - \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} \right].$$

($k \leftarrow 2n - k$)

D'après la formule du triangle de Pascal (généralisée),

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} = (n+1) \binom{2n+2}{n+2} - \binom{2n+1}{n+1}$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}(Y_n) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \cdot \left[(2n+1) \binom{2n+1}{n+1} - (n+1) \binom{2n+2}{n+2} \right].$$

Après quelques simplifications,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n}{n+2}$$

qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. (Pour alléger les notations, on notera A_t au lieu de $A(t)$.)

1. On suppose qu'il existe une application

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} A_t S_t = A_0.$$

Démontrer qu'il existe une application continue

$$B : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t.$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une application continue $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t.$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

1. On part de l'hypothèse habilement réécrite :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_t S_t = S_t A_0$$

et on dérive en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_t S_t + A_t S'_t = S'_t A_0.$$

Comme la matrice S_t est inversible, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t \quad \text{avec} \quad B_t = S'_t S_t^{-1}.$$

🔗 Comme S est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $[t \mapsto S'_t]$ est continue et comme $S_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $[t \mapsto S_t^{-1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. (Inutile de se fatiguer à calculer la dérivée !)

2. Réciproquement, on s'appuie sur le calcul précédent pour deviner ce que vaut S_t . On a en effet démontré que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'_t = B_t S_t.$$

Autrement dit, S est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : rien de plus simple à résoudre !

☛ Comme $[t \mapsto B_t]$ est continue, elle admet une primitive $[t \mapsto C_t]$ (de classe $\mathcal{C}^1$...) telle que $C_0 = 0_n$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t = \exp C_t.$$

On a ainsi défini une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$S_0 = \exp 0_n = I_n$$

et on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'_t = C'_t (\exp C_t) = (\exp C_t) C'_t = B_t S_t = S_t B_t.$$

On sait aussi que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} = \exp(-C_t)$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d[S_t^{-1}]}{dt} = -C'_t \cdot \exp(-C_t) = -B_t \cdot \exp(-C_t) = -\exp(-C_t) \cdot B_t.$$

☛ On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = S_t^{-1} A_t S_t = \exp(-C_t) \cdot A_t \cdot \exp(C_t).$$

En particulier,

$$F(0) = I_n^{-1} A_0 I_n = A_0.$$

En tant que produit de trois applications de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et on calcule sa dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -[\exp(-C_t) \cdot B_t] \cdot A_t \cdot \exp(C_t) + \exp(-C_t) \cdot A'_t \cdot \exp(C_t) + \exp(-C_t) \cdot A_t \cdot [B_t \cdot \exp(C_t)] \\ &= \exp(-C_t) \cdot (A_t \cdot B_t - B_t \cdot A_t + A'_t) \cdot \exp(C_t) = O_n \end{aligned}$$

par hypothèse sur B_t .

La fonction F est donc constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} \cdot A_t \cdot S_t = F(0) = A_0.$$

On considère $(p + 1)$ urnes numérotées de 0 à p . L'urne i contient i boules blanches et $(p - i)$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note N_p , le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de N_p ?
2. Calculer l'espérance de N_p .
3. Calculer la limite de $P(N_p = j)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Avant de faire le moindre calcul, il convient de définir le modèle probabiliste qui va représenter l'expérience aléatoire étudiée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies une variable aléatoire U de loi uniforme sur $\llbracket 0, p \rrbracket$ et une variable aléatoire $N_p : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ telle que

$$\forall 0 \leq i \leq p, \forall 0 \leq j \leq n, \quad \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i) = \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

La variable U représente le choix de l'urne et le conditionnement par l'événement $[U = i]$ signifie qu'on a choisi l'urne i . La proportion de boules blanches dans cette urne est égale à i/p et, comme d'habitude, le nombre de succès en n tirages successifs avec remise dans cette urne est alors modélisé par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, i/p)$.

1. Les valeurs possibles pour N_p sont les entiers $0 \leq j \leq n$.
Soit $0 \leq j \leq p$. Il est clair que

$$[N_p = j] = \bigcup_{i=0}^p [N_p = j, U = i]$$

donc, par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \sum_{i=0}^p \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i) \mathbf{P}(U = i)$$

et, sous les hypothèses que nous venons de faire,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

2. Comme la variable aléatoire N_p ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_p) &= \sum_{j=0}^n j \mathbf{P}(N_p = j) = \sum_{j=0}^n \frac{j}{p+1} \sum_{i=0}^p \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p n \cdot \frac{i}{p} \quad (*) \\ &= \frac{n}{p(p+1)} \cdot \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

On aura reconnu en $(*)$ l'expression de l'espérance pour la loi $\mathcal{B}(n, i/p)$ et on sait que l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, x)$ est égale à nx .

Le calcul ci-dessus est en fait un cas particulier très simple de la **Formule de l'espérance totale** : si N est une variable aléatoire d'espérance finie et si $U : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, N est une variable aléatoire d'espérance finie pour $\mathbf{P}_{[U=j]}$ et

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_{U=j}(N) \cdot \mathbf{P}(U = j).$$

☞ Par ailleurs, le résultat trouvé n'est pas surprenant : dans le modèle adopté, les boules blanches et les boules noires jouent des rôles symétriques. On en déduit que le nombre moyen de boules blanches est égal au nombre moyen de boules noires. Comme le nombre total de boules tirées est égal à n , le nombre moyen de boules blanches tirées doit être égal à $n/2$.

3. La fonction $[t \mapsto t^j(1-t)^{n-j}]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc la somme de Riemann

$$\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}$$

converge vers

$$\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j} dt$$

lorsque p tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_p = j) = \binom{n}{j} \int_0^1 t^j(1-t)^{n-j} dt.$$

☛ Par intégrations par parties successives,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^i(1-t)^j dt = \frac{i!j!}{(i+j+1)!}$$

donc

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_p = j) = \frac{1}{n+1}.$$

☞ Ainsi, si le nombre d'urnes est très grand, la loi de N_p tend à devenir la loi uniforme sur $[0, n]$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables suivent toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $0 < p < 1$ et on note, comme d'habitude, $q = 1 - p$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$C(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}^* : X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_n(\omega)\}.$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_1 \geq k)$, $\mathbf{P}(X_2 \geq X_1, X_1 = k)$ et $\mathbf{P}(C \geq 2)$.
2. Écrire une fonction `geomCr(q)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire C .
3. Écrire une fonction `nbGeomCr(q)` qui renvoie la moyenne de C calculée sur 1 000 réalisations. En admettant que C soit une variable aléatoire de variance finie, justifier que cette fonction donne une valeur approchée acceptable de $\mathbf{E}(C)$.
4. Tracer `nbGeomCr(q)` en fonction de $0 < q < 1$. Que peut-on conjecturer sur les limites de $\mathbf{E}(C)$ lorsque q tend vers 0 ou vers 1 ?
5. Démontrer que la probabilité

$$\mathbf{P}(X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k)$$

est égale à

$$\frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer $\mathbf{E}(C)$ en fonction de q .
7. Démontrer les propriétés conjecturées plus haut.

En toute rigueur, C est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [C \geq k] \in \mathcal{A}$$

(en convenant que $\max \mathbb{N} = +\infty \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

Le calcul de la loi de C permet de vérifier que C est néanmoins presque sûrement finie :

$$\mathbf{P}(C \in \mathbb{N}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [C \geq k]\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(C \geq k)$$

par continuité décroissante.

1. En décomposant sur le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1 ,

$$[X_1 \geq k] = \bigsqcup_{i \geq k} [X_1 = i]$$

et par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} p q^{i-1} = q^{k-1}.$$

Il est clair que

$$[X_2 \geq X_1, X_1 = k] = [X_2 \geq k] \cap [X_1 = k]$$

et comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{P}(X_2 \geq X_1, X_1 = k) = \mathbf{P}(X_2 \geq k) \mathbf{P}(X_1 = k) = \mathbf{P}(X_1 \geq k) \mathbf{P}(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot q^{2(k-1)}.$$

Avec la convention précisée plus haut,

$$[C \geq 2] = [X_2 \geq X_1] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X_2 \geq X_1, X_1 = k] \in \mathcal{A}$$

donc

$$\mathbf{P}(C \geq 2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{2(k-1)} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

2. La documentation officielle de Python nous suggère fortement de commencer ainsi.

```
from numpy.random import default_rng as generateur

def G(p):
    return generateur().geometric(p)
```

Ensuite, il reste à effectuer des simulations successives jusqu'à ce qu'on tombe sur une valeur plus petite que la valeur précédente.

```
def geomCr(q):
    p = 1-q
    ref, C, valeur = G(p), 1, G(p)
    while valeur >= ref:
        ref, C, valeur = valeur, C+1, G(p)
    return C
```

✎ C'est ici qu'il est important de savoir que C est finie presque sûrement...

3. Il s'agit simplement de calculer une moyenne sur 1 000 termes.

```
def nbGeomCr(q):
    S = 0
    for n in range(1000):
        S += geomCr(q)
    return S/1000
```

✎ Si C est une variable aléatoire de variance finie, alors on peut appliquer la Loi des grands nombres : si $(C_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que C , alors la moyenne

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n}$$

converge en probabilité vers $\mathbf{E}(C)$ — au sens où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} - \mathbf{E}(C) \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

C'est en ce sens que la valeur renvoyée par la fonction `nbGeomCr(q)` (avec $n = 10^3$) est une approximation convenable de $\mathbf{E}(C)$.

✎ On a énoncé la Loi des grands nombres telle qu'elle figure au programme. Sous les mêmes hypothèses (et même sous des hypothèses plus faibles), la moyenne empirique converge vers $\mathbf{E}(C)$ presque sûrement :

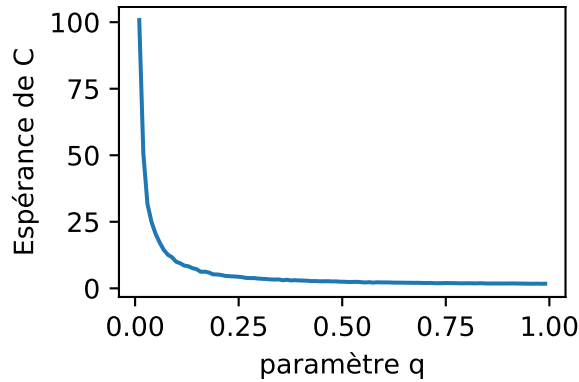
$$\mathbf{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \mathbf{E}(C) \right) = 1.$$

4. Le code est bien connu.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Q = np.linspace(0.01, 0.99, 100)
EC = [ nbGeomCr(q) for q in Q ]
plt.plot(Q, EC)
plt.xlabel("paramètre q")
plt.ylabel("Espérance de C")
```

Et le résultat est le suivant.



On peut conjecturer que $E(C)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et vers une limite positive au voisinage de 1.

✎ Une variable aléatoire géométrique de paramètre p modélise le temps d'attente du premier succès lors d'expériences indépendantes ayant une probabilité p de réussir — et donc une probabilité q d'échouer.

• Lorsque q tend vers 0, chaque expérience a une très forte probabilité de réussir. Autrement dit, les variables aléatoires X_n sont très souvent égales à 1 (= réussite du premier coup). On comprend ainsi que C peut alors prendre de grandes valeurs.

• Inversement, lorsque q tend vers 1, chaque expérience a une faible probabilité de réussir et dans ces conditions les variables aléatoires X_n peuvent prendre des valeurs assez grandes, donc relativement variées et comme elles sont indépendantes, il est très peu probable qu'elles prennent des valeurs croissantes. On comprend que, cette fois, C est très souvent égale à 1 et que l'espérance de C ne soit guère plus grande que 1.

5. Comme $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

$$[X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k] \in \mathcal{A}.$$

En décomposant cet événement sur le système complet associé à X_1 ,

$$\begin{aligned} [X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k] &= \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} [X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k] \cap [X_1 = \ell] \\ &= \bigcup_{\ell \geq k} [X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell] \cap [X_1 = \ell]. \end{aligned}$$

Par σ -additivité, on en déduit que

$$P(X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} P([X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell] \cap [X_1 = \ell]).$$

Comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, on déduit du lemme des coalitions que les événements

$$[X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell] \quad \text{et} \quad [X_1 = \ell]$$

sont indépendants, donc

$$P([X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell] \cap [X_1 = \ell]) = P(X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell) P(X_1 = \ell).$$

De plus, comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad \text{et} \quad (X_2, \dots, X_n)$$

ont même loi et par conséquent

$$P(X_n \geq \dots \geq X_2 \geq \ell) = P(X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq \ell).$$

On a ainsi démontré que

$$P(X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} P(X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq \ell) P(X_1 = \ell)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq 2$.

♣ En reprenant les calculs menés plus haut, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_2 \geq X_1 \geq k) = \frac{pq^{2(k-1)}}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2 q^{2(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)}$$

et cela valide la formule de l'énoncé pour $n = 2$.

En supposant que

$$\mathbf{P}(X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq \ell) = \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})}$$

pour un entier $n \geq 2$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n \geq \dots \geq X_1 \geq k) &= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})} \cdot pq^{\ell-1} \\ &= \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})(1-q^n)} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: le résultat est démontré par récurrence.

♣ Remercions le sujet de cette précieuse indication : le calcul par récurrence de

$$\mathbf{P}(X_n \geq \dots \geq X_1 \geq k)$$

est plus facile que le calcul direct de

$$\mathbf{P}(X_n \geq \dots \geq X_1) = \mathbf{P}(X_n \geq \dots \geq X_1 \geq 1).$$

Par définition de C ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [C \geq n] = [X_n \geq \dots \geq X_1 \geq 1] \in \mathcal{A},$$

ce qui prouve enfin que C est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On peut aussi déduire du calcul précédent que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbf{P}(C \geq n+1) = \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geq n) \leq \frac{1}{1+q} \cdot \mathbf{P}(C \geq n)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(C \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+q)^n}\right).$$

Cela confirme ce qu'on avait annoncé : $\mathbf{P}(C = +\infty) = 0$ et on peut donc, à une partie négligeable près de Ω , considérer que C est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

6. On sait qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(C \geq n)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(C \geq n).$$

La remarque précédente prouve donc que C est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}.$$

7. Commençons par démontrer que C est une variable aléatoire de variance finie. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(C = n) = \mathbf{P}(C \geq n) - \mathbf{P}(C \geq n+1)$$

et, d'après la remarque faite plus haut,

$$0 \leq \mathbf{P}(C = n) = \frac{q(1-q^n)}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geq n) \leq q \mathbf{P}(C \geq n).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(C = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left[\left(\frac{q}{1+q}\right)^n\right]$$

et cette estimation prouve que C admet des moments de tout ordre : quel que soit l'entier $d \geq 1$, la série $\sum n^d \mathbf{P}(C = n)$ est (absolument) convergente.

On a ainsi validé *a posteriori* l'application de la Loi des grands nombres.

♣ Il reste à étudier les limites de $\mathbf{E}(C)$ lorsque q tend vers 0 ou vers 1. Pour cela, on pose $u_1(q) = 1$ et

$$\begin{aligned} u_n(q) &= \frac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} \\ &= \frac{1}{(1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1})} \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 2$ et tout $0 < q < 1$.

♣ Comme chaque fonction u_n est positive et décroissante, la fonction

$$[q \mapsto \mathbf{E}(C)]$$

est elle aussi positive et décroissante. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, lorsque q tend vers 0 et

$$\forall n \geq 2, \quad \lim_{q \rightarrow 0} \mathbf{E}(C) \geq \lim_{q \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n u_k(q) = \sum_{k=1}^n \lim_{q \rightarrow 0} u_k(q) = n.$$

Cela prouve que $\mathbf{E}(C)$ tend effectivement vers $+\infty$ lorsque q tend vers 0.

♣ Sur la deuxième expression de $u_n(q)$, il est clair que

$$\forall n \geq 2, \forall q \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq u_n(q) \leq u_n(1/2)$$

et comme la série $\sum u_n(1/2)$ converge, on a démontré que la série $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[1/2, 1[$. Par conséquent,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{q \rightarrow 1} u_n(q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e - 1 \approx 1,7.$$

|| Soient E , un espace vectoriel réel de dimension n et u , un endomorphisme de E ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Déterminer le nombre d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

Comme u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}(u - \lambda_k I)$$

et ses sous-espaces propres sont des droites :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \dim \text{Ker}(u - \lambda_k I) = 1.$$

Si $v^2 = u$, alors u et v commutent (ce sont deux polynômes en v) et par conséquent, tout sous-espace propre de u est aussi stable par v . Comme les sous-espaces propres de u sont des droites, leurs vecteurs directeurs respectifs (qui sont par construction des vecteurs propres de u) sont donc des vecteurs propres de v .

Autrement dit, quelle que soit la base

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres pour u considérée,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Mais $u = v^2$, donc $D = \Delta^2$ et par conséquent

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mu_k^2 = \lambda_k.$$

♣ On distingue alors les cas suivants.

- Si l'un des λ_k au moins est strictement négatif, le problème posé n'a pas de solution. (On travaille sur un espace vectoriel réel, donc les μ_k doivent être réels).
- Si tous les λ_k sont strictement positifs, alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mu_k = \pm \sqrt{\lambda_k}.$$

Il y a donc 2^n choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ et donc 2^n endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

- Si l'un des λ_k est nul ($\lambda_1 = 0$ par exemple), alors les $(n-1)$ autres sont strictement positifs (puisque'ils sont deux à deux distincts) et il y a cette fois seulement 2^{n-1} choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ (puisque'on a nécessairement $\mu_1 = 0$) et donc seulement 2^{n-1} endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$$

et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

1. Soit $x \in \text{Ker}(u - I)$. Déterminer la limite de $v_n(x)$.
2. Soit $x \in \text{Im}(u - I)$. Déterminer la limite de $v_n(x)$.
3. Démontrer que $\text{Ker}(u - I)$ et $\text{Im}(u - I)$ sont supplémentaires dans E .
4. Soit p , la projection sur $\text{Ker}(u - I)$ parallèlement à $\text{Im}(u - I)$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers p .

1. Comme $u(x) = x$, alors

$$\forall n \geq 1, \quad v_n(x) = x$$

donc la suite de terme général $v_n(x)$ converge dans ce cas vers x .

2. Si $x \in \text{Im}(u - I)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [u^{k+1}(y) - u^k(y)] = \frac{u^n(y) - y}{n}.$$

Par inégalité triangulaire et hypothèse sur u ,

$$\forall n \geq 1, \quad \|v_n(x)\| \leq \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

Par encadrement, on en déduit que la suite de terme général $v_n(x)$ converge vers 0_E .

3. Par hypothèse, u est un ENDOMORPHISME de E , espace vectoriel DE DIMENSION FINIE. D'après le Théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(u - I) + \dim \text{Im}(u - I) = \dim E.$$

Par ailleurs, si $x \in \text{Ker}(u - I) \cap \text{Im}(u - I)$, alors la suite de terme général $v_n(x)$ converge vers x (première question) et vers 0_E (deuxième question). Par unicité de la limite, on en déduit que $x = 0_E$. On a ainsi démontré que

$$E = \text{Ker}(u - I) \oplus \text{Im}(u - I).$$

4. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $L(E)$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie et toutes les normes sur $L(E)$ sont équivalentes : nous allons choisir une norme pour laquelle le résultat immédiat à démontrer.

• Puisque $\text{Ker}(u - I)$ et $\text{Im}(u - I)$ sont supplémentaires dans E , on peut considérer une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de $\text{Im}(u - I)$ et une base $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_d)$ de $\text{Ker}(u - I)$ et en déduire que la famille

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_d)$$

est une base de E .

Par définition de p ,

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad p(\varepsilon_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall r < k \leq d, \quad p(\varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

• Pour tout endomorphisme f de E , on pose alors

$$N_{\mathcal{B}}(f) = \sum_{k=1}^d \|f(\varepsilon_k)\|.$$

► Il n'y a qu'un nombre fini de termes et tous sont positifs, donc cette somme existe et est un réel positif.

► Par homogénéité de la norme sur E , $N_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot N_{\mathcal{B}}(f)$.

► Si $N_{\mathcal{B}}(f) = 0$, alors

$$\forall 1 \leq k \leq d, \quad 0 \leq \|f(\varepsilon_k)\| \leq N_{\mathcal{B}}(f) = 0$$

donc l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$ est le vecteur nul. Comme $\mathcal{B}$ est une base, cela prouve que f est bien l'endomorphisme nul. Donc $N_{\mathcal{B}}$ sépare les points.

► Par inégalité triangulaire dans E et comme le maximum est un majorant,

$$\forall 1 \leq k \leq d, \quad \|(f+g)(\varepsilon_k)\| \leq \|f(\varepsilon_k)\| + \|g(\varepsilon_k)\|$$

et en sommant pour $1 \leq k \leq d$ ces inégalités, on en déduit que $N_{\mathcal{B}}$ vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall f, g \in L(E), \quad N_{\mathcal{B}}(f+g) \leq N_{\mathcal{B}}(f) + N_{\mathcal{B}}(g).$$

Donc $N_{\mathcal{B}}$ est bien une norme sur $L(E)$.

• D'après les deux premières questions,

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq k \leq r, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\varepsilon_k) &= 0_E = p(\varepsilon_k) \\ \text{et } \forall r < k \leq d, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k = p(\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$N_{\mathcal{B}}(v_n - p) = \sum_{k=1}^d \|p(\varepsilon_k) - v_n(\varepsilon_k)\|$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (somme de d suites de limite nulle), ce qui prouve que la suite d'endomorphismes $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers le projecteur p (pour la norme $N_{\mathcal{B}}$ et DONC pour toutes les normes sur $L(E)$).

Dans un espace euclidien E , on considère un endomorphisme **antisymétrique** f :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) | y \rangle = -\langle x | f(y) \rangle.$$

1. Démontrer que

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x) | x \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle f^2(x) | x \rangle \leq 0.$$

2. Soit $\mathcal{B}$, une base orthonormée de E . Que dire de la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$?

3. En calculant $\det(A^\top)$, démontrer que : si f est inversible, alors la dimension de E est paire.

4. Démontrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-$.

1. Avec $y = x$ et la symétrie du produit scalaire,

$$\langle f(x) | x \rangle = -\langle x | f(x) \rangle = -\langle f(x) | x \rangle$$

donc $\langle f(x) | x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

Par antisymétrie de f ,

$$\langle f^2(x) | x \rangle = \langle f(f(x)) | x \rangle = -\langle f(x) | f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$$

donc $\langle f^2(x) | x \rangle \leq 0$ pour tout $x \in E$.

2. Dans une base orthonormée de E , la propriété d'antisymétrie de f se traduit matriciellement par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (AX)^\top \cdot Y = -X^\top \cdot (AY)$$

c'est-à-dire

$$X^\top \cdot A^\top \cdot Y = -X^\top \cdot A \cdot Y$$

ou encore

$$X^\top \cdot (A^\top + A) \cdot Y = 0.$$

Cette propriété étant vérifiée pour *toutes* les matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que $A^\top + A = 0_n$, c'est-à-dire

$$A^\top = -A.$$

La réciproque est vraie : si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée et si la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est antisymétrique, alors l'endomorphisme f est antisymétrique.

3. Le déterminant d'une matrice carrée quelconque est toujours égal au déterminant de sa transposée. Par conséquent,

$$\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Si f est inversible, alors $\det A \neq 0$ et par conséquent $(-1)^n = 1$. La dimension de E est donc paire.

4. La matrice de f^2 relative à la base $\mathcal{B}$ est égale à $A^2 = -A^\top \cdot A$. Elle est donc symétrique réelle et comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on en déduit que f^2 est un endomorphisme symétrique. En particulier (Théorème spectral), l'endomorphisme f^2 est diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f^2 et si $x_0 \neq 0_E$ est un vecteur propre de f^2 associé à λ , alors

$$\lambda \|x_0\|^2 = \langle f^2(x_0) | x_0 \rangle \leq 0.$$

Or $\|x_0\|^2 > 0$ (puisque $x_0 \neq 0_E$), donc $\lambda \leq 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2).$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels a , b et c .

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n = (a + b + c) \ln n + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a + b + c) \ln n + \frac{b + 2c}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

► Si $a + b + c \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

► Si $a + b + c = 0$ et $b + 2c \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b + 2c}{n}$$

et $\sum u_n$ diverge (mais pas grossièrement).

► Enfin, si $a + b + c = b + 2c = 0$, alors $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument).

🔗 Dans ce dernier cas, on a $b = -2a$ et $c = a$, donc

$$u_n = a [\ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)]$$

et on reconnaît une série télescopique :

$$\forall N \geq 2, \quad \sum_{n=1}^N u_n = a \left[-\ln 2 + \ln \frac{N+2}{N+1} \right]$$

donc la somme de la série est égale à $-a \ln 2$.

On pose

$$F(\alpha) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Tout d'abord, $F(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$ (somme d'une série de Riemann convergente).

• Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall \alpha > 0, \quad F(\alpha) \geq \alpha \cdot \frac{1}{1^{1+\alpha}} = \alpha$$

et par comparaison, F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

• La fonction f définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}$$

est continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Par comparaison entre une somme et une intégrale (*faites une figure !*),

$$\forall \alpha > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha} \leq F(\alpha) \leq \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0, \quad 1 \leq F(\alpha) \leq 1 + \alpha.$$

Par encadrement, on en déduit que F tend vers 1 au voisinage (droit) de 0 .

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions.
2. Soit $A > 0$. Démontrer qu'il existe une constante M telle que

$$\forall x \in [0, A], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln k} \right| \leq \frac{M}{\ln n}.$$

Que peut-on en déduire ?

3. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ln k}.$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

1. Pour tout $k \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_k(x) = \frac{x e^{-kx}}{\ln k}.$$

Il est clair que les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $x = 0$, on a $u_k(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et la série $\sum u_k(x)$ converge évidemment.
- Pour $x > 0$, on a

$$u_k(x) = \frac{x}{\ln k} \cdot e^{-kx} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o((e^{-x})^n)$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum u_k(x)$ converge absolument.

La série de fonctions $\sum u_k$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ au moins. Comme la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x < 0$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et seulement sur $\mathbb{R}_+$.

- Chaque fonction u_k est positive et comme

$$\forall x > 0, \quad u'_k(x) = \frac{e^{-kx}}{\ln k} (1 - kx),$$

on en déduit que

$$\|u_k\|_\infty = u_k(1/k) = \frac{1}{e k \ln k}.$$

Comme la série $\sum \|u_k\|_\infty$ diverge, la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Les séries de Bertrand n'étant pas au programme, pour justifier la divergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln k}$, il faut prétendre qu'on a pris soin de comparer les sommes partielles de cette série aux intégrales

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln t} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \ln n.$$

De cette manière, les apparences sont sauvées...

2. Comme les $u_k(x)$ sont positifs,

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=n}^{+\infty} x e^{-kx} \leq \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

La fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto \frac{x}{1 - e^{-x}} \right]$$

est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 1 au voisinage de 0. Elle admet donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$ et comme toute fonction continue sur un segment est bornée, quel que soit $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, A], \quad 0 \leq \frac{x}{1 - e^{-x}} \leq M.$$

Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall x \in [0, A], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln k} \right| \leq \frac{M}{\ln n}.$$

Cet encadrement prouve que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, A]$.

3. Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et que A est quelconque, on en déduit que la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (= l'union des segments $[0, A]$ lorsque A parcourt $\mathbb{R}_+^*$).

• Fixons maintenant $\alpha > 0$.

► Si l'entier k est assez grand pour que $k\alpha > 1$, on déduit de l'étude des variations de u_k que

$$\forall x \geq \alpha, \quad 0 \leq u_k(x) \leq u_k(\alpha).$$

Le majorant est indépendant de $x \in [\alpha, +\infty[$ et la série $\sum u_k(\alpha)$ est convergente, donc la série $\sum u_k$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

✎ *Pour l'instant, cette étude ne nous apprend rien de nouveau. Patience...*

► Par inégalité triangulaire, pour tout $k \geq 2$,

$$\forall x > 0, \quad |u'_k(x)| \leq \frac{e^{-kx}}{\ln k} + k u_k(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout k assez grand,

$$\forall x \geq \alpha, \quad |u'_k(x)| \leq (e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha).$$

Le majorant ne dépend pas de x et

$$(e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(k e^{-k\alpha}).$$

Comme la série $\sum k(e^{-\alpha})^k$ converge absolument pour $\alpha > 0$ (puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum kx^k$ est égal à 1 et que $0 < e^{-\alpha} < 1$). Donc la série des dérivées $\sum u'_k$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$.

D'après le Théorème de dérivation terme à terme, la somme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{\alpha > 0} [\alpha, +\infty[$$

et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u'_k(x).$$

4. Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{e^{-kx}}{\ln k}.$$

• Comme $\ln k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(k)$, la série $\sum \frac{1}{\ln k}$ est divergente par comparaison à la série harmonique (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif).

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ln k}$ est divergente, il existe $n_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ln k} \geq 2A.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ln k} = \sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ln k} \geq 2A$$

et que $0 < A < 2A$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ln k} \geq A.$$

Par conséquent,

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad \frac{f(x)}{x} \geq A.$$

Comme A est arbitrairement grand, on en déduit que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

On a démontré que le taux d'accroissement $[f(x) - f(0)]/(x - 0)$ tendait vers $+\infty$ et donc que le graphe de f admettait une tangente verticale (vers le haut !) à l'origine.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.

2. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

1. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de A , même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)

Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

► La deuxième colonne de la matrice A nous indique que 1 est une valeur propre de A . De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc $\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$.

► La trace de A est égale à 3 et comme A est diagonalisable, il existe deux réels $1 \pm \alpha$ tels que $\text{Sp}(A) = \{1 - \alpha; 1; 1 + \alpha\}$.

Le déterminant de A est égal à -3 (calcul rapide) et aussi à $1 - \alpha^2$, donc $\alpha = 2$ et

$$\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 3\}.$$

► Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$.

► En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Diag}(-1, 1, 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A , respectivement associés aux valeurs propres -1 , 1 et 3).

On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.

On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage P orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

2. En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de A .

✎ Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle $y' = y$ et d'autre part le système

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

• Première méthode.

En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \quad v(t) = K_2 e^t, \quad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc $X = (x, y, z)$ est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^t \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✎ Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.

Cela dit, le cours nous dit que la solution X peut s'exprimer en fonction de la position initiale $X(0)$ à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \frac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \frac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé P^{-1}) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne $X(0)$ est quelconque, on peut en déduire $\exp(tA)$ par identification.

Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

▣ Deuxième méthode

On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour A :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale P_k sur la droite $\mathbb{R} \cdot u_k$ est donnée par

$$P_k = \frac{u_k \cdot u_k^\top}{u_k^\top \cdot u_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 étant -1 , 1 et 3 respectivement, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \cdot P_1 + 1^n \cdot P_2 + 3^n \cdot P_3$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{-t} \cdot P_1 + e^t \cdot P_2 + e^{3t} \cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X(0) = e^{-t} \cdot P_1 X(0) + e^t \cdot P_2 X(0) + e^{3t} \cdot P_3 X(0).$$

🔗 Cette méthode pour calculer $\exp(tA)$ est préférable à la précédente (cet avis n'engage que moi).

1. Soient X , une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{p}{n} \mathbf{P}(X = n - 1).$$

Déterminer la loi de X .

2. Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

1. On démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{p^n}{n!} \mathbf{P}(X = 0).$$

À un facteur près, on reconnaît la loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$, donc $\mathbf{P}(X = 0) = e^{-p}$.

2. Comme X est positive, la variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$ est bornée (ses valeurs sont comprises entre 0 et 1), donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et son espérance peut se calculer à l'aide de la Formule de transfert. On a donc

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \cdot e^{-p} \frac{p^k}{k!} = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{p^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-p}}{p} \cdot (e^p - 1) = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

1. Quelle est la loi de $X + Y$?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant

$$[X + Y = n].$$

Préciser l'espérance et la variance de cette loi.

1. D'après le cours (additivité de la loi de Poisson), la variable aléatoire $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. Comme $X + Y$ suit une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X + Y = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

► Comme Y est à valeurs positives, on a $X(\omega) \leq X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Pour tout entier $k > n$, on a donc

$$[X = k] \cap [X + Y = n] = \emptyset$$

et donc $\mathbf{P}(X = k \mid X + Y = n) = 0$.

► Pour $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k \mid X + Y = n) &= \frac{\mathbf{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbf{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} \\ &\quad \text{(par indépendance)} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

♣ On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_{X+Y=n}(X) = n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X \mid X + Y = n) = n \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

Soient X, Y et Z , des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs a, b et c . On pose

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = Y + Z.$$

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V .

✎ Si U et V sont deux variables aléatoires de carré intégrable, alors leur coefficient de corrélation linéaire est défini par :

$$\rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sigma(U) \cdot \sigma(V)}$$

(où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X).

D'après l'inégalité de Schwarz, le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1 . D'après le cas d'égalité, il est égal à ± 1 si, et seulement si, il existe un couple réel $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que la combinaison linéaire $\alpha U + \beta V$ soit presque sûrement constante.

Comme X, Y et Z suivent une loi de Poisson, ce sont des variables aléatoires de carré intégrable. Par combinaisons linéaires, les variables aléatoires U et V sont aussi de carré intégrable, donc leur coefficient de corrélation linéaire est bien défini.

Par bilinéarité de la covariance,

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(Y, Y) = \text{V}(Y) = b.$$

puisque des variables aléatoires indépendantes sont décorrélées.

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances, donc

$$\sigma(U) \cdot \sigma(V) = \sqrt{\text{V}(X) + \text{V}(Y)} \sqrt{\text{V}(Y) + \text{V}(Z)} = \sqrt{(a + b)(b + c)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire de U et V est donc égal à

$$\frac{b}{\sqrt{(b + a)(b + c)}}.$$

Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise les notations habituelles pour les vecteurs de la base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Analyse

► Si une telle matrice A existe, alors $A^4 = (A^2)^2 = 0_3$, donc A est nilpotente et son indice de nilpotence est strictement supérieur à 2. Comme l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est inférieur à 3, on en déduit que l'indice de nilpotence de A est égal à 3 et donc que $A^3 = 0_3$.

En particulier, la matrice A n'est pas inversible, $\dim \operatorname{Ker} A \geq 1$ et

$$\mathbb{R} \cdot E_1 = \operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$$

puisque $A^3 = A \times A^2 = 0_3$.

► On vient de remarquer que le vecteur E_1 appartient à $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$. Par ailleurs, $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 = [z = 0]$ et $\dim \operatorname{Ker} A \leq 2$.

Si $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, alors $\operatorname{rg} A = 1$ (Théorème du rang) et d'après les inclusions précédentes,

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot E_1 \subset [z = 0] = \operatorname{Ker} A.$$

Dans ces conditions, $A^2 = A \times A = 0_3$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et par conséquent

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^2 = \mathbb{R} \cdot E_1.$$

La première colonne de A , égale à AE_1 , est donc la colonne nulle.

► La deuxième colonne de A^2 , égale à $A^2 E_2 = A(AE_2) = 0$, nous dit que AE_2 (la deuxième colonne de A) appartient au noyau de A . Elle est donc proportionnelle à E_1 : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$AE_2 = \alpha E_1$$

et comme $E_2 \notin \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot E_1$, le scalaire α ne peut pas être nul.

► Enfin, la troisième colonne de A^2 vérifie :

$$E_1 = A^2 E_3 = \frac{1}{\alpha} A E_2$$

et par conséquent

$$A \left(A E_3 - \frac{1}{\alpha} E_2 \right) = 0.$$

Connaissant le noyau de A , on en déduit qu'il existe donc un réel β tel que

$$A E_3 - \frac{1}{\alpha} E_2 = \beta E_1.$$

Il existe donc deux réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Synthèse

Il est clair que

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient les réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Soit f , un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ différent de l'endomorphisme nul ω_E et représenté par une matrice A dans la base canonique. On suppose que $f + f^3 = 0$.

1. Démontrer que A n'est pas inversible.

2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I).$$

3. Démontrer que $\text{Ker } f$ n'est pas réduit au vecteur nul.

4. Démontrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On a supposé que $A + A^3 = 0_3$. Si la matrice A était inversible, on pourrait en déduire que $I_3 + A^2 = 0_3$ et donc que

$$\det(A^2) = \det(-I_3) = (-1)^3 = -1.$$

Or $\det(A^2) = (\det A)^2$ et comme $\det A \in \mathbb{R}$, il est impossible que $(\det A)^2 = -1$. Donc la matrice A n'est pas inversible.

2. Le polynôme $X + X^3 = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f et les facteurs X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux (ils sont irréductibles et ne sont pas associés). Le Théorème de décomposition des noyaux donne directement

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I).$$

3. On a démontré que la matrice A n'était pas inversible. Comme f (représenté par A) est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la non-inversibilité de f prouve la non-injectivité de f (Théorème du rang). Autrement dit, $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$.

4. Comme $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$, il existe un vecteur non nul ε_1 dans $\text{Ker } f$.

Comme $f \neq \omega_E$, le sous-espace $\text{Ker}(f^2 + I)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et il existe donc un vecteur non nul ε_2 dans $\text{Ker}(f^2 + I)$.

Le sous-espace $\text{Ker}(f^2 + I)$ est stable par f (c'est le noyau d'un polynôme en f), donc le vecteur $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$ appartient aussi à $\text{Ker}(f^2 + I)$.

Si $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ était liée, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3 = \lambda \cdot \varepsilon_2,$$

donc ε_2 serait un vecteur propre de f associé à λ . Mais comme $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(f^2 + I)$, on aurait aussi

$$-\varepsilon_2 = f^2(\varepsilon_2) = \lambda^2 \cdot \varepsilon_2$$

et donc $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible. On a donc une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace $\text{Ker}(f^2 + I)$.

Comme les deux sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Ker}(f^2 + I)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, que $\dim \text{Ker } f \geq 1$ et que $\dim \text{Ker}(f^2 + I) \geq 2$, on a donc

$$\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f^2 + I) = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

ce qui prouve que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base la matrice de f est bien égale à B : les matrices A et B sont donc semblables.

1. Soit u , un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = n$.

1.a. Démontrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$.

1.b. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit u , un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2n$.

2.a. Démontrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$.

2.b. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

1.a. Comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie égale à $2n$, on déduit du théorème du rang que

$$\dim \text{Ker } u = 2n - \text{rg } u = n. \quad (5)$$

Par ailleurs, comme $u^2 = 0$, on a aussi

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u. \quad (6)$$

On a établi une inclusion et l'égalité des dimensions (finies!), donc les deux sous-espaces sont égaux :

$$\text{Im } u = \text{Ker } u. \quad (7)$$

1.b. Comme la dimension de $\text{Im } u$ est égale à n , il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\text{Im } u$ et, par définition de l'image, il existe une famille $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ de vecteurs tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_k = u(e_{n+k}).$$

Vérifions la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est bien une base de $\mathbb{R}^{2n}$: pour des raisons de dimension, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre. Si les scalaires λ_k ($1 \leq k \leq 2n$) sont tels que

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0, \quad (8)$$

alors

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u(e_{n+k}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0.$$

Par linéarité de u et comme $u^2 = 0$,

$$0 = \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot u(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

Par construction, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc les scalaires $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ sont tous nuls. Il ne reste de (8) que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = 0.$$

À nouveau, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous nuls : on a prouvé que $\mathcal{B}$ était une famille et (donc) une base de $\mathbb{R}^{2n}$.

• Comme $u^2 = 0$,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(e_k) = u^2(e_{n+k}) = 0.$$

D'autre part, par définition de la famille $\mathcal{B}$,

$$\forall n+1 \leq k \leq 2n, \quad u(e_{n+k}) = e_k.$$

Donc la matrice de u relative à cette base $\mathcal{B}$ est bien la matrice voulue.

2.a. D'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^{3n} - \operatorname{rg} u = 3n - 2n = n. \quad (9)$$

Comme $u^3 = u \circ u^2 = 0$, il est clair que

$$\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u \quad (10)$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u^2 \leq \dim \operatorname{Ker} u = n. \quad (11)$$

Comme $\operatorname{Ker} u$ est un espace de dimension n (9) contenu dans $\operatorname{Ker} u^2$, il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\operatorname{Ker} u$ et on peut compléter cette base pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} u^2$:

$$\operatorname{Vect}(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}_{\text{base de } \operatorname{Ker} u}, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \quad (12)$$

On en déduit que

$$\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \quad (13)$$

La famille $(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r))$ est libre : en effet, si

$$\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot u(\varepsilon_k) = 0,$$

alors

$$u\left(\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot \varepsilon_k\right) = 0.$$

Dans ces conditions, la combinaison linéaire

$$\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot \varepsilon_k$$

appartient à la fois à $\operatorname{Ker} u$ et à $\operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$, alors que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Par conséquent, cette combinaison linéaire est nulle et comme la famille $(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$ est libre, on en déduit que les scalaires $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_r$ sont tous nuls.

Comme $u^2 = 0$, la famille $(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r))$ est une famille libre de $(r - n)$ vecteurs dans $\operatorname{Ker} u$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u = n$ par (9), on en déduit que $(r - n) \leq n$, c'est-à-dire

$$\dim \operatorname{Ker} u^2 = r \leq 2n. \quad (14)$$

D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} u^2 = \dim \mathbb{R}^{3n} - \dim \operatorname{Ker} u^2 \geq 3n - 2n = n \quad (15)$$

et d'après (11) et (9), on a donc

$$\operatorname{rg} u^2 = n = \dim \operatorname{Ker} u. \quad (16)$$

Avec l'inclusion (10) et l'égalité des dimensions, on a prouvé que

$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u.$$

2.b. Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Im} u^2$. Il existe donc une famille $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_k = u^2(e_{2n+k})$$

et on pose

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_{n+k} = u(e_{2n+k}).$$

On vient de définir une famille

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) \\ &= (u^2(e_{2n+1}), \dots, u^2(e_{3n}), u(e_{2n+1}), \dots, u(e_{3n}), e_{2n+1}, \dots, e_{3n}). \end{aligned}$$

Il suffit bien entendu de vérifier que cette famille est libre pour démontrer que c'est une base de $\mathbb{R}^{3n}$.
Considérons donc une relation de liaison :

$$0 = \sum_{k=1}^{3n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{2n+k} \cdot e_{2n+k}$$

et appliquons u^2 : comme $u^3 = 0$, il reste seulement

$$0 = \sum_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k \cdot u^2(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_{2n+k} \cdot e_k$$

et comme la sous-famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre par construction, on en déduit que $\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{3n} = 0$. Il reste alors

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k})$$

et on applique u . Comme $u^3 = 0$,

$$0 = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u^2(e_{2n+k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

On obtient, comme précédemment, ainsi que $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$. Il reste donc seulement

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = 0$$

d'où on déduit enfin que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

• Comme $u(e_1) = u^3(e_{2n+1}) = 0, \dots, u(e_n) = u^3(e_{3n}) = 0$ et comme, par construction même,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(e_{n+k}) = e_k \quad \text{et} \quad u(e_{2n+k}) = e_{n+k},$$

la matrice de u dans cette base a exactement la forme voulue.

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Retrouver cette expression en décomposant A sous la forme $I_3 + N$.

1. La première colonne de A nous montre que $1 \in \text{Sp}(A)$. Le rang de la matrice

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $[y - z = 0]$.

La trace de A est égale à 3 et c'est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme 1 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 (= dimension du sous-espace propre), on en déduit que 1 est en fait valeur propre triple.

La multiplicité de la valeur propre 1 étant strictement supérieure à la dimension du sous-espace propre associé à 1, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

2. Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0$. S'il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = T,$$

alors le vecteur ε_3 est choisi hors de $\text{Ker}(f - I)$, le vecteur ε_2 est l'image de ε_3 par $f - I$ et le vecteur ε_1 est choisi de telle sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\text{Ker}(f - I)$.

Choisissons $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$. Il faut alors $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) - \varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et on peut choisir $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ (qui vérifie l'équation du plan $\text{Ker}(f - I)$ sans être proportionnel à ε_2).

Il est clair que la matrice

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui prouve que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, par construction des vecteurs ε_k , on a bien

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ce qui prouve que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = T$.

Les matrices A et T sont donc bien semblables.

3. D'après ce qui précède, $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \stackrel{(*)}{=} P T^n P^{-1}.$$

On vérifie facilement (récurrence, binôme...) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nT - (n-1)I_3.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \stackrel{(*)}{=} nA - (n-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & -n \\ 0 & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

✎ On a utilisé deux fois $(*)$ le fait que l'application $[M \mapsto PMP^{-1}]$ est un morphisme d'algèbres.

4. On a déjà défini la matrice N . Il est clair que N est nilpotente d'indice 2 (c'est-à-dire $N \neq 0_3$ et $N^2 = 0_3$). Comme toute matrice commute à I_3 , on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + \binom{n}{1}N^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}N^k = I_3 + nN.$$

✎ Ce n'est vraiment pas très différent des calculs qui précèdent...

Soient E , un espace vectoriel de dimension trois, et (e_1, e_2, e_3) , une base de E .
Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'endomorphisme f_a de E en posant

$$f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 \quad \text{et} \quad f_a(e_2) = 0_E.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f_a .
2. Écrire la matrice A de f_a relative à la base (e_1, e_2, e_3) .
3. Calculer A^2 . Qu'en déduire ?
4. Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

1. Par définition, le noyau de f_a contient les vecteurs $e_1 - e_3$ et e_2 . Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, les vecteurs

$$\varepsilon_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

sont linéairement indépendants, donc $\dim \text{Ker } f_a \geq 2$.

Par ailleurs, le vecteur

$$\varepsilon_3 = f_a(e_1) = a \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - a \cdot e_3 = a \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$$

n'est pas nul (en tant que combinaison linéaire d'une famille libre dont les coefficients ne sont pas tous nuls) et appartient à l'image de f_a . Donc le rang de f_a est au moins égal à 1.

D'après le Théorème du rang,

$$\text{Ker } f_a = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad \text{Im } f_a = \mathbb{C} \cdot (a \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

2. La matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3) est égale à

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

La matrice de f_a dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$ est égale à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, ces deux matrices sont semblables.

3. Il est clair que $(A')^2 = 0_3$. Comme A et A' sont semblables, $A^2 = 0_3$.

✎ On pouvait aussi remarquer que $\text{Im } f_a \subset \text{Ker } f_a$ pour conclure encore plus vite.

La matrice A est donc nilpotente. Comme elle n'est pas nulle, elle est donc nilpotente d'indice 2 : son polynôme minimal est égal à X^2 et son polynôme caractéristique à X^3 .

4. Puisque A est nilpotente, son spectre est égal à $\{0\}$. Cette matrice n'est donc pas inversible.

Si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle et donc en fait égale à la matrice nulle. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Soit φ , l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \psi(P) = P + P'.$$

1. Démontrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. La matrice M_φ qui représente ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle inversible ?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

1. Il est clair que ψ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. De plus,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg P' \leq \deg P$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg \psi(P) \leq \max\{\deg P, \deg P'\} \leq \deg P \leq n$$

donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: l'application ψ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il est clair que $\psi(1) = 1$ et que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \psi(X^k) = X^k + kX^{k-1},$$

donc

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible.

3. Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp } \psi = \{1\}$.
Pour $n \geq 2$, la matrice est distincte de I_n , donc elle n'est pas diagonalisable.

✎ La seule matrice semblable à la matrice identité I_n est la matrice I_n elle-même.

De ce fait, la seule matrice diagonalisable dont le spectre soit réduit à $\{\lambda\}$ est la matrice λI_n , matrice de l'homothétie de rapport λ .

En revanche, pour $n = 1$, elle est diagonale (*soupir*).

Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}).$$

On suppose que $a + c = b + d = 1$.

1. Démontrer que : si

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

2. Démontrer que $(1, -1)$ est un vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?

3. Soit V , un vecteur propre non colinéaire à $(1, -1)$, alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

1. L'hypothèse faite sur A peut se traduire matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_U.$$

Par conséquent, si $AX = Y$, alors

$$UY = U(AX) = (UA)X = UX$$

c'est-à-dire : $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2. D'après la question précédente,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avec $y_1 + y_2 = 1 - 1 = 0$, donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cela prouve que le vecteur (**non nul!**) $(1, -1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre y_1 . D'après les coefficients de A , la valeur propre y_1 est aussi égale à $(a - b)$.

3. Si $V = (x_1, x_2)$ est un vecteur propre de A , alors

$$AV = \lambda \cdot V,$$

donc $x_1 + x_2 = \lambda \cdot (x_1 + x_2)$. Si V n'est pas colinéaire à $(1, -1)$, alors $x_1 + x_2 \neq 0$ et par conséquent $\lambda = 1$.

🔗 La trace de A est égale à $a + d = a + (1 - b) = (a - b) + 1$: c'est bien la somme des deux valeurs propres qu'on a trouvées.

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

2. Trouver une matrice $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

3. Les matrices $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 2-\lambda & 5-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 3 & -\lambda \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right) \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda). \end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique de A est $(X-2)^2(X-4)$: le spectre de A est égal à $\{2; 4\}$. Les matrices

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

sont toutes les deux de rang 1, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Ces matrices nous indiquent que

$$\text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \text{Ker}(A - 4I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Comme $(X-2)$ et $(X-4)$ sont scindés et n'ont pas de racine commune, ils sont premiers entre eux, donc $(X-2)^2$ et $(X-4)$ sont premiers entre eux et, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 4I_3) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3)^2. \quad (*)$$

La matrice

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nous indique que $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$ est le plan d'équation $[2x - y - z = 0]$. Comme le vecteur $(0, 1, -1)$ appartient à ce plan sans être colinéaire au vecteur $(1, 1, 1)$ (qui dirige $\text{Ker}(A - 2I_3)$), on dispose d'une base de $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$.

• On constate que

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible : c'est la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à la décomposition $(*)$, constituée d'un vecteur propre ε_1 associé à 4 ; d'un vecteur propre ε_2 associé à 2 et d'un vecteur ε_3 tel que

$$(A - 2I_3)(\varepsilon_3) = \varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\varepsilon_3 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_3.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

✎ Si B est une matrice telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \alpha \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et il suffit de choisir $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir

$$P^{-1}B^2P = P^{-1}AP$$

et donc $B^2 = A$.

✎ Pour ceux qui attachent de l'importance à ces détails,

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

et le calcul explicite de B est particulièrement pénible.

✎ On a une excellente raison de chercher $P^{-1}BP$ sous forme triangulaire.

En effet, si $B^2 = A$, alors $A.B = B^3 = B.A$, donc chaque sous-espace propre de A est stable par B et comme ces sous-espaces sont des droites, les vecteurs ε_1 et ε_2 qui les dirigent sont en fait des vecteurs propres de B . Ainsi, $P^{-1}BP$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Mais de plus chaque sous-espace caractéristique $\text{Ker}(A - \lambda I_3)^m$ de A est stable par B (cette notion n'est pas au programme), donc $P^{-1}BP$ est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Cela nous indique sous quelle forme chercher $P^{-1}BP$ et nous assure qu'il n'y a pas beaucoup d'autres solutions que celle qu'on vient d'exhiber.

3. Si B était diagonalisable, alors $B^2 = A$ serait aussi diagonalisable : aucune des solutions de l'équation n'est donc diagonalisable.

1. Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.a. Démontrer que, si la matrice A est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

1.b. Démontrer que cette propriété reste vraie lorsque A n'est pas inversible.

2. Soient f et g , deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une valeur propre non nulle λ de $f \circ g$ et on pose

$$E_\lambda = \text{Ker}(f \circ g - \lambda I) \quad \text{et} \quad F_\lambda = \text{Ker}(g \circ f - \lambda I).$$

2.a. Démontrer que λ est une valeur propre de $g \circ f$, puis que

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \quad \text{et} \quad f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

2.b. En déduire que $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$.

1.a. Supposons que A soit inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - BA) &= \det(\lambda A^{-1} - B) \cdot \det A \\ &= \det A \cdot \det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda I_n - AB). \end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc ensemble *infini*), on en déduit que le polynôme caractéristique de AB est égal au polynôme caractéristique de BA .

1.b. On sait que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (toute matrice A est limite d'une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles) et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les applications

$$[A \mapsto \det(\lambda I_n - AB)] \quad \text{et} \quad [A \mapsto \det(\lambda I_n - BA)]$$

sont continues (ce sont des applications polynomiales en fonction des coefficients de A).

Comme ces deux applications sont égales sur $GL_n(\mathbb{K})$, elles sont aussi égales sur l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Autrement dit, quelles que soient les matrices A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

2.a. En choisissant une base $\mathcal{B}$ (quelconque!) de E , et en notant A et B , les matrices qui représentent f et g dans la base $\mathcal{B}$, on déduit de la question précédente que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Comme λ est, par définition, une valeur propre de $f \circ g$, on en déduit que λ est aussi une valeur propre de $g \circ f$.

• Soit $x \in E_\lambda$. Alors $(f \circ g)(x) = \lambda x$ (par définition de E_λ). On en déduit que

$$g[(f \circ g)(x)] = \lambda g(x),$$

c'est-à-dire

$$(g \circ f)[g(x)] = \lambda \cdot g(x)$$

ou encore que $g(x)$ appartient à $\text{Ker}(g \circ f - \lambda I) = F_\lambda$.

De la même façon, on démontre que

$$\forall y \in \text{Ker}(g \circ f - \lambda I), \quad f(y) \in \text{Ker}(f \circ g - \lambda I).$$

2.b. Si $x \in E_\lambda$ et $g(x) = 0_E$, alors

$$\lambda \cdot x = (f \circ g)(x) = f(0_E) = 0_E.$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $x = 0_E$. Autrement dit, en restriction à E_λ , l'endomorphisme g est injectif et par conséquent

$$\dim g(E_\lambda) = \dim E_\lambda.$$

D'après l'inclusion précédente, $\dim E_\lambda \leq \dim F_\lambda$.

On démontre de la même manière que $\dim F_\lambda \leq \dim E_\lambda$ et donc que les deux sous-espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

• Si A est inversible, alors $AB = A(BA)A^{-1}$ et cette égalité toute simple montre que AB et BA sont semblables. Dans ce cas, il est clair que les polynômes caractéristiques sont égaux et que les sous-espaces propres sont deux à deux isomorphes!

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, diagonalisable et de rang 1. On se donne trois réels α, β et γ tels que

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

et on considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de B ?

2. On suppose que $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient au noyau de A . Vérifier que la colonne $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de B . En déduire que $\dim \text{Ker } B \geq 4$.

3. Démontrer que B est diagonalisable.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(xI_6 - B) &= \begin{vmatrix} xI_3 - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & xI_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ xI_3 - \gamma A & xI_3 \end{vmatrix} & (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \text{ avec } \alpha + \beta = \gamma) \\ &= \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ 0_3 & xI_3 + \beta A \end{vmatrix} & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{aligned}$$

et par conséquent, comme $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$,

$$\det(xI_6 - B) = \det(xI_3 - \gamma A) \det(xI_3 + \beta A) = (-\beta\gamma)^3 \chi_A\left(\frac{x}{\gamma}\right) \chi_A\left(\frac{-x}{\beta}\right)$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

• Comme le rang de A est égal à 1, son noyau est de dimension 2 (Théorème du rang). Et comme A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est de la forme

$$\chi_A = X^2(X - \alpha)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Le polynôme caractéristique de B est donc égal à

$$X^4(X - \alpha\gamma)(X + \alpha\beta).$$

Comme $\alpha \neq 0$ et que $\beta + \gamma \neq 0$, la matrice B admet donc trois valeurs propres distinctes : 0 (de multiplicité 4), $\alpha\gamma$ (simple) et $-\alpha\beta$ (simple).

✎ D'après le cours, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (c'est le cas pour B) et si la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Par ailleurs, on sait que la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

Par conséquent, la matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la dimension du sous-espace propre $\text{Ker } B = \text{Ker}(B - 0I_6)$ est égale à 4.

2. On suppose que $AX = 0$. D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$B \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha AX \\ \gamma AX \end{pmatrix} = 0.$$

• Pour les mêmes raisons,

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta AX \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Par hypothèse, $\dim \text{Ker } A = 2$, donc il existe deux colonnes linéairement indépendantes X_1 et X_2 telles que $\text{ker } A = \text{Vect}(X_1, X_2)$. On déduit des calculs précédents que les colonnes

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de B . Comme X_1 et X_2 sont linéairement indépendantes, on en déduit facilement que ces quatre colonnes sont linéairement indépendantes et donc que $\dim \operatorname{Ker} B \geq 4$.

3. Comme la dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} B = 4$ et que B est diagonalisable.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A . Quelle est la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Démontrer que A admet trois valeurs propres : 0 , λ et $1 - \lambda$.
5. En déduire un polynôme annulateur de A dont le degré est égal à 3 .

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\text{rg } A \geq 2$. Les colonnes $C_2, \dots, C_n$ sont proportionnelles, donc $\text{rg } A = 2$.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes, donc $\dim \text{Ker } A = n - 2$.

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral).

3. Pour une matrice diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Par conséquent, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à $(n - 2)$.

En général, la multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

4. Comme le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A , que ce polynôme admet 0 pour racine de multiplicité $(n - 2)$ et que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (puisque A est diagonalisable), on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X - \alpha)(X - \beta).$$

Or la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$1 = \text{tr } A = (n - 1) \times 0 + 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta$$

donc $\alpha + \beta = 1$: on peut donc noter λ et $(1 - \lambda)$, les deux valeurs propres non nulles de A .

Pour l'instant, on ne sait pas si $\lambda \neq 1/2$, donc rien ne prouve que ces deux valeurs propres soient distinctes.

5. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A . Donc

$$\mu_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) \quad \text{ou} \quad \mu_A = X(X - 1/2)$$

(selon que $\lambda \neq 1/2$ ou $\lambda = 1/2$). Par définition, le polynôme minimal est un polynôme annulateur.

Dans les deux cas, le polynôme

$$X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$$

est un multiple du polynôme minimal et donc un polynôme annulateur.

En calculant les coefficients diagonaux de A^2 , on trouve que

$$\text{tr}(A^2) = \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + \sum_{k=2}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1) - 3}{3}.$$

Comme A est diagonalisable, on sait aussi que

$$\text{tr}(A^2) = (n - 2) \cdot 0^2 + \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Donc les valeurs propres λ et $(1 - \lambda)$ sont les deux racines de l'équation

$$2X^2 - 2X + 1 = \frac{n(2n+1)(n+1) - 3}{3}.$$

On en déduit d'une part que

$$X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X \cdot \left(X^2 - X + 1 - \frac{n(n + \frac{1}{2})(n+1)}{3} \right)$$

et d'autre part que $\lambda \neq 1/2$ (puisque le terme constant, égal au produit des racines, est toujours négatif).

Pour ceux que ce genre de précisions vaines amusent, les valeurs propres λ et $1 - \lambda$ sont

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3} - 3} \right).$$

Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $M^4 = 4M^2$ et que 2 et -2 sont des valeurs propres de M .

1. Démontrer que $\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}$.

2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

1. La matrice M admet $X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Or les valeurs propres de M se trouvent parmi les racines de tous les polynômes annulateurs de A , donc

$$\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}.$$

2. On distingue deux cas.

• Si la matrice M est inversible, alors $M^2 = 4I_3$, donc elle admet le polynôme $(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme est scindé et que ses racines sont simples, on en déduit que la matrice M est diagonalisable.

• Si la matrice M n'est pas inversible, alors 0 est une valeur propre de M . Par conséquent, elle admet trois valeurs propres distinctes : 0, -2 et 2 et comme elle appartient à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable.

✎ En dimension $n \geq 4$, on ne pourrait pas conclure puisque les deux matrices suivantes vérifient les hypothèses de l'exercice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que seule la première est diagonalisable.

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^\top = I_n$.

1. Démontrer que, si P est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre de M est racine de P .
2. Dans cette question seulement, on suppose que M est symétrique. Démontrer que M est diagonalisable, puis que $\text{tr } M$ et $\det M$ sont différents de 0.
3. Démontrer que M est diagonalisable.
4. Démontrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de M .

1. Si $MX = \lambda X$, alors $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par récurrence à partir de $k = 1$) et, par combinaison linéaire, $P(M)X = P(\lambda).X$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P est un polynôme annulateur, alors $P(\lambda).X = 0$ et si λ est une valeur propre, alors on peut choisir $X \neq 0$ (qui est alors un vecteur propre de M associé à λ) et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

2. Si M est symétrique, alors l'équation devient $M^2 + M - I_n = 0_n$. Dans ce cas, la matrice M admet $P_2 = X^2 + X - 1$ pour polynôme annulateur. Comme $\Delta = 5 \neq 0$, ce polynôme est scindé à racines simples et comme la matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.

🔗 Comme M est une matrice à coefficients complexes, il est hors de question d'appliquer le Théorème spectral pour conclure.

• Comme 0 n'est pas une racine du polynôme annulateur $X^2 + X - 1$, ce n'est pas non plus une valeur propre de M , donc la matrice M est inversible et son déterminant n'est pas nul.

• Comme M est diagonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. D'après le polynôme annulateur, il y a au plus deux valeurs propres, de multiplicités respectives $m \in \mathbb{N}$ et $(n - m) \in \mathbb{N}$. Donc

$$\text{tr } M = m \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + (n - m) \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-n}{2} + \frac{(2n - m)\sqrt{5}}{2}.$$

Si la trace de M était nulle, alors on aurait

$$\sqrt{5} = \frac{n}{2n - m} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux. Donc $\text{tr } M \neq 0$.

3. D'après l'équation, $M^\top = I_n - M^2$. En transposant l'équation,

$$I_n = M + (M^\top)^2 = M + (I_n - M^2)^2$$

c'est-à-dire

$$0_n = (I_n - M^2)^2 - (I_n - M) = (I_n - M)[(I_n - M)(I_n + M)^2 - I_n] = (I_n - M)M(I_n - M - M^2).$$

La matrice M admet donc $P_4 = (1 - X)X(X^2 + X - 1)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples :

$$1, \quad 0, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

donc la matrice M est diagonalisable.

4. D'après l'équation,

$$M^\top = (I_n - M)(I_n + M).$$

On sait que M est inversible si, et seulement si, $M^\top$ est inversible.

Comme -1 n'est pas une valeur propre de M (ce n'est pas une racine de P_4), on en déduit que $(I_n + M)$ est inversible. Par conséquent, $M^\top$ est inversible si, et seulement si, $(I_n - M)$ est inversible.

Autrement dit : M est inversible si, et seulement si, $1 \notin \text{Sp}(M)$.

🔗 L'alternative est donc la suivante : ou bien

$$\text{Sp}(M) \subset \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\},$$

ou bien

$$\{0, 1\} \subset \text{Sp}(M) \subset \left\{ 0, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

1. Soient A, B et C dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $C \neq 0_n$ et que $AC = CB$. Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A).C = C.P(B).$$

2. Démontrer qu'un produit de matrices est inversible si, et seulement si, tous ses facteurs sont inversibles. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

3. Réciproquement, on suppose que A et B ont une valeur propre commune. Démontrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

1. Il est clair que $A^0 C = C = CB^0$ et, par hypothèse, $A^1 C = CB^1$.
S'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k C = CB^k$, alors

$$A^{k+1} C = A.A^k C \stackrel{HR}{=} A.CB^k = AC.B^k = CB.B^k = C.B^{k+1}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $A^k C = CB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par combinaison linéaire, on en déduit que $P(A).C = C.P(B)$ pour tout polynôme P .

2. Quelles que soient les matrices $M_1, \dots, M_r$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(M_1 \cdots M_r) = \prod_{k=1}^r \det M_k \in \mathbb{C}.$$

Un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul et le produit de matrices $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Par conséquent, le produit $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, $\det M_k \neq 0$ pour tout k , c'est-à-dire si toutes les matrices M_k sont inversibles.

♣ Supposons que le spectre de A et le spectre de B soient des parties disjointes de $\mathbb{C}$ et notons P , le polynôme caractéristique de B . En tant qu'élément de $\mathbb{C}[X]$, ce polynôme P est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{m_k}.$$

Comme $P(B) = 0_n$ (Théorème de Cayley-Hamilton), on déduit de ce qui précède que

$$P(A).C = C.P(B) = 0_n$$

alors que la matrice

$$P(A) = (A - \mu_1)^{m_1} \times \cdots \times (A - \mu_r)^{m_r}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles (les valeurs propres μ_k de B ne sont pas des valeurs propres de A !). On en déduit que $C = 0_n$, ce qui est impossible par hypothèse.

On a démontré par l'absurde que les matrices A et B admettaient une valeur propre commune.

3. Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ commune aux matrices A et B . Par définition, ni la matrice $(A - \lambda I_n)$, ni la matrice $(B - \lambda I_n)$ ne sont inversibles.

D'après le Théorème du rang, la dimension de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est au moins égale à 1 et la dimension de $\text{Im}(B - \lambda I_n)$ est au plus égale à $(n - 1)$. Par conséquent, il existe une matrice $C \neq 0_n$ telle que

$$\text{Im}(B - \lambda I_n) \subset \text{Ker } C \quad \text{et} \quad \text{Im } C \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

♣ Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille libre de cardinal $r < n$, on peut la compléter en une base $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E .
Si $(u_1, \dots, u_q)$ est une famille libre de cardinal $q \geq 1$, alors il existe un endomorphisme φ de E tel que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \varphi(\varepsilon_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall r < k \leq n, \quad \varphi(\varepsilon_k) = u_1.$$

Il est clair que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \subset \text{Ker } \varphi$ et que $\text{Im } \varphi = \mathbb{C} \cdot u_1 \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_q)$; en particulier, φ n'est pas l'endomorphisme nul.

On en déduit que $C.(B - \lambda I_n) = 0_n = (A - \lambda I_n).C$ et donc, après développement et simplification, que $CB = AC$.

Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont les spectres sont disjoints.

1. On suppose que P est un polynôme annulateur de A . Démontrer que les valeurs propres de A sont toutes des racines de P .
2. Démontrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
3. Soit $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $AX = XB$ si, et seulement si, $X = 0_n$.
4. Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$AX - XB = M.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A . Il existe donc une colonne X_λ non nulle telle que $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$.
On vérifie par récurrence que $A^k X_\lambda = \lambda^k X_\lambda$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A)X_\lambda = P(\lambda)X_\lambda.$$

Comme P est un polynôme annulateur, le produit $P(\lambda)X_\lambda$ est nul et comme la colonne X_λ est, par hypothèse, non nulle, c'est le scalaire $P(\lambda)$ qui est nul.

2. En tant que polynôme non constant à coefficients complexes (son degré est égal à n), le polynôme caractéristique χ_A est scindé :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k}.$$

Par hypothèse, les spectres de A et B sont disjoints. Les scalaires a_k sont les valeurs propres de A , donc aucun des a_k n'est une valeur propre de B , ce qui prouve que les matrices $(B - a_k I_n)$ sont toutes inversibles.

On en déduit que la matrice

$$\chi_A(B) = \prod_{k=1}^r (B - a_k I_n)^{m_k}$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles).

3. Si $X = 0_n$, il est clair que $AX = XB = 0_n$.
❖ Réciproquement, supposons que $AX = XB$. On peut alors vérifier par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = XB^k$$

et en déduire, par combinaison linéaire, que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A)X = XP(B).$$

En particulier, pour $P = \chi_A$, la matrice $P(A)$ est nulle (Théorème de Cayley-Hamilton) et la matrice $P(B)$ est inversible (question précédente), donc $X = 0_n$.

4. D'après la question précédente, l'application $\Phi = [X \mapsto AX - XB]$ est un endomorphisme injectif de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie, donc c'est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (Théorème du rang) et, en particulier, c'est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B .

2. Démontrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et $B = 0$.

1. Par définition,

$$M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1.A^0.B \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0.B \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

⚡ Sans l'hypothèse $AB = BA$, la démonstration par récurrence ne serait pas possible!

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A).B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, P est un polynôme annulateur de M si, et seulement si, $P(A) = P'(A).B = 0_n$.

♣ Si M est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur P qui est scindé à racines simples.

Si P et P' admettaient un facteur irréductible commun, ce serait un facteur de la forme $(X - \alpha)$ (irréductible dans $\mathbb{C}[X]$!) et dans ce cas, α serait une racine (au moins) double de P : c'est impossible. Par conséquent, P et P' sont premiers entre eux.

On déduit alors de la relation de Bézout que la matrice $P'(A)$ est inversible et donc que $B = 0_n$.

♣ Réciproquement, si A est diagonalisable et si $B = 0_n$, alors A admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples et

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

donc P est aussi un polynôme annulateur de M , ce qui prouve que M est diagonalisable.

⚡ Variante : si $Q^{-1}AQ = \Delta$, alors

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}.$$

Soient E , un espace euclidien de dimension n ; $(e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E et $(x_1, \dots, x_n)$, une famille de vecteurs de E telle que

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 < 1.$$

1. Démontrer que

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right).$$

2. En déduire que la famille

$$(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$$

est une base de E .

1. Par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\lambda_k \cdot x_k\| = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\|$$

et d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right).$$

2. On dispose d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n , il suffit donc de démontrer qu'elle est libre pour en déduire qu'il s'agit d'une base de E .

• Considérons donc une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot (e_k + x_k) = 0_E$$

et donc telles que

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \right\|^2.$$

Comme la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est orthonormée,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

Si les λ_k ne sont pas tous nuls, alors la somme $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$ est strictement positive et, d'après la première question,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right) < \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \right).$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 < \sum_{k=1}^n \lambda_k^2,$$

ce qui est absurde.

La famille $(e_k + x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc une base de E .

✎ En écrivant la matrice de la famille $(e_k + x_k)_{1 \leq k \leq n}$ relative à la base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$, on voit que cet exercice est une variante du lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante (qui sont des matrices inversibles).

On pose $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que $I_0 = 1$.

2. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

2.a. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E .

2.b. Calculer la distance de X^3 au sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = [t \mapsto t^n e^{-t^2}]$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est négligeable devant e^{-t} (= fonction intégrable de référence) au voisinage de $+\infty$, puisque

$$t^n e^{-t^2} = e^{-t} \cdot [t^n e^t e^{-t^2}] = e^{-t} \cdot [\exp(\underbrace{-t^2 + t + n \ln t}_{\rightarrow 0})]$$

Donc la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

• Pour tout n impair, la fonction f_n est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, par imparité, $I_n = 0$.

• Pour n pair, la fonction f_n est paire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En intégrant par parties, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^{2p-1}}{2} \cdot (-2te^{-t^2}) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2p-1}{2} \cdot t^{2p-2} e^{-t^2} dt = \frac{2p-1}{2} \cdot I_{2(p-1)}.$$

🔗 Variante avec la fonction Γ

Par parité,

$$I_{2p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (t^2)^p e^{-t^2} dt$$

et le changement de variable $u = t^2$ nous donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot I_{2(p-1)}$$

grâce à la propriété "bien connue" : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On en déduit par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2} = \frac{(2p)!}{4^p p!}.$$

2.a. On a démontré que $t^n e^{-t^2}$ était intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire, $P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ quels que soient les polynômes P et Q , donc φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

D'après les propriétés de l'intégrale, φ est donc bilinéaire, symétrique et aussi positive puisque

$$\forall P \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} \geq 0.$$

Si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(t)^2 e^{-t^2} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle) et par conséquent $P = 0_E$.

Donc φ est bien un produit scalaire sur E .

2.b. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace DE DIMENSION FINIE, la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$ est bien définie. Notons p_2 , cette projection orthogonale.

► Le projeté $p_2(X^3)$ est l'unique polynôme $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \quad \varphi(X^3 - (aX^2 + bX + c), X^k) = 0.$$

On obtient ainsi le système de Gram suivant :

$$\begin{cases} a\varphi(X^2, 1) + b\varphi(X, 1) + c\varphi(1, 1) = \varphi(X^3, 1) \\ a\varphi(X^2, X) + b\varphi(X, X) + c\varphi(1, X) = \varphi(X^3, X) \\ a\varphi(X^2, X^2) + b\varphi(X, X^2) + c\varphi(1, X^2) = \varphi(X^3, X^2) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} aI_2 + bI_1 + cI_0 = I_3 \\ aI_3 + bI_2 + cI_1 = I_4 \\ aI_4 + bI_3 + cI_2 = I_5 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} aI_2 + cI_0 = 0 \\ bI_2 = I_4 \\ aI_4 + cI_2 = 0 \end{cases}.$$

On déduit de la relation de récurrence entre les I_{2p} que

$$(a, b, c) = \left(0, \frac{I_4}{I_2}, 0\right) = (0, \frac{3}{2}, 0).$$

✎ En observant que $\varphi(X, 1) = \varphi(X, X^2) = 0$, on pouvait se simplifier la tâche.

$$\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X^2) \oplus \mathbb{R} \cdot X \\ p_2(X^3) = (aX^2 + c) + (bX) \end{cases}$$

Il restait à observer que $\varphi(X^3, 1) = \varphi(X^3, X^2) = 0$: comme X^3 est orthogonal à 1 et à X^2 , projeter X^3 sur le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ ou sur la droite $\mathbb{R} \cdot X$, c'est pareil... et rien n'est plus simple que de projeter sur une droite !

$$p_2(X^3) = \frac{\varphi(X^3, X)}{\varphi(X, X)} \cdot X = \frac{I_4}{I_2} \cdot X$$

► D'après le cours, la distance cherchée est égale à $\sqrt{\varphi(X^3, X^3 - p_2(X^3))}$. Or

$$\varphi(X^3, X^3 - p_2(X^3)) = \varphi(X^3, X^3) - b\varphi(X^3, X) = I_6 - \frac{3}{2} \cdot I_4 = \frac{3}{4}$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{3}/2$.

|| Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top \cdot A = A \cdot A^\top$. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = 0_n$. En considérant la matrice $B = A^\top \cdot A$, démontrer que $A = 0_n$.

Comme les matrices A et $A^\top$ commutent,

$$B^p = (A^\top)^p \cdot A^p = 0_n.$$

Or la matrice B est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral). Étant diagonalisable et n'admettant que 0 pour valeur propre, la matrice B est donc nulle.

Pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$0 = X^\top \cdot B \cdot X = (AX)^\top \cdot (AX) = \|AX\|^2.$$

Par conséquent, $AX = 0$ pour toute matrice colonne X et donc $A = 0_n$.

Soient A et B , deux matrices de $O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \frac{1}{3} \cdot (A + 2 \cdot B) \in O_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $M.M^\top$ et en déduire $A.B^\top + B.A^\top$.

2. Démontrer que $A = B$.

✎ Variante classique

✎ On considère deux isométries u et v et on suppose que la combinaison convexe

$$w = \frac{u + 2v}{3}$$

est également une isométrie.

Pour tout vecteur x , on a donc

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|w(x)\| = \frac{\|u(x) + 2v(x)\|}{3} && \text{(homogénéité de la norme)} \\ &\leq \frac{\|u(x)\| + 2\|v(x)\|}{3} && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{\|x\| + 2\|x\|}{3} = \|x\|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|u(x) + 2v(x)\| = \|u(x)\| + \|2v(x)\|$$

et donc (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) que les vecteurs $u(x)$ et $2 \cdot v(x)$ sont colinéaires et de même sens : il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que

$$v(x) = \lambda \cdot u(x).$$

Or u et v sont des isométries, donc

$$\|u(x)\| = \|x\| = \|v(x)\| = \lambda \|u(x)\|,$$

donc $\lambda = 1$ (en supposant que $x \neq 0_E$).

On a ainsi démontré que

$$\forall x \in E, \quad v(x) = u(x)$$

(propriété qui est évidente pour $x = 0_E$).

1. En développant les produits $M.M^\top = M^\top.M$, on obtient après simplifications

$$A.B^\top + B.A^\top = B^\top.A + A^\top.B = 2I_n.$$

2. En multipliant la seconde relation à gauche par B et à droite par $A^\top$, on en déduit que

$$2B.A^\top = I_n + B.A^\top.B.A^\top$$

c'est-à-dire

$$(B.A^\top - I_n)^2 = 0_n.$$

La matrice orthogonale $B.A^\top$ admet donc $(X - 1)^2$ pour polynôme annulateur.

✎ Première fin (très savante)

D'après le Théorème de réduction des isométries, une matrice dont la seule valeur propre complexe est égale à 1 est la matrice identité, donc $B.A^\top = I_n$, c'est-à-dire $B = A$.

✎ Deuxième fin (moins savante)

Notons u , l'endomorphisme de E représenté par la matrice $M = B.A^\top$ dans une BON $\mathcal{B}_0$. Comme u admet un polynôme annulateur scindé, il est trigonalisable : il existe donc une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit une matrice triangulaire supérieure.

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une BON $\mathcal{B}_1$ telle que la matrice de passage $Q = \mathcal{M}at(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1)$ soit triangulaire supérieure. Par conséquent,

$$T = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(u) = Q^{-1} \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) \times Q$$

est une matrice triangulaire (en tant que produit de trois matrices triangulaires supérieures) et orthogonale (puisque'elle représente l'isométrie u dans la BON $\mathcal{B}_1$).

De plus, comme u admet $(X - 1)^2$ comme polynôme annulateur, tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire T sont égaux à 1 (ce sont les valeurs propres de u). La seule matrice orthogonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est l'identité, donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(u) = I_n$$

et par conséquent $u = I_E$, ce qui prouve que $A = B$.

Soient $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $M^\top.M$. En déduire que M est inversible.
2. Démontrer que la matrice $M^{-1}M^\top$ est orthogonale.

1. D'après les règles du produit matriciel par blocs,

$$M^\top.M = \begin{pmatrix} 1 + C^\top.C & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & I_n + C.C^\top \end{pmatrix}.$$

De plus, $C^\top.C = \|C\|^2 \geq 0$ (pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes), donc $1 + C^\top.C > 0$.

Par ailleurs, si la colonne X appartient au noyau de $(I_n + C.C^\top)$, alors

$$0 = X^\top.(I_n + C.C^\top)X = X^\top.X + (C^\top.X)^2 \geq \|X\|^2 \geq 0$$

donc $X = 0$. La matrice carré $(I_n + C.C^\top)$ est donc injective et par conséquent inversible.

Comme $M^\top.M$ est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont inversibles, la matrice $M^\top.M$ est inversible.

2. On vérifie que $M.M^\top = M^\top.M$ (ça n'a rien d'évident *a priori*, il est nécessaire de poser le calcul). Par conséquent, en posant $Q = M^{-1}.M^\top$,

$$Q.Q^\top = (M^{-1}.M^\top).[M.(M^{-1})^\top] = M^{-1}.M.M^\top.(M^{-1})^\top = I_n$$

puisque $(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$ (pour toute matrice inversible).

Ce calcul prouve que la matrice Q est orthogonale.

On note E , l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont des normes sur E .

2. Vérifier que

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt.$$

3. Démontrer qu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que

$$\forall f \in E, \quad aN'(f) \leq N(f) \leq bN(f).$$

1. On sait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace des fonctions bornées.

Soit $f \in E$.

► Comme f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$, les trois fonctions f , f' et $(f + f')$ sont bornées, donc $N(f)$ et $N'(f)$ sont bien définies et évidemment positives.

► Par linéarité de la dérivation et par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, les deux applications N et N' sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

► Comme $0 \leq \|f\|_\infty \leq N(f)$, si $N(f) = 0$, alors $f = 0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ sépare les points).

De même, si $N'(f) = 0$, alors $f + f' = 0_E$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ke^x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f = 0_E$.

Donc N et N' séparent les points.

Donc N et N' sont deux normes sur E .

2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction

$$[t \mapsto e^t (f(t) + f'(t))]$$

est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, donc (Théorème fondamental) le second membre est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est égale à

$$e^x (f(x) + f'(x)) = \frac{d}{dx} [e^x f(x)]$$

pour tout $x \in [0, 1]$. Par ailleurs, les deux expressions sont nulles pour $x = 0$.

Les deux expressions sont égales en un point et leurs dérivées sont égales sur l'intervalle $[0, 1]$, donc les deux expressions sont égales sur tout l'intervalle :

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt.$$

3. Par inégalité triangulaire, $N'(f) \leq N(f)$, donc $a = 1$ convient.

Réciproquement, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| = \left| e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt \right| \leq e^{-x} \int_0^1 e^t |f(t) + f'(t)| dt \leq (e - 1) \|f + f'\|_\infty.$$

Comme le majorant est indépendant de x , on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leq (e - 1) N'(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|f'\|_\infty = \|(f' + f) + (-f)\|_\infty \leq \|f' + f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq e N'(f)$$

et finalement

$$\forall f \in E, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq (2e - 1) N'(f).$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x - \ln x = n$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1]$.

2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0, puis que $x_n \sim e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n .

1. La fonction $f = [x \mapsto x - \ln x]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 1]$ et

$$\forall 0 < x < 1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0$$

donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 1]$. Il est clair que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et que $f(1) = 1$. D'après le Théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$ et la bijection réciproque est continue sur $[1, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel n appartient à $[1, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution : $x_n = f^{-1}(n) \in]0, 1]$.

2. Comme f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, le Théorème de la bijection nous assure que la réciproque f^{-1} tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

$$x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par définition de x_n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln x_n = -n + x_n.$$

En composant par $\exp$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = e^{-n} \cdot \underbrace{e^{x_n}}_{\hookrightarrow 1}$$

(puisque x_n tend vers 0) et donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.

3. On reprend l'équation qui définit x_n sous une autre forme :

$$x_n = \ln x_n + \ln n = \ln(e^n x_n).$$

Or on sait que $\ln(1+u) \sim u$ lorsque u tend vers 0 et que $e^n x_n$ tend vers 1. Par conséquent,

$$e^n x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$$

et donc

$$x_n - e^{-n} \sim x_n e^{-n} \sim e^{-2n}.$$

Autrement dit,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

On peut en fait calculer un développement asymptotique de x_n aussi précis qu'on le souhaite ! En effet, l'équation étudiée équivaut à

$$xe^{-x} = e^{-n}$$

et la fonction $g = [x \mapsto xe^{-x}]$ réalise une bijection (croissante, cette fois) de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ sur $[0, e^{-1}]$ dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, e^{-1}[$ puisque

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g'(x) = e^{-x}(1-x) > 0.$$

D'après le Théorème de Taylor-Young, la réciproque g^{-1} admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$g^{-1}(u) = \sum_{k=0}^p \frac{(g^{-1})^{(k)}(0)}{k!} \cdot u^k + o(u^p) \underset{u \rightarrow 0}{=} a_1 u + \dots + a_p u^p + o(u^p).$$

Comme $x_n = g^{-1}(e^{-n})$, on en déduit que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_1 e^{-n} + \dots + a_p e^{-pn} + o(e^{-pn}).$$

Il est clair que $g(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ au voisinage de 0. On peut en déduire que

$$g^{-1}(u) = u + u^2 + \frac{3}{2}u^3 + o(u^3)$$

au voisinage de 0 et donc que

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + \frac{3}{2}e^{-3n} + o(e^{-3n}).$$

Pour les curieux, je précise que $g^{-1}(u) = -W_0(-u)$ où W_0 est la branche principale de la fonction de Lambert.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$\sum_{k=1}^n x^k = 1$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette solution sera notée a_n .

2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1/2$.

3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une application $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

En tant que application polynomiale, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0, 1]$. En tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $[0, 1]$, elle est aussi strictement croissante sur $[0, 1]$.

D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [0, n]$. Comme $1 \in [0, n]$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une, et une seule, solution a_n dans le segment $[0, 1]$.

On sait même que $0 < a_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque $f_n(0) < 1 = f_n(a_n)$) et que $a_n < 1$ pour tout entier $n \geq 2$ (puisque $f_n(a_n) = 1 < n = f_n(1)$).

2. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(a_n) = 1 = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) + a_n^{n+1} > f_n(a_n) = 1$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n > a_{n+1}$$

et donc que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(1/2) = \sum_{k=1}^n (1/2)^k < \sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k = 1 = f_n(a_n)$$

et comme f_n est croissante, on en déduit que $1/2 < a_n$.

Puisque la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est définie implicitement (son terme général est la solution d'une équation, on ne connaît pas directement sa valeur exacte), il faut l'étudier implicitement, c'est-à-dire manœuvrer l'équation — et pas seulement sa solution.

3. En tant que suite décroissante et minorée par $1/2$, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente et tend vers une limite ℓ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \ell \leq a_n.$$

Comme chaque fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/2) \leq f_n(\ell) \leq f_n(a_n) = 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1/2)} \leq \frac{\ell}{1 - \ell} \leq 1.$$

Ainsi, $\frac{\ell}{1 - \ell} = 1$ et donc $\ell = 1/2$.

1. Démontrer que

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

pour x dans un domaine D qu'on précisera.

2. Démontrer que

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot (\sqrt{2}-1)^{2n+1}.$$

1. Par définition, lorsque $\cos 2x \neq 0$,

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

et si de plus $\cos x \neq 0$, alors

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Cette relation est donc vraie sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/4[$ et plus généralement pour tout x distinct de $\pi/4$ et de $\pi/2$ modulo π .

2. On reconnaît le développement en série entière de la fonction Arctan. Comme $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, il s'agit donc de démontrer que

$$\frac{\pi}{8} = \text{Arctan}(\sqrt{2}-1)$$

et donc de vérifier que $\tan \pi/8 = \sqrt{2}-1$. Or, d'après la question précédente,

$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

donc $\tan \pi/8$ est un réel positif qui vérifie l'équation

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $-1 \pm \sqrt{1^2 - (-1)}$, donc $\tan \pi/8$ est bien égal à $\sqrt{2}-1$.

|| Déterminer la nature de la série

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \cdot \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En notant u_n le terme général de la série, on en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ est la somme de la série convergente

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(Critère spécial des séries alternées) et d'une série absolument convergente (puisque son terme général est dominée par $1/n^2$, qui est le terme général d'une série absolument convergente).

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln u_{n+1} - \ln u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

1. Il est clair que l'intervalle $]0, \pi[$ est stable par $\sin$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et prend toutes ses valeurs dans cet intervalle. De plus,

$$\forall 0 < x < \pi, \quad 0 < \sin x < x$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers un réel $\ell \in [0, \ell]$.

Puisque $\sin$ est continue sur $]0, \pi[$, si ℓ appartenait à cet intervalle ouvert, ce serait un point fixe de $\sin$: il n'y en a pas. La seule possibilité qui reste compatible avec la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc : $\ell = 0$.

2. Comme u_n tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de $\sin$:

$$u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement décroissante, on vient de comparer deux séries dont les termes généraux sont de signe constant (négatifs) et on déduit du Théorème de comparaison que les séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.

Or $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc la série $\sum u_n^3$ est convergente.

3. Comme u_n tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{\sin u_n}{u_n} = \ln \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}.$$

Avec le même raisonnement, les séries $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Mais comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général $\ln u_n$ tend vers $-\infty$, donc la série télescopique $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ diverge et, par comparaison, la série $\sum u_n^2$ diverge.

✎ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha = u_n^\alpha \cdot \left[\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{6} \cdot u_n^{2+\alpha}.$$

En choisissant $\alpha = -2$, on constate que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle (égale à $1/3$). On en déduit que la série télescopique est grossièrement divergente et que sa n -ième somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim u_n^{-2}$$

est aussi équivalente, lorsque n tend vers $+\infty$, à $n^{1/3}$. Par conséquent,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$

ce qui explique tout ce qui précède !

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Vérifier que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

3. Démontrer que $u_n \sim v_n$. Conclusion ?

1. Par définition,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

et comme $(-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut utiliser le développement limité de $(1+x)^{-1}$ au voisinage de $x=0$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

pour en déduire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et le résultat cherché s'obtient en développant ce produit.

2. La série $\sum v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : c'est une série alternée et, de façon évidente, la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

D'après le développement précédent,

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

donc la série $\sum (u_n - v_n)$ est divergente (série harmonique). Par conséquent,

$$\sum u_n = \underbrace{\sum (u_n - v_n)}_{DV} + \underbrace{\sum v_n}_{CV}$$

est divergente.

3. Le développement de la première question a beau nous indiquer que $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature : le théorème de comparaison par équivalence s'applique aux séries DONT LE TERME GÉNÉRAL EST DE SIGNE CONSTANT, il ne peut pas s'appliquer aux séries alternées.

On considère une suite positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

2. Démontrer que : si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2} &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \leq a_n \\ &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leq u_n + a_n. \end{aligned}$$

Or les a_n sont positifs (par hypothèse) et les u_n aussi (par hypothèse pour u_0 et par récurrence pour $n \geq 1$), donc

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leq u_n + a_n \iff u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2 = u_n^2 + a_n^2 + 2u_n a_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

2. Pour appliquer le théorème de comparaison aux séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum a_n$, il faut encore vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n.$$

Or, d'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}.$$

Il est clair que

$$u_n^2 + a_n^2 \geq u_n^2 \geq 0$$

et comme $u_n \geq 0$, on en déduit que

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \geq |u_n| = u_n.$$

On a donc en fait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. D'après la relation de récurrence,

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} = 2u_{n+1} - u_n$$

et donc

$$a_n^2 = (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1} - u_n).$$

En prenant $u_n = \frac{n}{n+1}$, on a alors

$$a_n^2 = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.$$

Comme les a_n sont positifs, on en déduit que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** (bis), la série $\sum a_n$ est divergente (puisque la série harmonique est divergente).

La réciproque de la propriété établie plus haut est donc fausse.

On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}. \quad (*)$$

1. On suppose que f vérifie $(*)$.

1.a. En considérant des valeurs particulières de n , démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(x+1).$$

1.b. Démontrer que l'intégrale

$$H(x) = \int_x^{x+1} f'(t) dt$$

ne dépend pas de x , puis que f' est constante.

2. Déterminer les solutions de l'équation $(*)$.

1.a. On applique la relation $(*)$ pour x avec 1 et $(n+1)$; pour $(x+1)$ avec n :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = \frac{f(x+n+1) - f(x)}{n+1}, \\ f'(x+1) &= \frac{f(x+1+n) - f(x)}{n} \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} nf'(x+1) &= f(x+n+1) - f(x) = f(x+n+1) - f(x+1) + f(x+1) - f(x) \\ &= (n+1)f'(x) - f'(x) = nf'(x) \end{aligned}$$

et donc que $f'(x+1) = f'(x)$: la dérivée f' est donc périodique, de période 1.

1.b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $H(x) = f(x+1) - f(x)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0.$$

La fonction H est donc constante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

En appliquant $(*)$ avec $n = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+1) - f(x) = H(x) = C^{\text{te}}$$

ce qui prouve que la fonction est nécessairement affine.

2. Réciproquement, quelle que soit la fonction affine $f(x) = ax + b$,

$$f'(x) = a = \frac{[a(x+n) + b] - [ax + b]}{n} = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

On cherche à résoudre l'équation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt \quad (E)$$

où l'inconnue f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + cy = 0.$$

(On discutera sur $c \in \mathbb{R}$.)

2. Soit f , une solution de (E) autre que la fonction identiquement nulle. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0.$$

3. Soit f , une solution de (E). Calculer $f(0)$ et

$$f''(x)f(y) - f(x)f''(y).$$

4. En déduire les solutions de (E).

1. On discute sur le signe de c .

► Si $c = 0$, les solutions sont les fonctions affines : $y(x) = ax + b$.

► Si $c = \omega^2 > 0$, les solutions sont périodiques :

$$y(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x.$$

► Si $c = -\omega^2 < 0$, les solutions divergent :

$$y(x) = a \sinh \omega x + b \cosh \omega x.$$

2. Comme f est une solution de (E), elle est continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après le Théorème fondamental, pour tout $y \in \mathbb{R}$ (fixé), l'application

$$[x \mapsto F(x, y)]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y).$$

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x+y_0) - f(x-y_0)}{f(y_0)}.$$

Donc f est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

➤ Bien entendu, on peut continuer (par récurrence) et en déduire que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• Appliquons à nouveau le Théorème fondamental : les dérivées partielles de F sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M) &= f(x+y) - f(x-y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M) &= f(x+y) - [-f(x-y)] = f(x+y) + f(x-y). \end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les applications

$$[(x, y) \mapsto x + y] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto x - y]$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ (elles sont linéaires), les dérivées partielles de F sont en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

• D'après l'expression des dérivées partielles,

$$\begin{aligned} \forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) &= f'(x+y) - f'(x-y) \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) &= f'(x+y) - f'(x-y) \end{aligned}$$

donc F vérifie bien l'équation des ondes (ou équation de D'Alembert) avec $c = 1$.

✎ En notant P_0 , une primitive de f sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, on a

$$F(x, y) = P_0(x+y) - P_0(x-y)$$

où P_0 est de classe $\mathcal{C}^2$: on ne devrait pas être étonné de retrouver l'équation des ondes !

3. D'après (E),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(0) = \int_x^x f(t) dt = 0.$$

Donc : ou bien $f(x)$ est identiquement nul, et en particulier $f(0) = 0$; ou bien $f(x)$ n'est pas identiquement nul et on a quand même $f(0) = 0$.

• Comme f est une solution de (E), alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = f(x)f(y)$$

et par conséquent

$$\forall M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0$$

d'après la question précédente.

4. Il est clair que la fonction nulle est une solution de (E). Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'aux solutions non identiquement nulles de (E) en choisissant un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$.

D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} \cdot f(x) = 0$$

et nous reprenons la discussion menée dans la première question avec

$$c = -\frac{f''(y_0)}{f(y_0)},$$

en tenant compte de la contrainte $f(0) = 0$ établie précédemment.

► Si $c = -f''(y_0)/f(y_0) = 0$, alors f est une fonction affine telle que $f(0) = 0$, donc $f(x) = ax$. L'équation (E) devient alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (ax).(ay) = 2axy.$$

Il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ (solution identiquement nulle) et $a = 2$.

► Si $c > 0$, alors f est de la forme $a \sin \omega x$ et l'équation (E) devient cette fois

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \sin \omega x).(a \sin \omega y) = \frac{2a \sin \omega \sin \omega y}{\omega}.$$

À nouveau, il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ et $a = 2/\omega$.

► Si $c < 0$, alors f est de la forme $a \operatorname{sh} \omega x$ et l'équation (E) devient maintenant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \operatorname{sh} \omega x)(a \operatorname{sh} \omega y) = \frac{2a \operatorname{sh} \omega x \operatorname{sh} \omega y}{\omega}$$

et une fois encore : $a = 0$ ou $a = 2/\omega$.

• En reprenant les calculs qui précèdent, on vérifie que les expressions trouvées sont toutes des solutions de (E), indépendamment de la valeur choisie pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$[x \mapsto 0], \quad [x \mapsto 2x], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \sin \omega x}{x} \right], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \operatorname{sh} \omega x}{x} \right]$$

pour un paramètre $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrairement choisi.

Démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 1 - t \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} dt$$

puis calculer sa valeur.

Il est clair que la fonction $f = [t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Comme la fonction Arctan tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, la fonction f tend vers 1 au voisinage de $t = 0$. Admettant une limite finie au voisinage de 0, elle est donc intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction Arctan ,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2},$$

ce qui prouve que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée est bien définie ("convergente", comme on dit).

♣ On connaît l'identité classique :

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t. \quad (\star)$$

On en déduit que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = 1 - \frac{\pi}{2} t + t \operatorname{Arctan} t.$$

En intégrant par parties,

$$\int t \operatorname{Arctan} t dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t$$

donc une primitive de f est

$$F(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Avec l'identité $(\star)$ rappelée plus haut,

$$\frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \left[\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right] = o(1)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx.$$

1. Justifier l'existence des intégrales I et J .
2. Vérifier que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I .

1. La fonction $[x \mapsto \ln \sin x]$ est continue sur l'intervalle $]0, \pi/2]$ et

$$\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 1 = 0$$

(par composition de limites), donc

$$\ln \sin x = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x.$$

Comme $\ln$ est une fonction intégrable de référence au voisinage de 0, on en déduit que $\ln \sin x$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

• On considère maintenant le changement de variable affine $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$: d'après le Théorème de changement de variable, la fonction $[x \mapsto \ln \cos x]$ est intégrable sur $[0, \pi/2[$ si, et seulement si, la fonction $[u \mapsto \ln \cos(\pi/2 - u)]$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$. Or

$$\forall 0 < u \leq \frac{\pi}{2}, \quad \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \ln \sin u$$

et on a déjà démontré que $\ln \sin u$ était intégrable sur $]0, \pi/2]$.

2. Les intégrales I et J sont donc bien définies. De plus, d'après le Théorème du changement de variable,

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = I.$$

3. Par linéarité,

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

donc

$$2I = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx.$$

Avec le changement de variable affine $u = 2x$, qui réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, \pi[$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x) (2 \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du.$$

La fonction $[u \mapsto \ln \sin u]$ est intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ (conséquence du changement de variable précédent!) et admet $u = \pi/2$ pour axe de symétrie :

$$\forall 0 < u < \pi, \quad \ln \sin(\pi - u) = \ln \sin u.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = I.$$

▮ C'est une variante du théorème bien connu : si f est paire et intégrable sur $] -\alpha, \alpha[$, alors

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \, dt = 2 \int_0^{\alpha} f(t) \, dt.$$

• Finalement,

$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

▮ Puisque $0 < \sin u \leq 1$ pour $0 < u \leq \pi/2$, on intègre une fonction négative avec des bornes rangées dans l'ordre croissant, donc on savait dès le début que l'intégrale était négative.

On étudie ici

$$F(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .

2. Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall 0 < x < 1, \quad F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x) \ln x.$$

1. On introduit la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}.$$

Le développement limité de $\ln(1-t)$ au voisinage de $t = 0$ montre que f est continue sur $[0, +\infty[$, donc f est continue sur le segment $[0, x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et par conséquent, $F(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

✱ La fonction f n'est pas définie pour $t < 0$, donc l'intégrale $F(x)$ n'a pas de sens pour $x < 0$.
L'ensemble de définition de F est donc l'intervalle $[0, +\infty[$.

🔗 Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, on déduit du Théorème fondamental que la fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0 et en particulier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $t \in [0, 1[$, on sait que

$$\ln(1-t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$

D'après la définition de f ,

$$\forall t \in [0, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

✱ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad u_n(t) = \frac{t^n}{n+1}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur tout segment $[0, x] \subset [0, 1]$.

► La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et, sur cet intervalle, sa somme est la fonction f , donc la somme est continue sur $[0, 1[$.

► Pour tout $0 \leq x \leq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n(x) = \int_0^x |u_n(t)| dt = \int_0^x u_n(t) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

donc la série (de terme général positif) $\sum I_n(x)$ est convergente.

► On déduit donc du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur le segment $[0, x]$ pour tout $0 \leq x < 1$ ainsi que sur l'intervalle $[0, 1[$ et que

$$\forall 0 \leq x \leq 1, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

🔗 On savait déjà que f était intégrable sur tout segment $[0, x] \subset [0, 1]$, puisque cette fonction est continue sur le segment $[0, 1]$. Sur ce point particulier, le Théorème d'intégration terme à terme ne nous apprend donc rien.

3. Soit $0 < x < 1$. Pour tout $0 < \varepsilon < x$,

$$\int_{\varepsilon}^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = [-\ln(1-t) \ln t]_{\varepsilon}^x - \int_{\varepsilon}^x \frac{\ln t}{1-t} dt$$

et comme

$$\ln(1-\varepsilon) \ln \varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\varepsilon \ln \varepsilon \longrightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

on a

$$F(x) = -\ln x \ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln t}{1-t} dt.$$

Le changement de variable affine $u = 1 - t$ et la relation de Chasles permettent d'en déduire que

$$F(x) = -\ln x \ln(1-x) - \int_{1-x}^1 \frac{\ln u}{u} du = -\ln x \ln(1-x) + F(1) + \int_0^{1-x} \frac{\ln t}{t} dt$$

soit

$$\forall 0 < x < 1, \quad F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln x \ln(1-x).$$

L'expression établie à la question précédente pour $x \in [0, 1]$ nous confirme que $F(1) = \pi^2/6$.

On considère la fonction f définie par

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

1. Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Démontrer que f est intégrable sur $I =]0, 1[$.
3. Donner le développement en série entière de f au voisinage de 1.
4. Calculer l'intégrale de f sur I .

1. Il est clair que f est continue sur I . En posant $x = 1 + h$ (avec $h \in]-1, 0[$),

$$f(x) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)-1} = \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Donc f peut être prolongée en une fonction continue sur $]0, 1]$ avec $f(1) = 1$.

2. La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert I .

Elle tend vers une limite finie au voisinage de 1 (comme on vient de le voir) et donc intégrable au voisinage de 1.

Lorsque x tend vers 0, on a $f(x) \sim \ln x$. Comme $\ln x$ est une fonction de référence intégrable au voisinage (droit!) de 0, on en déduit que f est intégrable au voisinage de 0.

Donc f est bien intégrable sur $]0, 1[$.

3. On a déjà posé $h = x - 1$ à la première question : pour $-1 < h < 0$,

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{h^n}{n}$$

donc

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+1}.$$

4. Le changement de variable affine $x = 1 + h$ nous montre que

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(1+h) dh = \int_{-1}^0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n+1} dh.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in]-1, 0[$, on pose

$$\forall h \in]-1, 0[, \quad u_n(h) = \frac{(-1)^n h^n}{n+1}.$$

Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $] -1, 0[$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $] -1, 0[$ et la somme de cette série est continue sur $]0, 1[$ (on sait la calculer, elle est égale à $f(1-h)$). Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^0 |u_n(h)| dh = \int_0^1 \frac{h^n}{n+1} dh = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on reconnaît le terme général d'une série convergente. D'après le Théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on avait déjà démontré...) et

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{-1}^0 \frac{h^n}{n+1} dh = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt$$

est convergente.

2. Calculer l'intégrale

$$u_n = \int_0^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Au moyen d'un développement en série entière, en déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}.$$

1. Il est clair que la fonction f définie par

$$\forall 0 < t < 1, \quad f(t) = \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

On sait que $\ln$ est intégrable au voisinage (droit !) de 0. On sait aussi que $\ln(a-u)$ est intégrable au voisinage (gauche !) de a pour tout $a \in \mathbb{R}$ (changement de variable affine).

- Lorsque t tend vers 0, on a $f(t) \sim -2 \ln t$, donc f est intégrable au voisinage de 0.
- Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{2 \ln(1+t)}{t^2} \cdot \ln t \cdot \ln(1-t) = o(\ln(1-t)),$$

donc f est intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ et l'intégrale généralisée est (absolument) convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n = [t \mapsto t^{2n-2} \ln(t^2)]$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et dominée par $\ln t$ au voisinage de $t = 0$.

On a en fait $\varphi_1(t) = 2 \ln t$ et $\varphi_n(t) = o(\ln t)$ pour $n \geq 2$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \left[\ln(t^2) \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{t} \cdot \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 - \frac{2}{2n-1} \int_0^1 t^{2n-2} dt.$$

Par définition des intégrales généralisées convergentes, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \frac{-2}{(2n-1)^2}.$$

3. D'après le développement en série entière de $\ln(1-u)$ au voisinage de 0,

$$\forall t \in]0, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \quad \text{où} \quad \psi_n(t) = \frac{-t^{2n-2} \ln(t^2)}{n} = \frac{-1}{n} \cdot \varphi_n(t).$$

D'après la question précédente, la série $\sum \psi_n$ est une série de fonctions intégrables sur $]0, 1[$; cette série converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme, la fonction f , est continue sur cet intervalle.

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |\psi_n(t)| dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \varphi_n(t) dt = \frac{2}{2(2n-1)^2},$$

donc la série $\sum \int_0^1 |\psi_n(t)| dt$ est convergente.

On déduit alors du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on avait déjà prouvé) et que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \psi_n(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}.$$

On considère l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. Déterminer une équation différentielle (E') vérifiée par $z(x) = y(x)/x$.
3. Calculer les réels a , b et c tels que

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}.$$

4. En déduire les solutions de (E'), puis les solutions de (E).

1. L'équation étant linéaire et homogène, on peut supposer que la solution y est une fonction polynomiale unitaire de degré d :

$$y(x) = x^d + \dots$$

où les termes absents constituent une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à d .

On en déduit que

$$xy'(x) = dx^d + \dots \quad \text{et} \quad (x^2 - 1)y''(x) = d(d - 1)x^d + \dots.$$

Par conséquent,

$$(x^2 - 1)y''(x) - (x + 1)y'(x) + y(x) = (d^2 + d - 2)x^d + \dots$$

et comme le second membre est identiquement nul, il faut que

$$0 = d^2 + d - 2 = (d - 1)(d + 2)$$

et donc que $d = 1$.

En substituant $y(x) = x + a$ dans l'équation, on trouve $a = 0$.

Par conséquent, y est une solution polynomiale de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Kx.$$

2.

L'énoncé suggère simplement d'achever la résolution de l'équation en appliquant la méthode de variation de la constante !

On cherche une solution y de la forme $y(x) = xz(x)$. En supposant que z soit de classe $\mathcal{C}^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x) \\ y''(x) &= xz''(x) + 2z'(x) \end{aligned}$$

et donc que

$$(x^2 - 1)y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = (x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x).$$

La fonction z est donc une solution de l'équation

$$(x^2 - 1)xz''(x) + (4x^2 - 2)z'(x) = 0. \quad (E')$$

On remarquera que cette équation est en fait une équation du *premier ordre* en l'inconnue $z'(x)$.

3. Avec les méthodes usuelles, on trouve rapidement

$$\frac{2 - 4X^2}{X(X^2 - 1)} = \frac{-2}{X} - \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1}.$$

4. En considérant (E') comme une équation d'inconnue $z'(x)$, on déduit de la décomposition en éléments simples précédentes que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe une constante réelle K_1 telle que

$$z'(x) = \frac{K_1}{x^2(x+1)(x-1)}.$$

Nouvelle décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}$$

et on en déduit que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$z(x) = K_2 + K_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right).$$

Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$y(x) = K_1 \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) + K_2 x.$$

On a passé sous silence la question des intervalles de définition. Il y a ici trois singularités : $x = \pm 1$ (qui se voient sur l'équation différentielle elle-même) et $x = 0$ (qui apparaît lors de la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante). Par conséquent, il y a quatre intervalles de résolution :

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

et, pour chacun de ces intervalles, il y a deux constantes d'intégration — soit en tout huit constantes d'intégration !

Plus précisément, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe deux constantes réelles A_k et B_k telles que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = A_k \left(1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) + B_k x.$$

Je rappelle que $\ln |u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u ne s'annule pas.

Il est donc inutile de discuter sur l'intervalle pour calculer les primitives, c'est seulement pour simplifier l'expression des primitives (= éliminer la valeur absolue) que la discussion est nécessaire.

On peut ensuite se pencher sur la question des raccordements en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

Pour que les solutions sur I_3 et I_4 se raccordent par continuité en $x = 1$, il faut d'une part que $A_3 = A_4 = 0$ (pour qu'il y ait une limite finie) et d'autre part que $B_3 = B_4$ (pour que les limites à gauche et à droite coïncident).

Il est clair que la fonction $[x \mapsto Bx]$ est solution sur $]0, +\infty[$.

Idem pour le raccordement autour de $x = -1$.

Pour le raccordement en $x = 0$, il faut que $A_2 = A_3$ (égalité de la limite à gauche et de la limite à droite pour la continuité) et que $B_2 = B_3$ (égalité de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite pour la dérivabilité).

Réciproquement, quelles que soient les constantes A et B , sur l'intervalle $] -1, 1[$, les solutions de la forme

$$Ax + B \left[1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right],$$

sont clairement développables en série entières sur $] -1, 1[$: on aurait donc pu trouver ces solutions en cherchant les solutions développables en série entière (ce qui aurait masqué la singularité en $x = 0$).

Avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

on obtient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_n.$$

• Pour les indices impairs, le coefficient a_1 peut être choisi arbitrairement et comme $a_3 = 0 \times a_1$, tous les autres termes d'indice impair sont nuls.

• Pour les indices pairs, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{-a_0}{2p-1}$$

donc

$$y(x) = a_1 x + a_0 \left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p-1} \right),$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

Enfin, pour l'anecdote, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $[x \mapsto Ax]$ (pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque).

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que la matrice A est semblable à une matrice triangulaire. (On donnera une matrice de passage convenable.)

3. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1. Version longue (en récitant le cours)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il n'y a que trois possibilités :

- ou bien son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (soit $\Delta > 0$);
- ou bien il admet une racine double (soit $\Delta = 0$);
- ou bien il est irréductible (soit $\Delta < 0$).

Autrement dit :

- ou bien cette matrice admet deux valeurs propres distinctes et, dans ce cas, elle est diagonalisable;
- ou bien elle n'a qu'une seule valeur propre :

$$\chi_A = (X - \lambda)^2$$

et dans ce cas,

- ou bien cette matrice est une homothétie : $A = \lambda I_2$ (ce n'est pas le cas ici);
- ou bien cette matrice est trigonalisable mais pas diagonalisable;
- ou bien elle n'est même pas trigonalisable.

Ici, le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

et par conséquent A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

• Version courte

La trace de A est égale à 2. Comme la trace est aussi la somme des deux valeurs propres, cela suggère d'étudier le cas $\lambda = 1$. Or la matrice

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, donc 1 est bien valeur propre de A .

D'après la trace, 1 est donc la seule valeur propre de A , ce qui prouve que A est trigonalisable (le polynôme caractéristique est scindé et admet 1 comme racine double), mais pas diagonalisable (sinon, A serait semblable à I_2 et donc en fait égale à I_2).

2. D'après l'expression de $A - I_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_2) \quad \text{et} \quad (A - I_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et comme

$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

On sait que $(A - I_2)^2 = 0_2$ et donc que

$$\text{Im}(A - I_2) \subset \text{Ker}(A - I_2).$$

Quel que soit le vecteur ε_2 choisi, on aura forcément

$$(A - I_2)(\varepsilon_2) \in \text{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$$

et donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$, donc ε_2 serait proportionnel à ε_1 : ce serait un mauvais choix !

En conséquence, quel que soit ε_2 **non proportionnel** à ε_1 , la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base et, d'après la formule du changement de base, la matrice A est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inutile de s'inquiéter, on est sûr de trouver une matrice de passage convenable !

3. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel à résoudre peut s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

En posant alors

$$Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

cette équation équivaut à l'équation

$$Y'(t) = P^{-1}.X'(t) = P^{-1}AP.P^{-1}X(t) = U.Y(t)$$

c'est-à-dire au système suivant.

$$\begin{cases} u' - u = v \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une constante K_2 telle que

$$v(t) = K_2.e^t.$$

La première équation devient alors

$$u'(t) - u(t) = K_2.e^t$$

et il existe une constante K_1 telle que

$$u(t) = K_1.e^t + K_2.te^t.$$

(On rappelle qu'il existe une recette simple pour trouver une solution particulière de l'équation complète : il suffit de l'appliquer.)

En conclusion : (x, y) est une solution du système différentiel étudié si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = P.Y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 t e^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2K_1 - K_2).e^t + 2K_2.te^t \\ -K_1.e^t - K_2.te^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_1 - K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} + te^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_2 \\ -K_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• Variante

On déduit de la formule du binôme que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = nU + (1 - n)I_2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = nA + (1 - n)I_2 = I_2 + n(A - I_2).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = e^t \cdot I_2 + te^t \cdot (A - I_2)$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0) = e^t.X(0) + te^t.(A - I_2).X(0).$$

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -x + z \\ z' = x - y \end{cases} \quad (S)$$

avec les conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).
2. On suppose que (x, y, z) est une solution de (S). Démontrer que les fonctions $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
3. Résoudre le système (S).

1. Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A \cdot X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

2. En tant que fonctions polynomiales des fonctions x , y et z (qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I .

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x + y + z = 1]$ et de la sphère d'équation $[x^2 + y^2 + z^2 = 1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

Variantes

Si $AX = \lambda X$, alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^N \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (M_N \cdot X) = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} M_N \right) \cdot X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) = f(0) = 1.$$

✦ On peut aussi remarquer que $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$.

► On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = [X'(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot X'(t) = [A \cdot X(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) = X(t)^\top \cdot (-A) \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) = 0$$

puisque la matrice A est anti-symétrique.

► Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme $X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^\top \cdot X(t) = X(0)^\top \cdot [\exp(tA)]^\top \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = X(0)^\top \cdot \exp(tA^\top) \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = X(0)^\top \cdot \exp(0_n) \cdot X(0) = X(0)^\top \cdot X(0)$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$ est bien indépendante de t .

3. La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans $\mathbb{C}$, je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A .

► On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

✦ Le polynôme $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ est un polynôme annulateur de A , c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A - \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 \\ &= \left[I_3 - \frac{1}{3} A^2 \right] + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos \sqrt{3} t}{3} \cdot A^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\cos \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x + y + z = 1]$.

Une urne contient N boules : il y a $1 \leq r \leq N$ boules blanches et $(N - r)$ boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'on ait tiré les r boules blanches : on note X , le nombre aléatoire de tirages effectués.

Autrement dit, on considère l'ensemble E des N -listes constituées de r fois le chiffre 1 et de $(N - r)$ fois le chiffre 0. Cet ensemble est muni de la loi uniforme et, pour chaque N -liste $\omega \in E$, on pose

$$X(\omega) = \max\{1 \leq k \leq N : \omega_k = 1\}.$$

L'ensemble E est muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$, si bien que X est une variable aléatoire sur $(E, \mathcal{E})$.

1. Quel est le cardinal de E ?

2. a. Calculer la probabilité $P(X = k)$.

2. b. Que dire de la loi de X pour $r = 1$? pour $r = N$?

3. Démontrer que

$$E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

1. Chaque N -liste $\omega \in E$ est caractérisée par les positions occupées par les r chiffres 1, il s'agit donc de choisir r positions parmi les N positions disponibles. Il y a donc $\binom{N}{r}$ éléments dans E .

2. a. Une N -liste $\omega \in E$ appartient à l'événement $[X = k]$ si, et seulement si, $\omega_k = 1$ et $\omega_\ell = 0$ pour tout $k < \ell \leq N$. Autrement dit, il faut répartir les $(r - 1)$ premiers chiffres 1 parmi les $(k - 1)$ premiers termes de la liste.

► Si $k < r$, c'est impossible.

► Si $r \leq k \leq N$, il y a $\binom{k-1}{r-1}$ listes possibles et par hypothèse d'équiprobabilité,

$$\forall r \leq k \leq N, \quad P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

2. b. Pour $r = 1$, la loi de X est uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\forall 1 \leq k \leq N, \quad P(X = k) = \frac{1}{N}.$$

► Pour $r = N$, la variable X est constante, égale à N : $P(X = N) = 1$.

3. Comme X est une variable aléatoire bornée (elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs), c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

$$E(X) = \sum_{k=r}^N k P(X = k) = \sum_{k=r}^N k \cdot \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \sum_{k=r}^N r \cdot \frac{\binom{k}{r}}{\binom{N}{r}} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \cdot \binom{N+1}{r+1}$$

d'après la formule (généralisée) du triangle de Pascal. Après simplification, on trouve :

$$E(X) = r \cdot \frac{N+1}{r+1}.$$

🔗 Il est facile de vérifier que cette formule est correcte pour $r = 1$ et pour $r = N$.

Une urne contient n tickets, dont p sont gagnants. Un joueur tire p tickets.

1. On suppose que le joueur effectue des tirages avec remise. Le nombre de tickets gagnants est alors modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(p, p/n)$ (nombre de succès lors de p expériences indépendantes, avec probabilité de succès égale à p/n à chaque fois).

1.a. Calculer la probabilité $P(n, p)$ de tirer au moins un ticket gagnant.

1.b. Calculer la limite de $P(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

2. On suppose que le joueur effectue des tirages sans remise; que les tickets sont indiscernables (hormis le fait d'être gagnant ou perdant) et que tous les résultats possibles sont équiprobables.

2.a. Combien y a-t-il de résultats possibles?

2.b. Quelle est la proportion $Q(n, p)$ de résultats qui comptent au moins un ticket gagnant?

2.c. Quelle est la limite de $Q(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$?

3. On suppose encore que le joueur effectue des tirages sans remise, mais on suppose cette fois que les tickets soient tous numérotés (et donc tous discernables). Proposer un modèle probabiliste.

1.a. La probabilité de tirer au moins un ticket gagnant est égale à $P(X \geq 1)$, c'est-à-dire à

$$P(n, p) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^p.$$

1.b. On sait alors bien que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} P(p^2, p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p = 1 - e^{-1}.$$

2.a. Il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p tickets parmi n tickets deux à deux distincts (par définition du coefficient binomial).

2.b. Comme il y a p tickets gagnants,

— ou bien $2p > n$, et chaque tirage contient au moins un ticket gagnant;

— ou bien $2p \leq n$, et il y a $\binom{n-p}{p}$ manières de choisir les p tickets tirés de l'urne parmi les $(n-p)$ tickets perdants.

Avec la convention habituelle,

$$Q(n, p) = 1 - \frac{\binom{n-p}{p}}{\binom{n}{p}}.$$

2.c. Avec $n = p^2$,

$$Q(n, p) = 1 - \frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!}.$$

Avec la formule de Stirling,

$$\frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2p^2 - 2p} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{2p - p^2}$$

et par conséquent

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Q(p^2, p) = 1 - e^{-1}.$$

3. Si les tickets sont tous discernables, il s'agit de compter le nombre de p -listes constituées à partir de n éléments : il y a donc

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

cas possibles. Parmi ces cas possibles, on exclut les p -listes formées à partir des $(n-p)$ tickets perdants :

— si $2p > n$, chaque liste contient au moins un ticket gagnant;

— si $2p \leq n$, il faut éliminer $\frac{(n-p)!}{(n-2p)!}$ listes.

L'hypothèse d'équiprobabilité nous conduit alors à

$$Q(n, p) = 1 - \frac{[(n-p)!]^2}{n!(n-2p)!}$$

c'est-à-dire au même résultat que dans le modèle précédent.

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue des tirages avec remise successifs.

On note Y , l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu.

On note Z , l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Reconnaître la loi de $Y - 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
3. Déterminer la loi du vecteur (Y, Z) .
4. En déduire la loi de Z .

On modélise l'expérience par une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

La valeur de X_n indique le jeton obtenu lors du n -ième tirage.

1. Pour obtenir deux jetons différents, il faut tirer au moins deux jetons...
Pour tout entier $n \geq 2$,

$$[Y = n] = [X_1 = \dots = X_{n-1} \neq X_n] = \bigcup_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} [X_1 = \dots = X_{n-1} = i, X_n \neq i] \in \mathcal{A}.$$

Cette égalité démontre que Y est bien une variable aléatoire discrète sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Par additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit aussi que

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{P}(Y = n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et que

$$\forall k \geq 1, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbf{P}(X_k \neq i).$$

2. La variable aléatoire $(Y - 1)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [Y - 1 = k] = [Y = k + 1].$$

Par conséquent,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(Y - 1 = k) = \frac{2}{3^{(k+1)-1}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

La variable aléatoire $(Y - 1)$ suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(2/3)$. On en déduit que

$$\mathbf{E}(Y - 1) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y - 1) = \frac{q}{p^2} = \frac{3}{4}$$

et donc que $\mathbf{E}(Y) = 5/2$ (par linéarité) et $\mathbf{V}(Y) = 3/4$ (invariance de la variance par translation).

3. Le nombre Z de tirages nécessaires pour obtenir les trois jetons est strictement supérieur au nombre Y de tirages nécessaires pour obtenir deux jetons différents.

Chaque succession de tirages définit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$: le premier jeton qui apparaît est $\sigma(1)$; le premier jeton différent du précédent, qui apparaît au Y -ième tirage, est $\sigma(2)$; le dernier jeton, qui apparaît au Z -ième tirage, est $\sigma(3)$. Ainsi, avant le Y -ième tirage, on ne tire que le jeton $\sigma(1)$; entre le Y -ième tirage et le Z -ième tirage, on tire à nouveau un jeton déjà tiré, c'est-à-dire $\sigma(1)$ ou $\sigma(2)$ mais pas $\sigma(3)$.

Par conséquent, quels que soient les entiers m et n tels que $2 \leq m < n$,

$$\begin{aligned} [Y = m, Z = n] &= [X_1 = \dots = X_{m-1} \neq X_m] \cap [X_{m+1}, \dots, X_{n-1} \in \{X_{m-1}, X_m\}] \cap [X_n \notin \{X_{m-1}, X_m\}] \\ &= \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [X_1 = \dots = X_{m-1} = \sigma(1), X_m = \sigma(2)] \cap [X_{m+1} \neq \sigma(3), \dots, X_{n-1} \neq \sigma(3)] \cap [X_n = \sigma(3)] \\ &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

ce qui prouve, si besoin était, que (Y, Z) est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et donc que Z est bien une variable aléatoire.

Comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, tous les événements qui apparaissent dans la décomposition précédente de $[Y = m, Z = n]$ ont même probabilité :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1} \cdot \frac{1}{3}$$

et comme $\#\mathfrak{S}_3 = 6$,

$$\forall 2 \leq m < n, \quad \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{3}{2^m} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

4. Connaissant la loi du couple (Y, Z) , il est facile d'en déduire la loi (marginale) de Z .

$$\forall n \geq 3, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}.$$

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes les deux la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}.$$

On cherche à calculer la probabilité pour que M soit diagonalisable.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1 + X)^{2n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Conclure.

1. D'après la formule du binôme,

$$(1 + X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = [(1 + X)^n]^2 = \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right]^2.$$

Il est plus simple d'écrire un polynôme comme une somme infinie dont le terme général est nul à partir d'un certain rang pour appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right]^2 = \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \right]^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k \quad \text{avec} \quad b_k = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i}.$$

En particulier, pour $k = n$, on a $0 \leq k - i \leq n$ pour tout $0 \leq i \leq k$ et donc

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad a_i = \binom{n}{i} \quad \text{et} \quad a_{k-i} = \binom{n}{k-i} = \binom{n}{i}$$

(par symétrie des coefficients binomiaux).

Par unicité de la décomposition d'un polynôme dans la base canonique,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

2. La matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

- ou bien $x_1 \neq x_2$, et la matrice est diagonalisable (comme toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admettant deux valeurs propres distinctes);
- ou bien $x_1 = x_2$, et la matrice n'est pas diagonalisable (puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre double x_1 est la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 0)$).

Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'événement $[X_1 = X_2]$.

En décomposant cet événement sur le système complet $([X_1 = k])_{0 \leq k \leq n}$,

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^n [X_1 = k, X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^n [X_1 = k, X_2 = k].$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$ et par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(X_2 = k) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \right]^2$$

donc

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

✎ D'après la formule de Stirling,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Il est logique que cette probabilité tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: les deux variables aléatoires sont indépendantes et prennent des valeurs de plus en plus nombreuses, il est donc de plus en plus rare qu'elles prennent la même valeur en même temps.

Pour $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = p^2 k (1 - p)^{k-1}.$$

1. Vérifier que $(p_k)_{k \geq 1}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X , une variable aléatoire telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X - 1)$ et de $\mathbf{E}[(X - 1)(X - 2)]$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$.

✎ Commençons par présenter tous les résultats sur les séries entières dont nous aurons besoin dans la suite pour calculer l'espérance et la variance de cette **loi de Pascal**.

On sait que le rayon de convergence de la série (géométrique) $\sum x^k$ est égal à 1 et que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \quad (17)$$

Par conséquent, on peut dériver terme à terme autant qu'on veut :

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \quad (18)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \quad (19)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3}. \quad (20)$$

1. La famille $(p_k)_{k \geq 1}$ est une famille de réels positifs. D'après les séries entières rappelées ci-dessus (18), c'est aussi une famille sommable, dont la somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p^2 f'(q) = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1$$

donc c'est bien une loi de probabilité.

2. D'après la formule de transfert, la variable aléatoire $X - 1$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum (k-1)p_k$ est absolument convergente. D'après (19), c'est bien le cas et

$$\mathbf{E}(X - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)p_k = p^2 q f''(q) = \frac{2p^2 q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p}.$$

✎ De même, comme la série $\sum (k-1)(k-2)p_k$ converge absolument (20), la variable $(X-1)(X-2)$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}[(X-1)(X-2)] = \sum_{k=3}^{+\infty} (k-1)(k-2)p_k = p^2 q^2 f^{(3)}(q) = \frac{6q^2}{p^2}.$$

3. Il est clair que $X = (X-1) + 1$, donc X est une variable aléatoire d'espérance finie (en tant que somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X-1) + 1 = \frac{2q}{p} + 1 = \frac{1+q}{p}.$$

De même, $X^2 = (X-1)(X-2) + 3X - 2$, donc X est une variable aléatoire de carré intégrable (puisque son carré est une somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, à nouveau par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}[(X-1)(X-2)] + 3\mathbf{E}(X) - 2 = \frac{p^2 - 6p + 6}{p^2}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = \frac{2q}{p^2}.$$

✎ On pouvait aussi calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X :

$$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 k q^{k-1} t^k = p^2 t \sum_{k=1}^{+\infty} k (qt)^{k-1} = p^2 t f'(qt) = \frac{p^2 t}{(1-qt)^2}. \quad (21)$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à $1/q > 1$, donc X admet des moments de tout ordre et

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1+q}{p}, \quad \mathbf{E}[X(X-1)] = G''(1) = \frac{4q}{p} + \frac{6q^2}{p^2}$$

ce qui permet de retrouver (plus rapidement, à mon goût) la variance de X .

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes. Pour tout entier $n \geq 1$, on suppose que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ et on pose

$$\bar{p}_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

1. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

2. On suppose que $\bar{p}_n$ tend vers p lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

1. Une variable aléatoire de Bernoulli admet un moment d'ordre deux. Comme l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de variables aléatoires de Bernoulli, et en particulier la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

admet aussi un moment d'ordre deux. On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

 **Variante**

Comme les variables aléatoires de Bernoulli ne prennent que les valeurs 0 et 1, on sait que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq Y_n(\omega) \leq 1.$$

En tant que variable aléatoire bornée, Y_n admet des moments de tous les ordres et en particulier un moment d'ordre deux.

 Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = \bar{p}_n.$$

Comme les X_k sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k).$$

On doit savoir que

$$\forall 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$$

et donc que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \mathbf{V}(Y_n) \leq \frac{1}{4n}.$$

 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

On déduit de cet encadrement que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\eta = \varepsilon/2 > 0$.

• Comme $\bar{p}_n$ tend vers p et que $\eta > 0$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |\bar{p}_n - p| \leq \eta.$$

• D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\forall n \geq 1, \quad |Y_n(\omega) - p| \leq |Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + |\bar{p}_n - p|$$

et en particulier

$$\forall n \geq n_0, \quad |Y_n(\omega) - p| \leq |Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + \eta.$$

Par conséquent, pour $n \geq n_0$, si

$$|Y_n(\omega) - p| \geq \varepsilon,$$

alors

$$|Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + \eta \geq \varepsilon$$

et donc

$$|Y_n(\omega) - \bar{p}_n| \geq \varepsilon - \eta = \eta.$$

Autrement dit, en termes d'événements de la tribu $\mathcal{A}$,

$$\forall n \geq n_0, \quad [|Y_n - p| \geq \varepsilon] \subset [|Y_n - \bar{p}_n| \geq \eta]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \mathbf{P}(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|Y_n - \bar{p}_n| \geq \eta).$$

► Comme $\eta > 0$, on déduit de la première question que le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet un moment d'ordre deux et que la variable aléatoire

$$Z = X + Y + 1$$

suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de p .

2. a. Calculer la fonction génératrice de X .

2. b. En déduire la loi de X .

1. Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(Z) = 1/p$ et $\mathbf{V}(Z) = q/p^2$.

• Comme X et Y ont même loi et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 = 1 + 2\mathbf{E}(X)$$

et donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{2p} = \frac{q}{2p}.$$

• Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\mathbf{V}(X)$$

et donc $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$.

2. a. Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Or $Z = X + Y + 1$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X \cdot t^Y \cdot t^1) = \mathbf{E}(t^X) \cdot \mathbf{E}(t^Y) \cdot t = t[G_X(t)]^2.$$

Or $G_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ (somme de termes positifs), donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}.$$

2. b. On sait que

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots [-(2k-1)/2]}{k!} u^k.$$

Par conséquent, avec $u = -qt$ (où $0 < q < 1$),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{p} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \cdot \frac{q^k}{4^k} \cdot t^k \right].$$

Comme le rayon de convergence d'une série génératrice est au moins égal à 1, on peut identifier les coefficients terme à terme. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\sqrt{p} q^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

1. Développer

$$f(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

en série entière. Préciser le rayon de convergence.

2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f .

3. Calculer l'espérance de X .

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{2} \cdot X$.

1. Pour $|t^2/2| < 1$,

$$\frac{t}{2-t^2} = \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1-(t^2/2)} = \frac{t}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

et pour $|t^2/2| > 1$, la série (géométrique) est grossièrement divergente.

Par conséquent, le rayon de convergence est égal à $1/\sqrt{2}$.

2. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier terme à terme. Puisque

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^{2n+1},$$

alors

- si k est pair, alors $\mathbf{P}(X=k) = 0$ — autrement dit, X est une variable aléatoire dont les valeurs sont presque sûrement des entiers impairs ;
- si k est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n+1$ et

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

3. Comme le rayon de convergence de la série génératrice est *strictement* supérieur à 1, la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre. En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = f'(1).$$

Or

$$\forall t \in [0, 1/\sqrt{2}], \quad f'(t) = \frac{1}{2-t^2} + \frac{2t^2}{2-t^2}$$

et donc $f'(1) = 3$.

4. Comme les valeurs de X sont des entiers impairs, Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des demi-entiers :

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{E} = \left\{ \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[Y = \frac{2n+1}{2} \right] = [X = 2n+1],$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\left(Y = \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\alpha}{k+1} \binom{n-1}{k-1}.$$

1. Pour $1 \leq k \leq n$, déterminer α tel que

$$\binom{n}{k} = \alpha \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Que vaut le réel α ?

3. Calculer l'espérance de X .

4. Calculer la variance de X .

1. Ultra-classique :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

pour tout entier $1 \leq k \leq n$.

On rappelle une autre formule ultra-classique, conséquence de la formule du binôme :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. Comme $([X = k])_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, il faut que

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

D'après la relation précédente (avec un décalage d'indices),

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

puisque'il manque un terme ($\ell = 0$) pour la formule du binôme. Ainsi,

$$\alpha = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}.$$

3. Comme X est une variable aléatoire bornée, elle admet des moments de tout ordre et en particulier, c'est une variable d'espérance finie et de variance finie.

On part de la définition de la variance et on recourt à l'Astuce taupinale :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{(k+1) - 1}{k+1} \binom{n}{k} = \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha}{k+1} \binom{n}{k} = 2^n \alpha - 1.$$

Après simplification,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{2^n(n-1) + 1}{2^{n+1} - 1}.$$

4. Nous allons calculer la variance de manière indirecte : la question précédente nous indique qu'il faut utiliser l'Astuce taupinale pour réussir à calculer ces sommes. Après quelque réflexion, on devine qu'il faut commencer le calcul de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X+1)] &= \sum_{k=0}^n k(k+1) \mathbf{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{k+1} \binom{n}{k} = \alpha \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n\alpha \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = 2^{n-1} n\alpha \end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X(X+1)] - \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2$$

et après quelques simplifications, on arrive à

$$\mathbf{V}(X) = 2^{n-1}(n+2)\alpha - 4^n\alpha^2 = \frac{2^{n-1}(n+1)(n+2)}{2^{n+1}-1} - \left(\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}\right)^2.$$

✎ Exercice purement calculatoire, sans contenu mathématique identifié — à l'ancienne! Quelques lignes de Python permettent de vérifier l'exactitude des expressions trouvées.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les racines réelles des polynômes $X^3 - 2X + 1$ et $X^3 - 2X - 4$.
2. Déterminer les matrices qui commutent avec D .
3. Résoudre l'équation $M^3 - 2M = D$, d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Résoudre l'équation $M^3 - 2M = A$, d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le polynôme $X^3 - 2X + 1$ admet 1 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1) = (X - 1)(X - \alpha)(X - \beta)$$

où $\{\alpha, \beta\} = \{(-1 \pm \sqrt{5})/2\}$.

Le polynôme $X^3 - 2X - 4$ admet 2 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2X + 2)$$

et $X^2 + 2X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Considérons une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice D dans cette base $\mathcal{B}$.

Comme D est diagonale, les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de u , associés aux valeurs propres -1 et 4 . Les sous-espaces propres de u sont donc des *droites* vectorielles.

♣ Si un endomorphisme v commute à u , alors tout sous-espace propre de u est aussi stable par v . Par conséquent, les droites $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$ et $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_2$ sont stables par v , ce qui signifie que les vecteurs ε_1 et ε_2 sont aussi des vecteurs propres pour v .

Ainsi, si v commute à u , alors $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale.

♣ Réciproquement, si la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale, alors elle commute à D (deux matrices diagonales commutent toujours) et par conséquent les endomorphismes u et v commutent.

En conclusion, les matrices qui commutent à D sont exactement les matrices diagonales.

➤ Plus généralement, si $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, les matrices qui commutent à D sont les matrices diagonales. (Même démonstration !)

3. Si $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 - 2M = D$, alors M et D commutent (puisque toute matrice M commute à tout polynôme en M) et d'après la question précédente, M est une matrice diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

L'équation $M^3 - 2M = D$ devient alors

$$\begin{pmatrix} a^3 - 2a & 0 \\ 0 & b^3 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'après la première question, il y a trois possibilités pour a : 1, α et β et une seule pour b : 2. Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est triangulaire, donc ses coefficients diagonaux : -1 et 4 sont ses valeurs propres. En tant que matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et semblable à la matrice D : il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.

La conjugaison étant un morphisme d'algèbres,

$$\begin{aligned} M^3 - 2M = A &\iff P^{-1}M^3P - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \\ &\iff (P^{-1}MP)^3 - 2(P^{-1}MP) = D. \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation précédente.

• Il est clair que la matrice

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

convient (ses colonnes sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -1 et à 4). Par conséquent, les solutions de $M^3 - 2M = A$ sont les matrices

$$P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}.$$

On étudie l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le rang et une base de l'image de f .
2. Soit g , l'endomorphisme induit par restriction de f au sous-espace $\text{Im } f$. Démontrer que g est diagonalisable.

1. Le rang de (1) (pour $n = 1$) et de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (pour $n = 2$) est égal à 1.

À partir de $n = 3$, les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles, donc son rang est au moins égal à 2. Les autres colonnes de M sont égales à C_1 ou à C_2 , donc le rang de M est en fait égal à 2.

• L'image de M est engendrée par les colonnes de M . On en déduit que

$$\text{Im } M = \text{Vect}(C_1, C_2).$$

2. L'image d'un endomorphisme f est (toujours!) un sous-espace stable par f , donc l'endomorphisme g est bien défini. D'après le cours, si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de f à un sous-espace stable quelconque est également diagonalisable.

🔗 Une histoire de polynôme annulateur — mais si, mais si, mais si, vous vous en souvenez...

• Si on ne se contente pas d'une telle réponse, on peut calculer

$$MC_2 = 2 \cdot C_1 = 0 \cdot C_2 + 2 \cdot C_1 \quad \text{et} \quad MC_1 = (n-2) \cdot C_2 + 2 \cdot C_1,$$

donc la matrice de g relative à la base (C_2, C_1) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n-2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est égal à

$$X^2 - 2X + 2(2-n),$$

donc B admet deux valeurs propres distinctes :

$$1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Pour chaque valeur propre λ de g , le sous-espace propre est une droite vectorielle (DEUX valeurs propres distinctes pour un endomorphisme du PLAN $\text{Im } f$) et cette droite vectorielle est dirigée par le vecteur

$$(n-2) \cdot C_2 + \lambda \cdot C_1.$$

🔗 Pour trouver le noyau de $B - \lambda I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une proportion entre les deux colonnes de cette matrice.

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/\alpha & 1/\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $-1/\alpha$ est une valeur propre de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Caractériser les sous-espaces propres de A .

1. En écrivant

$$A + \frac{1}{\alpha} I_3 = \begin{pmatrix} 1/\alpha & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1/\alpha & 1 \\ 1/\alpha & 1/\alpha^2 & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

on constate que cette matrice n'est pas inversible puisque $C_3 = \alpha C_2$. Cela prouve que $-1/\alpha$ est une valeur propre de A et que le vecteur $(0, \alpha, -1)$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2. Il est clair que $\det A = 2$ et que $\operatorname{tr} A = 0$. En considérant A comme une matrice à coefficients complexes, il existe deux complexes α et β tels que

$$\frac{-1}{\alpha} + \alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha\beta}{\alpha} = 2.$$

Les deux nombres α et β sont donc les racines du trinôme

$$X^2 + \frac{1}{\alpha}X - 2\alpha.$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$\frac{-1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\alpha}(1 \pm \sqrt{1 + 8\alpha^3}).$$

⚡ Comme $\alpha > 0$, la première valeur propre est négative et la deuxième est positive. Comme les deux dernières sont distinctes, si A admet une valeur propre double, alors il faut que

$$\frac{-1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha}(1 - \sqrt{1 + 8\alpha^3})$$

et donc que $\alpha = 1$.

Pour $\alpha = 1$, le sous-espace propre associé à -1 est le plan d'équation

$$[x + y + z = 0]$$

et la droite propre associée à la valeur propre 2 est évidemment la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$ — "évidemment", car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Dans la suite, on supposera donc $\alpha \neq 1$ pour que la matrice A ait trois valeurs propres distinctes.

3. Comme A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. On peut donc déduire du calcul précédent que

$$\operatorname{Ker}\left(A + \frac{1}{\alpha} I_3\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$, l'une des deux autres valeurs propres de A .

⚡ Comme les deux valeurs propres α et β sont en quelque sorte conjuguées l'une de l'autre, on peut effectuer les deux calculs simultanément, en se bornant à savoir que la valeur propre λ vérifie la propriété

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\alpha} - 2\alpha = 0$$

c'est-à-dire

$$a\lambda^2 + \lambda - 2a^2 = 0. \quad (*)$$

On sait, par la discussion précédente, que le rang de $A - \lambda I_3$ est égal à 2. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

est nul, alors $\lambda^2 = a$ et on déduit de l'équation (*) que $a = 1$, cas que nous avons déjà traité. Par conséquent, le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2. Cette matrice est constituée des deux premières lignes de la matrice $(A - \lambda I_3)$, donc

$$(A - \lambda I_3)X = 0 \implies BX = 0,$$

c'est-à-dire $\text{Ker}(A - \lambda I_3) \subset \text{Ker } B$. Or ces deux matrices ont même rang et même nombre de colonnes, donc leurs noyaux ont même dimension (Théorème du rang), donc ces deux matrices ont même noyau.

🔗 *La troisième ligne de $A - \lambda I_3$ ne fait que compliquer les calculs sans apporter d'information supplémentaire!*

Or

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a - \lambda^2 & a^2 + \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2)$$

donc le sous-espace propre de A associé à λ est la droite dirigée par la colonne

$$\begin{pmatrix} a + \lambda a^2 \\ a^2 + \lambda \\ \lambda^2 - a \end{pmatrix}.$$

🔗 *Il s'agit seulement de résoudre un système triangulaire!*

En conclusion, pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a + \alpha a^2 & a + \beta a^2 \\ a & a^2 + \alpha & a^2 + \beta \\ -1 & \alpha^2 - a & \beta^2 - a \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha + \beta = 1/a$ et $\alpha\beta = -2a$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que A est semblable à jA (où $j = e^{2i\pi/3}$).

1. Démontrer que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad j\lambda \in \text{Sp}(A).$$

2. En déduire que $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

3. Démontrer que $A^2 = 0_2$.

4. Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose que $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$?

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Alors il existe une colonne $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$ et donc telle que

$$j \cdot AX = j \cdot (\lambda X), \quad \text{soit} \quad (j \cdot A)X = (j\lambda) \cdot X$$

et comme $X \neq 0$, cela prouve que $j\lambda \in \text{Sp}(jA)$.

✎ Plus généralement, quel que soit le polynôme P et la valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$, le scalaire $P(\lambda)$ est une valeur propre de la matrice $P(A)$.

Comme A et jA sont semblables, elles ont même spectre et par conséquent $j\lambda \in \text{Sp}(A)$.

2. Comme A est une matrice à coefficients complexes, son spectre n'est pas vide. Il existe donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour A .

D'après la première question, $j\lambda \in \text{Sp}(A)$ et, par conséquent, $j^2\lambda \in \text{Sp}(A)$ (en vertu du vieux principe : *Tant que je gagne, je joue*).

Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda, j\lambda$ et $j^2\lambda$ sont trois valeurs propres deux à deux distinctes de A . Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, c'est impossible.

Par conséquent, $\lambda = 0$ et donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

3. Comme A est une matrice $(2, 2)$ à coefficients complexes, son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré 2 et, d'après la question précédente, ce polynôme admet 0 pour seule racine. Donc $\chi_A = X^2$ et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = 0_2$.

4. Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad jA = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices A et jA sont diagonales et ont les mêmes coefficients diagonaux avec les mêmes multiplicités, donc elles sont semblables — et $A \neq 0_3$.

✎ Pour permuter circulairement les valeurs propres, il suffit de permuter les vecteurs de la base. Une matrice P telle que $P^{-1}AP = jA$ est donc par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient u et v , deux endomorphismes de E , espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre λ de $u \circ v$ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

Indication : on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

✦ **Cas $\lambda = 0$**

Puisque E est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de $u \circ v$ si, et seulement si, $\det(u \circ v) = 0$. Or

$$\det(v \circ u) = \det v \cdot \det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

✧ **Variante sans déterminant.**

Si 0 n'est pas une valeur propre de $v \circ u$, alors $v \circ u$ est injectif, donc u est injectif, donc (Théorème du rang, puisque u est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie) u est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et $u \circ v$ est alors injectif (pour la même raison).

✦ **Cas $\lambda \neq 0$**

Soit $x \in E$, un vecteur propre de $u \circ v$ associé à $\lambda \neq 0$:

$$u(v(x)) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse et $x \neq 0_E$ en tant que vecteur propre). Par conséquent, $v(x) \neq 0_E$ et en composant par v l'égalité précédente, on obtient

$$v[u(v(x))] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme $v(x) \neq 0_E$, on en déduit que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ .

On considère la suite de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et

$$\forall k \geq 2, \quad P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P'_n = P_{n-1}(X-1).$$

En déduire que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k).$$

3.a. Démontrer que l'application Φ_n définie par

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi_n(Q) = Q - Q'(X+1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b. Exprimer les polynômes $\Phi_n(P_k)$ en fonction de $P_0, \dots, P_n$.

3.c. Démontrer que Φ_n possède une unique valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?

4. Démontrer que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\Phi_n^{-1}(P_k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Pour tout $0 \leq k \leq n$, le degré du polynôme P_k est égal à k , donc la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (échelonnée en degré).

2. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P'_n &= \frac{(X-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)X(X-n)^{n-2}}{n!} = \frac{(X-n)^{n-2}}{n!} \cdot [(X-n) + (n-1)X] \\ &= \frac{(X-1)((X-1)-(n-1))^{(n-1)-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(X-1). \end{aligned}$$

On suppose que $P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k)$ pour un entier $1 \leq k < n$ (c'est vrai pour $k=1$ comme on vient de le constater). Alors

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)} &= (P_n^{(k)})' \stackrel{\text{HR}}{=} (P_{n-k}(X-k))' = P'_{n-k}(X-k) \\ &= P_{(n-k)-1}((X-k)-1) && \text{(calcul précédent)} \\ &= P_{n-(k+1)}(X-(k+1)), \end{aligned}$$

ce qui prouve que notre hypothèse de récurrence est vraie pour $1 \leq k \leq n$.

3.a. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg Q'(X+1) = \deg Q' \leq \deg Q \leq n$$

et comme Φ_n est évidemment linéaire, l'application Φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b. Il est clair que $\Phi_n(P_0) = P_0$ et que $\Phi_n(P_1) = X-1 = P_1 - P_0$.

D'après la question précédente, pour $2 \leq k \leq n$,

$$\Phi_n(P_k) = P_k - P'_k(X+1) = P_k - P_{k-1}.$$

3.c. La matrice de Φ_n relative à la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent, Φ_n admet 1 comme seule valeur propre et il est clair sur la matrice que le sous-espace propre associé à 1 est la droite $\mathbb{R} \cdot P_0$ des polynômes constants.

🔗 On peut aussi constater que l'équation $\Phi_n(P) = P$ se traduit par $-P'(X+1) = 0$ et donc $P' = 0$.

4. Comme 0 n'est pas valeur propre, Φ_n est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Il est clair que $\Phi_n^{-1}(P_0) = P_0$. D'autre part, comme

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \Phi_n(P_k) = P_k - P_{k-1}$$

et que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$P_k = P_0 + \sum_{i=1}^k (P_i - P_{i-1}) = \Phi_n(P_0) + \sum_{i=1}^k \Phi_n(P_i) = \Phi_n\left(\sum_{i=0}^k P_i\right),$$

alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \Phi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^k P_i.$$

🔗 Cette expression est correcte également pour $k = 0$.

Soient f et g , deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel de dimension finie E . On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que f et g ont un vecteur propre commun.

2. Soit F , un sous-espace strict de E stable par f et par g . On considère un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$ et on note p , la projection sur G parallèlement à F .

2.a. Démontrer que le sous-espace G est stable par

$$f_1 = p \circ f \quad \text{et par} \quad g_1 = p \circ g.$$

2.b. Vérifier que f_1 et g_1 commutent.

3. Soient f_2 et g_2 , les endomorphismes respectivement induits par restriction à G des endomorphismes f_1 et g_1 . Démontrer que f_2 et g_2 sont trigonalisables.

4. En déduire par récurrence sur n qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

1.

☞ Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal (resp. son polynôme caractéristique) est scindé.

En particulier, si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Puisque l'endomorphisme f est trigonalisable, il admet donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le sous-espace propre $\text{Ker}(f - \lambda I)$ est stable par g (puisque f et g commutent). L'endomorphisme g_λ , induit par restriction de g à ce sous-espace stable, est donc bien défini.

Comme $\dim \text{Ker}(f - \lambda I) \geq 1$, le degré du polynôme caractéristique de g_λ est supérieur à 1. On sait que le polynôme caractéristique de g_λ est un diviseur du polynôme caractéristique de g et comme le polynôme caractéristique de g est scindé, le polynôme caractéristique de g_λ est scindé lui aussi.

Donc g_λ admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{K}$ et il existe un vecteur *non nul* $x_0 \in \text{Ker}(f - \lambda I)$ tel que

$$g(x_0) = g_\lambda(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

Ce vecteur x_0 est donc un vecteur propre commun à f (associé à λ) et à g (associé à μ).

2.a. Par définition, $\text{Im } p = G$, donc

$$\forall x \in G, \quad f_1(x) = p(f(x)) \in G \quad \text{et} \quad f_2(x) = p(g(x)) \in G.$$

Le sous-espace G est donc stable par f_1 et par g_1 .

2.b. Considérons une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

☞ Une base $\mathcal{B}$ de E est *adaptée à une décomposition* $E = F \oplus G$ lorsqu'elle est obtenue en concaténant une base $\mathcal{B}_F$ de F avec une base $\mathcal{B}_G$ de G .

Comme le sous-espace F est stable par f et par g et que, d'autre part, p est la projection sur G parallèlement à F ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_g & B_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_1 \circ g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g_1 \circ f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix}.$$

Mais on a supposé que f et g commutent, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} A_f A_g & A_f B_g + B_f C_g \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g A_f & A_g B_f + B_g C_f \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$$

et on en déduit que $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$.

3. Puisque le sous-espace G est stable par f_1 et par g_1 , les endomorphismes $f_2 \in L(G)$ et $g_2 \in L(G)$ induits par restriction sont bien définis.

On rappelle que les propositions suivantes sont équivalentes.

- Un endomorphisme u est trigonalisable;
- L'endomorphisme u admet un polynôme annulateur non nul et scindé;
- Le polynôme caractéristique de u est scindé;
- Le polynôme minimal de u est scindé.

Soit χ_f , le polynôme caractéristique de f . En calculant dans la base $\mathcal{B}$,

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(t) = \det(tI - A_f) \det(tI - C_f).$$

En calculant dans la base $\mathcal{B}_G$,

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \chi_{f_2}(t) = \det(tI - C_f)$$

donc χ_{f_2} est un diviseur de χ_f . Comme χ_f est scindé et que $\dim G \geq 1$, on en déduit que χ_{f_2} est un polynôme non constant et scindé.

On a supposé que F était un sous-espace strict de E . Par conséquent, $\dim F < \dim E$ et donc $\dim G \geq 1$.

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme χ_{f_2} est un polynôme annulateur de f_2 . On en déduit que f_2 est trigonalisable.

Idem pour g_2 , évidemment.

4. Si $n = 1$, les matrices de f et g sont triangulaires supérieures (et même diagonales!) dans toute base de E .

HR : supposons que, pour un entier $n \geq 1$, quel que soit l'espace vectoriel E de dimension n , quels que soient les endomorphismes f et g de E , si f et g sont trigonalisables et commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

Considérons maintenant un espace vectoriel E de dimension $(n + 1)$ et deux endomorphismes trigonalisables f et g tels que $f \circ g = g \circ f$.

D'après la première question, il existe un vecteur x_0 qui est un vecteur propre à la fois pour f et pour g . Le sous-espace $F = \mathbb{K} \cdot x_0$ est donc stable pour f et pour g .

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$ et, dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$ de E adaptée à cette décomposition,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & L_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & L_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}.$$

On a démontré précédemment que les endomorphismes f_2 et g_2 induits par restriction à G , sous-espace de dimension n , étaient trigonalisables et commutaient (puisque f_1 et g_1 commutaient).

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{C}_G$ de G dans laquelle les matrices de f_2 et g_2 sont triangulaires supérieures :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_G}(f_2) = C_f, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}_G}(f_2) = T_f, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G}(g_2) = C_g, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}_G}(g_2) = T_g.$$

On en déduit que les matrices de f et g relatives à la base $\mathcal{C} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{C}_G$ sont triangulaires supérieures :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & \star \\ 0 & T_f \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & \star \\ 0 & T_g \end{pmatrix}.$$

On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence était héréditaire et la démonstration par récurrence est achevée.

En notant $P_n \in GL_n(\mathbb{K})$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_G$ à $\mathcal{C}_G$, la matrice

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et, en remarquant que

$$P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix},$$

quelques produits matriciels par blocs nous permettent d'expliciter les matrices de f et g relatives à la base $\mathcal{C}$ en fonction des matrices de f et g relatives à la base $\mathcal{B}$.

▮ Variante géométrique

Un endomorphisme f de E , espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, est trigonalisable si, et seulement si, il existe une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E$$

qui sont tous stables par f .

En particulier, la dimension de E_k est égale à k (quel que soit $0 \leq k \leq \dim E$).

Pour établir l'hérédité de notre hypothèse de récurrence, on considère $E_1 = \mathbb{K} \cdot x_0$ (stable par f et g) ainsi qu'une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} \subsetneq G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_{n-1} \subsetneq G_n = G$$

qui sont tous stables par f_2 et par g_2 . On vérifie alors que les sous-espaces $E_{k+1} = E_1 \oplus G_k$ sont tous stables par f et g (ce qui n'est pas totalement évident et mérite qu'on pose quelques calculs) et que

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n \subsetneq E_{n+1} = E.$$

Soient a et b , deux vecteurs d'un espace euclidien E . Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = x - \langle a | x \rangle b.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E .
2. Démontrer que f est bijectif si, et seulement si, $\langle a | b \rangle \neq 1$.

1. Les applications $[x \mapsto x]$ et $[x \mapsto \langle a | x \rangle]$ sont linéaires, donc f est linéaire et comme il est clair que $f(x) \in E$ pour tout $x \in E$, l'application f est bien un endomorphisme.

2. Comme f est un ENDOMORPHISME de E , espace vectoriel DE DIMENSION FINIE, alors f est bijectif si, et seulement si, il est injectif, c'est-à-dire si son noyau est réduit au vecteur nul (Théorème du rang).

Si $x \in \text{Ker } f$, alors $x = \langle a | x \rangle b$, donc le noyau de f est contenu dans le sous-espace $\mathbb{R} \cdot b$.

► Si $b \neq 0_E$, alors $\mathbb{R} \cdot b$ est une droite et

$$f(b) = (1 - \langle a | b \rangle) \cdot b$$

donc le vecteur $b \neq 0_E$ appartient au noyau de f si, et seulement si, $\langle a | b \rangle = 1$.

► Si $b = 0_E$, alors $f = I_E$ et $\langle a | b \rangle = 0 \neq 1$.

Bref : le noyau de f est réduit au vecteur nul (et f est bijectif) si, et seulement si, $\langle a | b \rangle \neq 1$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.A^\top.A = I_n$.

1. Démontrer que A est inversible.
2. Démontrer que A est symétrique.
3. En déduire que $A = I_n$.

1. Par hypothèse, $A.(A^\top.A) = I_n$. Comme A et $(A^\top.A)$ sont des matrices carrées de même taille, on en déduit (Théorème du rang) que A est inversible et que son inverse est la matrice $A^\top.A$.

✎ La relation $(A.A^\top).A = I_n$ nous dit aussi que $A^{-1} = A.A^\top$ et donc que les matrices A et $A^\top$ commutent.

2. Puisque A est inversible et que $A^{-1} = A^\top.A$, la matrice A^{-1} est symétrique. Par conséquent, la matrice A est elle aussi symétrique.

3. D'après l'hypothèse de l'énoncé et la symétrie de A , $A^3 = I_n$, donc A admet

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

comme polynôme annulateur. On sait que les valeurs propres de A figurent nécessairement parmi les racines de ce polynôme.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Donc le spectre de A est réduit à $\{1\}$ (la seule racine réelle du polynôme annulateur) et comme A est diagonalisable, on en déduit que A est semblable à I_n et donc $A = I_n$.

1. Calculer la limite de

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

2. Calculer un équivalent de

$$S_n = \prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}.$$

1. La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc les sommes de Riemann R_n convergent vers

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - t]_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

2. Chaque réel S_n est un produit de réels strictement positifs, donc

$$\ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = \ln n + R_n.$$

Par conséquent,

$$S_n = n \cdot e^{R_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4n}{e}.$$

✎ Variante avec la formule de Stirling

Si on remarque que

$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{1/n},$$

on peut tenter d'appliquer la Formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2} \cdot e^{-n} 4^n n^n.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n!} \cdot \left(\frac{e}{4n} \right)^n = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

On a ici une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général strictement positif, qui converge vers une limite $\ell > 0$. Par conséquent,

$$u_n^{1/n} \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp \frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1.$$

En l'occurrence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \cdot \frac{e}{4n} = 1$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Attention! En général, la composition d'équivalents produit des résultats hasardeux. C'est pourquoi on a pris soin ici de composer des limites.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction $\tan$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$\tan x = x$$

admet une, et une seule, solution $x_n \in I_n$ et que $x_n \sim n\pi$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose $y_n = x_n - n\pi$.
3. a. Démontrer que $y_n = \operatorname{Arctan} x_n$ et en déduire la limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. b. Démontrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\pi/2$ et déterminer un réel c tel que

$$y_n - \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}.$$

4. Démontrer que, pour tout entier n assez grand,

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{x_n \tan(1/n\pi) - 1}{x_n + \tan(1/n\pi)}.$$

5. Trouver quatre réels a, b, c et d tels que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. La fonction $\tan$ est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$, donc elle admet un développement limité à l'ordre 3 de la forme

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + bx^3 + o(x^3).$$

On sait que $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$ pour tout $x \in I_0$ et que

$$\operatorname{Arctan} y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

En posant $y = \tan x = ax + bx^3 + o(x^3)$, on a $y^3 = a^3x^3 + o(x^3)$ et donc

$$\operatorname{Arctan}(\tan x) = x = ax + \left(b - \frac{a^3}{3}\right)x^3 + o(x^3).$$

On en déduit que $a = 1$ et que $b = 1/3$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \tan x - x$ (sur l'ensemble de définition de $\tan$) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle I_n et

$$\forall x \in I_n, \quad f'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x \geq 0.$$

De plus, sur I_n , la dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = n\pi$, donc f est bien strictement croissante sur l'intervalle I_n .

La fonction f réalise donc une bijection de l'intervalle I_n sur l'intervalle $J_n = f_*(I_n) =]-\infty, +\infty[$ puisque x reste bornée sur I_n alors que

$$\lim_{x \rightarrow (n\pi - \pi/2)^+} \tan x = -\infty \quad \text{et que} \quad \lim_{x \rightarrow (n\pi + \pi/2)^-} \tan x = +\infty.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une, et une seule, solution x_n dans l'intervalle I_n .

3. a.

Par construction, $n\pi - \pi/2 \leq x_n \leq n\pi + \pi/2$, donc $x_n = n\pi + \mathcal{O}(1)$ et en particulier $x_n \sim n\pi$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il est donc naturel de considérer la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour étudier plus précisément le comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $\tan$ est π -périodique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = x_n$$

(par définition de x_n). Or $x_n \in I_n$, donc $y_n = x_n - n\pi \in I_0$ et, par définition de la fonction Arctan ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \text{Arctan } x_n.$$

3. b. On a remarqué que $x_n \sim n\pi$, donc x_n tend vers $+\infty$ et, par composition de limites, y_n tend vers $\pi/2$ (par valeurs inférieures) lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *Personne n'a oublié la célèbre relation ?*

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Parfait ! Elle permet de comparer facilement $\text{Arctan } x$ à $\pi/2$, ce n'est pas son moindre mérite.

☛ Comme $x_n > 0$,

$$y_n + \text{Arctan } \frac{1}{x_n} = \text{Arctan } x_n + \text{Arctan } \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$y_n - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan } \frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}$$

puisque $1/x_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *Comme on l'a remarqué plus haut, il est donc logique d'étudier maintenant la suite de terme général*

$$u_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$$

pour obtenir une estimation plus précise de x_n .

4. Comme y_n tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures et que $1/n\pi$ tend vers 0 par valeurs positives, on peut supposer que n est assez grand pour que

$$\frac{-\pi}{4} < y_n - \frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{n\pi} < \frac{\pi}{4}.$$

On peut donc appliquer la formule d'addition de $\tan$:

$$\forall \frac{-\pi}{4} < a, b < \frac{\pi}{4}, \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

en sachant que

$$\forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan \theta}.$$

On a donc

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{\tan(y_n - \pi/2) + \tan(1/n\pi)}{1 - \tan(y_n - \pi/2) \tan(1/n\pi)} = \frac{-1 + \tan y_n \tan(1/n\pi)}{\tan y_n + \tan(1/n\pi)}$$

et on conclut en rappelant que $\tan y_n = x_n$ (démontré plus haut).

5. On sait que $\tan u = u + \mathcal{O}(u^3)$ lorsque u tend vers 0 et on a déjà démontré que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit d'une part que

$$\tan y_n \tan \frac{1}{n\pi} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

et d'autre part que

$$x_n + \tan \frac{1}{n\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi.$$

D'après la question précédente,

$$\tan u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi n^2}.$$

✎ Il est tentant de composer cette relation avec la fonction Arctan — mais cela doit être justifié, car on ne dispose d'aucun théorème général à ce sujet.

Cette relation de comparaison peut s'écrire également

$$\tan u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme u_n tend vers 0, on peut supposer que n est assez grand pour que $u_n \in I_0$ et en déduire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \operatorname{Arctan}\left[\frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après le développement limité de la fonction Arctan au voisinage de 0.

Finalement,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On considère une série $\sum u_n$ de terme général strictement positif.

1. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+3}$$

et on pose $v_n = n^2 u_n$.

Étudier la nature de la série $\sum \ln(v_{n+1}/v_n)$. En déduire celle de la série $\sum u_n$.

2. Généralisation : en supposant que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

étudier la nature de la série $\sum u_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{n+1}{n+3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{-1}.$$

Par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left[1 + \frac{2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \left[1 - \frac{2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc que la série télescopique $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est (absolument) convergente.

Donc la suite de terme général $\ln v_n$ converge vers un réel λ et, par composition de limites, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e^\lambda > 0$. Autrement dit,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\lambda}{n^2},$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge (absolument).

2. On pose cette fois $v_n = n^\alpha u_n$ et, comme précédemment,

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left[1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit encore que la série $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge et donc qu'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}.$$

D'après le Théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est alors convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln n}{n}, \quad v_n = (-1)^n u_n$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n v_k, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On admet l'existence d'un réel γ (la constante d'Euler) tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

1. Étudier les variations de $\frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.
2. Comparer u_n à $1/n$. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
3. Exprimer $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une somme. En déduire que

$$S_{2n} - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 \cdot \ln n + o(1).$$

4. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de H_n et de S_n . En déduire la somme de la série $\sum v_n$.

1. La fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Par conséquent, la fonction f est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Elle atteint donc un maximum, égal à $1/e$, en $x = e$. Il est par ailleurs clair que f tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Il est clair que $\frac{1}{n} = o(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or la série $\sum u_n$ est une série de terme général positif et la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif. Par comparaison, la série $\sum u_n$ est divergente.

• La série $\sum v_n$ est une série alternée, son terme général tend vers 0 et la suite $(|v_n|)_{n \geq 3} = (u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_n$ est convergente.

3. D'après la relation de Chasles,

$$\forall n \geq 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} f(k).$$

Comme la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$, on peut facilement comparer cette somme à une intégrale (**Faites une FIGURE!**) et en déduire que

$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \int_n^{2n} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{2n-1} u_k.$$

✎ Cet encadrement n'est valable que pour $n \geq 3$. Ce n'est pas un problème, puisqu'on va faire tendre n vers $+\infty$.

En retournant l'encadrement, on obtient que

$$\forall n \geq 3, \quad \int_n^{2n} f(t) dt + u_{2n} - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \int_n^{2n} f(t) dt.$$

- Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{2n} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_n^{2n} = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Par ailleurs, il est clair que $u_{2n} - u_n = o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc on déduit de l'encadrement précédent que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln 2 \cdot \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1).$$

4. En sommant S_{2n} et T_{2n} , les termes de rang impair se compensent pendant que les termes de rang pair s'ajoutent et il reste

$$S_{2n} + T_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n u_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2 + \ln k}{k} = \ln 2 H_n + S_n.$$

Par conséquent, d'après la formule d'Euler (rappelée par l'énoncé) et la question précédente,

$$T_{2n} = \ln 2 H_n - (S_{2n} - S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} [\ln 2 \ln n + \gamma \ln 2 + o(1)] - \left[\ln 2 \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1) \right] = \frac{2\gamma - \ln 2}{2} \cdot \ln 2 + o(1).$$

Comme la série $\sum v_n$ est convergente, sa somme est aussi la limite de la suite extraite $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right) \ln 2.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum v_n$ converge.

On notera dans la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2. Démontrer que l'intégrale I_n est bien définie. Calculer

$$\int_0^x u e^{-u} du$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 2(1 + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}.$$

3. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leq R_n \leq I_n.$$

En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que la série $\sum u_k$ converge. En posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

démontrer que $T_n \sim R_n/\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Pour tout entier $p \geq 1$,

$$n^p \cdot v_n = \exp(-\sqrt{n} + p \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par croissance comparée ($\ln n \ll \sqrt{n}$). Ainsi, le terme général v_n est négligeable devant le terme générale de n'importe quelle série de Riemann convergente, ce qui prouve que la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

Un développement limité simple montre que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et donc que v_{n+1}/v_n tend vers 1 : il est donc impossible de prouver que la série $\sum v_n$ converge à l'aide de la règle de D'Alembert.

2. La fonction $[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}]$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, comme on l'a vu,

$$e^{-\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^p}\right)$$

quel que soit l'entier $p > 1$. Par conséquent, cette fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

♣ Par intégration par parties,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x u e^{-u} du = 1 - (1+x)e^{-x}$$

et par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} u e^{-u} du = 1.$$

• Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (avec $dt = 2u du$) nous donne

$$I_n = 2 \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} u e^{-u} du.$$

Avec la relation de Chasles, on en déduit que

$$I_n = 2 \left(1 - \int_0^{\sqrt{n}} u e^{-u} du \right) = 2(\sqrt{n} + 1) e^{-\sqrt{n}}.$$

3. La fonction $[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [k, k+1], \quad e^{-\sqrt{k+1}} \leq e^{-\sqrt{t}} \leq e^{-\sqrt{k}}$$

donc

$$e^{-\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq e^{-\sqrt{k}}.$$

On a démontré que la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ était convergente, tout comme l'intégrale généralisée $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$.

On peut donc sommer l'encadrement précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k+1}} \leq \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = I_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} = R_{n-1}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} \leq R_n \leq I_n.$$

• D'après l'expression calculée ci-dessus,

$$I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} e^{-\sqrt{n}}.$$

4. Avec le développement limité à l'ordre deux de $\ln(1+h)$, on trouve que

$$u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_k}{\sqrt{e}}.$$

Or $\sum v_k$ est une série convergente de terme général positif, donc la série $\sum u_k$ est (absolument) convergente et

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{\sqrt{e}} = \frac{R_n}{\sqrt{e}}$$

d'après le Théorème de sommation des relations de comparaison.

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ en posant $T(f)(0) = f(0)$ et

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad x[T(f)]'(x) + T(f)(x) = f(x).$$

2. Démontrer que $T(f)$ est continue en 0. En déduire que T est bien un endomorphisme de E .

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T .

3.a. Démontrer que $\lambda \neq 0$.

3.b. Démontrer qu'un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ est une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} y(x)$$

En déduire que le spectre de T est contenu dans $]0, 1]$.

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x \neq 0, \quad [T(f)]'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{-T(f)(x) + f(x)}{x}.$$

2. On recommence avec le Théorème fondamental!
En notant F , une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \neq 0, \quad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Comme F est une primitive de f , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0) = T(f)(0),$$

ce qui prouve que $T(f)$ est continue en 0.

• On a déjà démontré que $T(f)$ était continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $T(f)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et T est bien une application de E dans E .

• La linéarité de l'intégrale permet de vérifier facilement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

quelles que soient les fonctions f et g dans E . Par conséquent, T est bien un endomorphisme de E .

3.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de T . Il existe donc une fonction $f \in E$ non identiquement nulle telle que $T(f) = \lambda f$. D'après la première question,

$$\forall x \neq 0, \quad \lambda x f'(x) + \lambda f(x) = f(x). \quad (*)$$

Si $\lambda = 0$, alors f doit être identiquement nulle sur $\mathbb{R}^*$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il faudrait que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$: c'est impossible par définition des vecteurs propres.

Donc 0 n'est pas valeur propre de T et l'application linéaire T est injective.

3.b. On reprend les calculs précédents. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle $(*)$ donne :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} \cdot f(x) = a \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{a}{x} y(x)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = Kx^a$ pour tout $x > 0$. On impose ici $f \in E$, donc il faut que f ait une limite finie au voisinage de 0 et donc que $a \in \mathbb{R}_+$.

L'étude du signe de $a = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ montre que : si λ est une valeur propre de T , alors $0 < \lambda \leq 1$.

✎ Il est facile de vérifier la réciproque : pour tout réel $0 < \lambda \leq 1$, le paramètre $\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ est positif et on déduit de l'équation différentielle $(\star)$ que f est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ si, et seulement si, il existe deux constantes K_+ et K_- telles que

$$\forall x \leq 0, \quad f(x) = K_- |x|^\alpha \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad f(x) = K_+ x^\alpha.$$

La continuité de f n'impose aucune contrainte sur les constantes K_- et K_+ , donc le sous-espace propre de T associé à λ est un plan.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k \theta \, d\theta$$

et pour tout $x \in]0, 1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}}.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale I_k et vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} I_k.$$

Exprimer I_{2k} à l'aide de factorielles.

2. Donner, sous forme simplifiée, le développement en série entière de

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}}.$$

3. Justifier l'existence de $f(x)$ et démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \binom{2k}{k}^2 x^{2k}.$$

4. Démontrer que f admet une limite ℓ , finie ou infinie, au voisinage de -1 . Calculer cette limite.

1. La fonction $\left[\theta \mapsto \sin^k \theta \right]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale I_k est bien définie.

• Une intégration par parties montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+2} = (k+1)(I_k - I_{k+2})$$

et on en déduit la relation de récurrence entre I_k et I_{k+2} .

• Qui ne connaît pas l'intégration par parties des intégrales de Wallis ?

• On en déduit (par récurrence) que

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot I_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

• Cette transformation aussi est très classique et doit être connue comme si c'était du cours.

2. Le cours nous donne le développement en série entière de $(1+u)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha = -1/2$ en particulier,

$$\begin{aligned} \forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot (-u)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(-3) \cdots (-2n+1)}{2 \cdot 2 \cdots 2} \cdot \frac{(-u)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \cdot u^n. \end{aligned}$$

3. Pour $|x| < 1$, on a $0 \leq x^2 \sin^2 \theta \leq x^2 < 1$, donc la fonction

$$\left[\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

• La fonction $[u \mapsto (1-u)^{-1/2}]$ est développable en série entière et son rayon de convergence est égal à 1. Pour $\theta \in [0, \pi/2]$, la variable $u = x^2 \sin^2 \theta$ reste dans le segment $[0, x^2] \subset]-1, 1[$, donc

$$\sum \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (x^2 \sin^2 \theta)^n$$

est une série de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ qui converge normalement sur ce segment. Par conséquent, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (x^2 \sin^2 \theta)^n d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} I_{2n} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n}. \end{aligned}$$

✎ Pour la convergence normale en fonction de θ , on cherche un majorant indépendant de θ . Ici, le réel x est fixé (c'est un simple paramètre, ce n'est pas la variable d'intégration), donc on ne cherche pas un majorant indépendant de x .

(Heureusement, car on n'en trouverait pas.)

4. La fonction f est clairement paire, donc nous allons travailler au voisinage de 1.

• Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

est croissante sur $[0, 1[$. Par positivité de l'intégrale, la fonction f est aussi croissante sur $[0, 1[$.

Elle admet donc une limite, finie ou infinie, au voisinage de 1.

• D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

ce qui prouve que la série

$$\sum \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2$$

est divergente. Comme il s'agit d'une série de terme général positif, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Fixons $A > 0$ (arbitrairement grand). Il existe donc un rang $N_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq A.$$

✎ Pour une série convergente de terme général positif, la somme majore toutes les sommes partielles.

Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n} \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n}$$

On a justifié que $f(x)$ tendait vers $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers 1 et le second membre, fonction polynomiale de x , est continu en $x = 1$. On peut donc faire tendre x vers 1 et en déduire que

$$\ell \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq A.$$

On a ainsi démontré que, pour tout $A > 0$, la limite ℓ est supérieure à A , donc $\ell = +\infty$.

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

⚠ Les théorèmes de cours qui justifient un passage à la limite terme à terme ne s'appliquent qu'à des fonctions qui ont des limites finies : aucun d'eux ne peut donc s'appliquer ici.

⚠ On peut adapter cette démonstration au cas plus général suivant.

- On suppose que les fonctions u_n sont croissantes et positives sur $[a, b[$;
- que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b[$ vers une somme notée f ;
- que chaque fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de b ;
- et que la série $\sum \ell_n$ est divergente.

Alors la somme f de la série de fonctions tend vers $+\infty$ au voisinage de b .

La démonstration repose sur les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sup_{a \leq x < b} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n u_k(x) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a \leq x < b} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow b} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

(étude de la fonction Γ) et que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$

1. Étudier les variations de $S(x) = (1+x)e^{-x}$ pour $x \geq 1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 1, \quad S(x)^n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt = 0.$$

3. Démontrer que

$$\forall x \geq -1, \quad \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

5. En effectuant le changement de variable

$$u = (t-n)/\sqrt{n}$$

dans l'intégrale I_n , démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du = \sqrt{2\pi}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

1. Il est clair que l'application S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\forall x \geq 1, \quad S'(x) = -xe^{-x} < 0.$$

Par conséquent,

$$\forall x \geq 1, \quad 0 < S(x) \leq S(1) = 2e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 1, \forall n \geq 2, \quad 0 < [S(x)]^n \leq [S(x)]^{n-1} \cdot S(x) \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. La fonction intégrande est le produit d'une application polynomiale par e^{-t} , donc elle est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente,

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} e^{-t} = \left[\left(1 + \frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\right]^n = [S(t/n)]^n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(t/n).$$

Le changement de variable affine $u = t/n$ montre que

$$\int_n^{+\infty} S(t/n) dt = n \int_1^{+\infty} S(u) du$$

(où l'intégrale est un réel positif, puisque S est une fonction intégrable et positive). Par conséquent,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(t/n) dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} \cdot n \int_1^{+\infty} S(u) du$$

et comme $0 < 2/e < 1$, on en déduit par croissances comparées (de $\sqrt{n}$, n et q^n) que le majorant tend vers 0.

On a démontré par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt = 0$$

(et on n'a pas encore compris ce que venait faire ici ce facteur $1/\sqrt{n}$).

3. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cdot f_4(t) dt$$

où

$$\forall t > -1, \quad f_4(t) = \frac{d^4}{dt^4} \ln(1+t) = \frac{-6}{(1+t)^4} < 0.$$

On en déduit que l'intégrale est négative pour tout $x > -1$ (en discutant sur le signe de x pour tenir compte de l'ordre des bornes de cette intégrale) et donc que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. On devine qu'il s'agit d'appliquer le Théorème de convergence dominée : nous allons définir une suite de fonctions avec un peu d'astuce, afin de considérer une suite d'intégrales pour lesquelles l'intervalle d'intégration est toujours le même (= indépendant de n).

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} \times \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]}(x).$$

Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit d'une fonction continue [polynomiale!] par l'indicatrice d'un intervalle) et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car nulle au voisinage de $\pm\infty$) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} dx.$$

• On vérifie sans peine que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction célèbre.

D'une part,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} &= \exp\left[-\sqrt{n}x + n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] = \exp\left[-\sqrt{n}x + \sqrt{n}x - \frac{x^2}{2} + o(1)\right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-x^2/2) \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \exp(-x^2/2).$$

• Il reste à vérifier la condition de domination. *Ouvrez grand les yeux!*

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente,

$$\forall x > -\sqrt{n}, \quad n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\sqrt{n}}$$

et donc

$$\forall x > -\sqrt{n}, \quad 0 < \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right).$$

En particulier,

$$\forall x \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad 0 < \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{3}\right)$$

puisque

$$\forall |x| \leq \sqrt{n}, \quad \frac{|x|^3}{3\sqrt{n}} \leq \frac{x^2}{3}.$$

Comme f_n est identiquement nulle hors de l'intervalle $]-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq \exp\left(\frac{-x^2}{6}\right).$$

On a trouvé un majorant indépendant de n et, en tant que fonction de x , intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la condition de domination est remplie.

• D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

5. On effectue, comme le suggère l'énoncé, le changement de variable affine $t = n + \sqrt{n}u$ dans l'intégrale I_n :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + \sqrt{n}u)^n e^{-n - \sqrt{n}u} du = \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du.$$

Or $I_n = n!$ et d'après la Formule de Stirling,

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit, par unicité de la limite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du = \sqrt{2\pi}.$$

• D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du.$$

Avec le changement de variable $t = \sqrt{n}u$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(1)$$

d'après [2]. Ainsi, d'après [4],

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Par unicité de la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On étudie

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En déduire un équivalent de F au voisinage de 0.

1. Posons $I = [0, +\infty[$ et $\Omega =]0, +\infty[$, ainsi que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

• Soit $x \in \Omega$ (fixé). Il est clair que la fonction

$$[t \mapsto \varphi(t, x)]$$

est continue sur l'intervalle I . Il est clair que

$$\varphi(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable sur I .

Par conséquent, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I et la fonction F est donc bien définie sur Ω .

2. Soient $0 < x < y$. Pour tout $t \in I$, il est clair que $t \geq 0$ et donc que

$$0 \leq \frac{e^{-yt}}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant bornes croissantes (pour $t \in I$), on en déduit que

$$0 \leq F(y) \leq F(x),$$

ce qui prouve que F est positive et décroissante sur Ω .

• En particulier, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$. Il reste à déterminer la valeur de cette limite (positive).

Il est clair que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}$$

et comme $x > 0$, on en déduit par intégration bornes croissantes que

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

▮ Variante

On sait que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I .

Il est clair que, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = 0.$$

(C'est faux pour $t = 0$, mais c'est sans importance.)

Enfin, il est tout aussi clair que

$$\forall x \geq 1, \forall t \in]0, +\infty[, \quad |\varphi(t, x)| \leq e^{-t}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t : la condition de domination est donc vérifiée pour $x \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) dt = 0.$$

3. Régularité — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = \frac{-te^{-xt}}{1+t}.$$

Intégrabilité — On a justifié plus haut que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur I .

De même, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right]$$

est continue sur I et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-xt}.$$

Comme $x > 0$, on en déduit que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right]$$

est intégrable sur I .

Domination — Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Alors

$$\forall (t, x) \in I \times \mathcal{V}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right| \leq e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t , donc la condition de domination est satisfaite.

D'après le Théorème de Leibniz sur les intégrales fonctions d'un paramètre, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ pour tout $a > 0$ (et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω) et

$$\forall a > 0, \forall x > a, \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t} dt.$$

• On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

et donc que

$$\forall x \in \Omega, \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}.$$

On a démontré que la fonction F était de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

• HR : Supposons que F soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur Ω . La relation précédente nous dit alors que F' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur Ω et donc que F est en fait de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur Ω .

On a ainsi démontré par récurrence que F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur Ω pour tout $n \geq 1$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4. Commençons par remarquer que

$$\forall x \in \Omega, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)+x}}{1+t} dt = e^x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t} dt.$$

Posons alors $u = x(1+t)$ (changement de variable affine avec $du = x dt$, licite car $x > 0$). On a donc

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t}$$

(si tant est qu'une telle égalité ait vraiment un sens mathématique!) et on en déduit que

$$\forall x \in \Omega, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

🔗 Cette nouvelle expression de $F(x)$ permet de prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω en appliquant le Théorème fondamental seulement (sans avoir à justifier l'application du Théorème de dérivation comme on l'a fait plus haut).

• Il est clair que

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

et que la fonction $[u \mapsto 1/u]$ est positive et **non** intégrable au voisinage de 0. D'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{u} du = -\ln x.$$

🔗 On aura remarqué qu'il s'agit ici d'infiniment grands.

D'après la relation de Chasles, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{\text{Cte}}$$

et d'après l'équivalent précédent,

$$F(x) = \underbrace{e^x}_{\sim 1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.$$

• En particulier, la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $(x, y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$f(x, y) = \varphi(y/x).$$

1. Démontrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.
3. Calculer le laplacien de f .
4. On suppose que f est harmonique sur $\mathcal{U}$ (soit $\Delta f(M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{U}$). Que dire de φ ?

1. L'ensemble $\mathcal{U}$ est le complémentaire de la droite vectorielle $[x = 0]$. Un sous-espace de dimension finie est toujours fermé, donc $\mathcal{U}$ est ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

Variantes

• Si une suite $u_n = (x_n, y_n)$ de points dans $\mathcal{U}^c$ converge vers un point $\ell = (\ell_x, \ell_y)$, alors en particulier y_n converge vers ℓ_y . Or $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par définition de $\mathcal{U}^c$), donc $\ell_y = 0$ et par conséquent $\ell \in \mathcal{U}^c$. Ainsi, la partie $\mathcal{U}^c$ est fermée (car stable par passage à la limite) et son complémentaire $\mathcal{U}$ est donc ouvert.

• On peut aussi interpréter $\mathcal{U}$ comme l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application

$$\pi = [(x, y) \mapsto x] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est ouvert (en tant qu'union de deux ouverts de $\mathbb{R}$) et l'application π est continue (application linéaire définie sur un espace de dimension finie), donc $\mathcal{U}$ est ouvert (image réciproque d'un ouvert par une application continue).

Autre variante

On peut aussi représenter graphiquement $\mathcal{U}$ (c'est le complémentaire de l'axe des ordonnées) et constater l'évidence : on voit bien que $\mathcal{U}$ est un voisinage de chacun de ses points (à montrer sur la figure!).

2. Analysons la définition de f :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

la fonction f est la composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathcal{U}$ par la fonction φ : c'est donc la composée d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ par une application de classe $\mathcal{C}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.

3. On applique la formule de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) & \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

et par conséquent

$$\Delta f(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2 + y^2}{x^4} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

pour tout $M = (x, y) \in \mathcal{U}$.

La règle de la chaîne est inutile ici, car la fonction φ est une fonction d'une seule variable réelle.

4. Sur $\mathcal{U}$, on a toujours $x \neq 0$, donc f est harmonique si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad x^2 \Delta f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot f''\left(\frac{y}{x}\right) + 2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right) \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Comme l'application $(x, y) \mapsto y/x$ est surjective de U dans $\mathbb{R}$, on en déduit que f est harmonique sur U si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1 + t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0. \quad (E)$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre en φ' , donc sa résolution se fait en deux étapes.

L'application φ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} t.$$

Par conséquent, la fonction $f(x, y) = \varphi(y/x)$ est harmonique sur U si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Calculer la probabilité pour que X soit paire et la probabilité pour que X soit un multiple de 3.

2. Ces événements sont-ils indépendants ?

1. Comme X est, par hypothèse, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, [X = n] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 2k] \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 3k]$$

sont deux événements (= des éléments de la tribu $\mathcal{A}$).

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = p(1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}, \\ \mathbf{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} = p(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}. \end{aligned}$$

2. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, X est simultanément multiple de 2 et multiple de 3 si, et seulement si, X est multiple de 6 :

$$A \cap B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 6k]$$

et, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 6k) = p(1-p)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^6}.$$

Or

$$1 - q^6 = (1 - q^3)(1 + q^3) = (1 - q^3)(1 + q)(1 - q + q^2).$$

 C'est toujours utile de bien connaître les racines sixièmes de l'unité...

Donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{(1-p)^5}{(3-3p+p^2)(2-p)(1-p+p^2)} = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \cdot \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}.$$

Comme $(1-p)^2 = 1-2p+p^2 \neq 1-p+p^2$ pour tout $p \in]0, 1[$, on en déduit que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ et donc que ces deux événements ne sont pas indépendants.