Soient I*, un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*;* f *et* g*, deux fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *dont l'ensemble des points de continuité est dense dans* I*. Démontrer que* f *et* g *ont un point de continuité commun.*

Étrange...

❧ Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = 1/q$ si x est un rationnel dont l'écriture irréductible est p/q. L'ensemble des points de continuité de f est exactement $\mathbb{Q}$, qui est bien dense dans $I = \mathbb{R}$.

❧ Considérons maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x - \pi)$. La fonction g est continue au point x si, et seulement si, $x - \pi$ est rationnel, donc l'ensemble des points de continuité de g est $\pi + \mathbb{Q}$, qui est bien dense dans $\mathbb{R}$.

❧ Mais il me semble bien que $\mathbb{Q}$ et $\pi + \mathbb{Q}$ sont disjoints...

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\quad \Delta(M) = AM + MB.$$

1. *On suppose que A et B sont diagonalisables. Démontrer que Δ est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.*

2. *On suppose que A et B sont nilpotentes. Démontrer que Δ est nilpotente et exprimer l'indice de nilpotence de Δ en fonction des indices de nilpotence d_A et d_B de A et de B.*

1. Commençons en traitant le cas où les deux matrices sont diagonales :

$$A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad B = \mathrm{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

On rappelle qu'on peut exprimer les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ au moyen des colonnes E_i de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n,\quad E_{i,j} = E_i.E_j^\top,$$

ce qui donne

$$AE_{i,j} = (AE_i).E_j^\top = (\alpha_i E_i).E_j^\top = \alpha_i E_{i,j}$$

et d'autre part

$$E_{i,j}B = E_i.(E_j^\top.B) = E_i(B^\top.E_j)^\top = E_i.(\beta_j E_j)^\top = \beta_j.E_i.E_j^\top = \beta_j.E_{i,j}.$$

Quels que soient $1 \leqslant i,j \leqslant n$,

$$\Delta(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}B = \alpha_i E_{i,j} + E_{i,j}\beta_j = (\alpha_i + \beta_j)E_{i,j}.$$

Dans ces conditions, la base canonique est constituée de vecteurs propres.

❧ Par hypothèse, il existe deux matrices diagonales D_1 et D_2 et deux matrices inversibles P et Q telles que

$$P^{-1}AP = D_1 \quad \text{et} \quad Q^{-1}BQ = D_2.$$

On en déduit que $A = PD_1P^{-1}$ et $B = QD_2Q^{-1}$, d'où

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\quad \Delta(M) = P\big(D_1(P^{-1}MQ) + (P^{-1}MQ)D_2\big)Q^{-1}.$$

En posant

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad M_{i,j} = PE_{i,j}Q^{-1},$$

on déduit des calculs préliminaires que

$$\Delta(M_{i,j}) = P\big((\alpha_i + \beta_j)E_{i,j}\big)Q^{-1} = (\alpha_i + \beta_j)M_{i,j}.$$

La famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (image de la base canonique par l'automorphisme $\left[X \mapsto PXQ^{-1}\right]$) et tous ses vecteurs sont des vecteurs propres, donc l'endomorphisme Δ est diagonalisable et

$$\mathrm{Sp}(\Delta) = \big\{\alpha_i + \beta_j,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\big\}.$$

✍ *La démonstration n'est pas spécialement plus simple si on suppose que les matrices A et B commutent.*

On sait, dans ce cas, que les deux matrices admettent une base commune de vecteurs propres et qu'il existe donc une matrice inversible P telle que les deux matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

On a donc $AP = D_1P$ et $P^{-1}B = P^{-1}D_2$: les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de P sont des vecteurs propres de A et les lignes $L_1, \dots, L_n$ de P^{-1} sont des co-vecteurs propres de B. En posant

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad M_{i,j} = C_jL_i,$$

on a donc

$$AM_{i,j} = \alpha_j C_jL_i = \alpha_j M_{i,j} \quad \text{et} \quad M_{i,j}B = \beta_i C_jL_i = \beta_j M_{i,j}$$

d'où $\Delta(M_{i,j}) = (\alpha_j + \beta_i)M_{i,j}$. Il reste à vérifier que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Delta^m(M) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k M B^{m-k}.$$

L'égalité est claire pour $m = 1$. Si elle est vraie pour un entier $m \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+1}(M) &= A.\Delta^m(M) + \Delta^m(M).B \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{k+1} M B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k M B^{(m+1)-k} \\
&= A^{m+1}M + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] A^k M B^{(m+1)-k} + M B^{m+1} \\
&= A^{m+1}M + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} A^k M B^{(m+1)-k} \qquad \text{(triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} A^k M B^{(m+1)-k}.
\end{aligned}$$

✍ *Par définition de l'indice de nilpotence,*

$$\forall\, k < d_A, \quad A^k \neq 0_n \qquad \textit{et} \qquad \forall\, k \geqslant d_A, \quad A^k = 0_n.$$

❧ Par hypothèse, $A^k = 0_n$ pour tout $k \geqslant d_A$ et $B^\ell = 0_n$ pour tout $\ell \geqslant d_B$. De ce fait, si $m \geqslant d_A + d_B - 1$ et si $0 \leqslant k \leqslant m$, alors

— ou bien $k \geqslant d_A$ et dans ce cas,

$$A^k M B^{m-k} = 0_n M B^{m-k} = 0_n$$

— ou bien $k < d_A$ et dans ce cas, $\ell = (m-k) > (d_A + d_B - 1) - d_A = d_B - 1$, donc $\ell \geqslant d_B$ (inégalité stricte entre deux entiers !) et

$$A^k M B^{m-k} = A^k M 0_n = 0_n.$$

On en déduit que $\Delta^m(M) = (n+1) \cdot 0_n = 0_n$.

On a ainsi démontré que Δ était nilpotente et que son indice de nilpotence était inférieur à $d_A + d_B - 1$.

✍ *Si les matrices A et B sont distinctes de la matrice nulle, alors il existe une matrice M telle que $AMB \neq 0_n$.*

En effet, il existe deux indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$ tels que $a_{i,j} \neq 0$ et deux indices $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$ tels que $b_{k,\ell} \neq 0$. Dans ces conditions, le produit $a_{i,j} b_{k,\ell}$ est non nul (produit dans le corps $\mathbb{K}$) et par conséquent

$$AE_{j,k}B = (AE_j).(E_k^\top.B) = (a_{i,j}E_i).({}^\top b_{k,\ell}E_\ell) = a_{i,j}b_{k,\ell}E_{i,\ell} \neq 0_n.$$

❧ Considérons maintenant l'exposant $m = d_A + d_B - 2$. Pour $0 \leqslant k \leqslant m$, on distingue maintenant trois cas.

— Si $k \geqslant d_A$, alors $A^k M B^{m-k} = 0_n$.

— Si $k < d_A - 1$, alors $k \leqslant d_A - 2$ (inégalité entre entiers), donc $\ell = m - k \geqslant (d_A + d_B - 2) - (d_A - 2) = d_B$ et $A^k M B^{m-k} = 0_n$.

— Si $k = d_A - 1$, alors $\ell = m - k = d_B - 1$ et dans ce cas, $A^k \neq 0_n$ et $B^{m-k} \neq 0_n$; comme on l'a vu plus haut, il existe alors une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^k M B^{m-k} \neq 0_n$.

Cela prouve qu'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\Delta^m(M) \neq 0_n$ (somme de m matrices nulles et d'une matrice non nulle) et donc que Δ^m n'est pas l'endomorphisme nul.

L'indice de nilpotence de Δ est donc égal à $(d_A + d_B - 1)$.

On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par

$$\forall\, A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

1. *Démontrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$\big(\exists\, U \in O_n(\mathbb{R}), \quad N(A-U) \leqslant \varepsilon\big) \implies A \in GL_n(\mathbb{R}).$$

On précisera une valeur convenable de cet ε.

2. *Cette propriété est-elle encore vraie si on remplace le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ par le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$?*

1. On vérifie sans peine que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad N(AB) \leqslant nN(A)N(B). \tag{1}$$

On en déduit (par récurrence) que

$$N(A^k) \leqslant n^{k-1}N(A)^k \leqslant [nN(A)]^k.$$

Par conséquent, si $N(A) < 1/n$, alors la série de matrices $\sum A^k$ est absolument convergente. Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, la série $\sum A^k$ est convergente et il existe donc une matrice $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = \lim_{q\to+\infty} \sum_{k=0}^{q} A^k.$$

Il est clair que

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \Big(\sum_{k=0}^{q} A^k\Big) \times (I_n - A) = (I_n - A) \times \Big(\sum_{k=0}^{q} A^k\Big) = I_n - A^{q+1}.$$

✍ *Toute application linéaire définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, est continue.*

Puisque $N(A^{q+1})$ tend vers 0 lorsque q tend vers $+\infty$ et que les applications

$$[M \mapsto M \times (I_n - A)] \quad \text{et} \quad [M \mapsto (I_n - A) \times M]$$

sont continues, on en déduit que

$$S \times (I_n - A) = (I_n - A) \times S = I_n.$$

Autrement dit, la matrice $(I_n - A)$ est inversible et la matrice S est son inverse.

On a ainsi démontré que, pour toute matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, si la norme $N(B - I_n)$ est strictement inférieure à $1/n$, alors la matrice $B = I_n - (I_n - B)$ est inversible.

✍ *Si on n'avait pas eu besoin d'expliciter une valeur convenable de ε dans la suite, on aurait pu se contenter de remarquer que $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ était une partie ouverte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ — en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par l'application continue* det.

❧ Considérons maintenant un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$ (le groupe orthogonal ou un autre).
Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in G$. Comme U est inversible, $A - U = (AU^{-1} - I_n)U$ et donc

$$(AU^{-1} - I_n) = (A - U)U^{-1}.$$

D'après (1),

$$N(AU^{-1} - I_n) \leqslant nN(U^{-1}).N(A - U). \tag{2}$$

Comme G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, il ne contient pas la matrice nulle et :

$$\Omega \overset{\text{déf.}}{=} \big\{N(U^{-1}), \quad U \in G\big\} = \big\{N(U), \quad U \in G\big\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

✍ *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En effet,*

— *c'est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du singleton $\{I_n\}$ par l'application continue $\big[M \mapsto M^\top.M\big]$;*
— *c'est une partie bornée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ puisque la relation $M^\top.M = I_n$ implique en particulier que $N(M) \leqslant 1$ (car $|m_{i,j}| \leqslant 1$, quels que soient i et j) ;*
— *l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension finie.*

❧ Le sous-groupe $G = O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $N : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application continue, elle atteint un maximum M_0 sur G et comme cette application ne s'annule pas :

$$\forall\, U \in O_n(\mathbb{R}), \qquad 0 < N(U^{-1}) \leqslant M_0.$$

Posons maintenant

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{M_0.n^2}$$

et considérons une matrice orthogonale U telle que $N(A - U) \leqslant \varepsilon$. D'après (2),

$$N(AU^{-1} - I_n) \leqslant nM_0.N(A - U) \leqslant nM_0\varepsilon < \frac{1}{n},$$

ce qui prouve, comme on l'a vu en commençant, que la matrice AU^{-1} est inversible. Par conséquent, $A = (AU^{-1}).U$ est inversible.

2. On considère maintenant le cas du groupe $G = SL_n(\mathbb{R})$.

✍ *Le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(R)$, en tant qu'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application continue* det, *mais si $n \geqslant 2$, ce n'est pas une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, puisqu'elle n'est pas bornée :*

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad D_t = \mathrm{Diag}(t, 1/t, 1, \dots, 1) \in SL_n(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad N(D_t) = t.$$

(Bien entendu, pour $n = 1$, $SL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$ est une partie compacte.)

❧ Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, la condition $N(A - U) \leqslant 1$ implique $N(U) \leqslant 1 + N(A)$ (inégalité triangulaire). Par conséquent, on s'intéresse cette fois à l'ensemble

$$\Omega_A = \big\{N(U^{-1}), \quad U \in G \quad \text{et} \quad N(U) \leqslant 1 + N(A)\big\}.$$

✍ *Dans un espace vectoriel normé, l'intersection d'une partie fermée et d'une partie compacte est une partie compacte.*

Comme $G = SL_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'intersection

$$SL_n(\mathbb{R}) \cap \big\{U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, N(U) \leqslant 1 + N(A)\big\}$$

est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application continue $\big[U \mapsto N(U^{-1})\big]$ atteint un maximum sur cette partie compacte. Plus précisément, il existe un réel $M_0(A)$, qui dépend a priori de la matrice A, tel que

$$\forall\, U \in SL_n(\mathbb{R}), \quad N(A - U) \leqslant 1 \implies N(U^{-1}) \leqslant M_0(A).$$

On peut alors adapter la raisonnement précédent, avec une nuance de taille : le réel ε dépend de $M_0(A)$ et donc de la matrice A choisie.

❧ Fixons $\varepsilon > 0$. La matrice

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, bien que la matrice

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

appartienne au groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{R})$ et que $N(A_\varepsilon - U_\varepsilon) = \varepsilon$.

Ce contre-exemple montre qu'il n'existe pas de réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la condition $N(A - U) \leqslant \varepsilon$ pour une matrice $U \in SL_n(\mathbb{R})$ quelconque assure l'inversibilité de A.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. Démontrer que la fonction

$$\left[z \mapsto \left|P(z)\right|\right]$$

atteint un minimum sur $\mathbb{C}$.

Le polynôme P a pour expression développée

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

avec $a_d \neq 0$. On déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
\left|P(z)\right| &= |a_d|\,|z|^d \left|1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{a_{d-k}}{z^k}\right| \\
&\geqslant |a_d|\,|z|^d \left(1 - \sum_{k=1}^{d} \frac{|a_{d-k}|}{|z|^k}\right) && \text{(pour } z \neq 0\text{)} \\
&\geqslant |a_d|\,|z|^d \left(1 - \frac{|a_0| + \cdots + |a_{d-1}|}{|z|}\right). && \text{(pour } |z| \geqslant 1\text{)}
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{z\to\infty} 1 - \frac{1}{|z|} \sum_{k=1}^{d} |a_{d-k}| = 1.$$

Il existe donc un réel $R_0 > 1$ tel que

$$\forall\, |z| \geqslant R_0, \quad \left|P(z)\right| \geqslant \frac{|a_d|\,|z|^d}{2}.$$

Comme

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|a_d|\,|z|^d}{2} = +\infty,$$

il existe un réel $R_1 \geqslant R_0$ tel que

$$\forall\, |z| \geqslant R_1, \quad \left|P(z)\right| \geqslant \left|P(0)\right|. \qquad (\star)$$

❧ L'ensemble

$$V_1 = \left\{\left|P(z)\right|,\ |z| \geqslant R_1\right\}$$

est une partie non vide et minorée (par 0 !) de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne inférieure m_1 et, d'après $(\star)$, $m_1 \geqslant \left|P(0)\right|$.

❧ L'ensemble

$$V_0 = \left\{\left|P(z)\right|,\ |z| \leqslant R_1\right\}$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

✍ *Le disque fermé $[|z| \leqslant R_1]$ est compact (partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie) et l'application $[z \mapsto |P(z)|]$ est continue (composée d'une application polynomiale par une application lipschitzienne). La partie V_0 est donc compacte en tant qu'image d'une partie compacte par une fonction continue.*

L'ensemble V_0 admet donc un plus petit élément m_0 : il existe donc $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall\, |z| \leqslant R_1, \qquad m_0 = \left|P(z_0)\right| \leqslant \left|P(z)\right|.$$

Comme $|0| \leqslant R_1$, le réel $\left|P(0)\right|$ appartient à V_0 et donc $m_0 \leqslant \left|P(0)\right|$.

❧ On a donc prouvé l'existence d'un complexe z_0 tel que

$$\forall\, |z| \leqslant R_1, \qquad \left|P(z_0)\right| \leqslant \left|P(z)\right| \leqslant \left|P(0)\right|$$

et

$$\forall\, |z| \geqslant R_1, \quad \left|P(0)\right| \leqslant m_1 \leqslant \left|P(z)\right|.$$

Par conséquent,

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad \big|P(z_0)\big| \leqslant \big|P(z)\big|.$$

La fonction $[z \mapsto |P(z)|]$ atteint donc un minimum sur $\mathbb{C}$.

✍ *On peut démontrer que ce minimum est nul et en déduire le Théorème de d'Alembert-Gauss (méthode dûe à Cauchy).*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}.$$

1. *Démontrer que $u_n = \mathcal{O}(2^{-n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
2. *Démontrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{2^n}.$$

1. On peut démontrer par récurrence que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2+0}$$

et donc (à nouveau par récurrence)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}.$$

On en déduit en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Ce qui précède conduit à introduire la suite de terme général $v_n = 2^n u_n$ pour démontrer que cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive.

D'après la relation de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \ell n\, \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\ell n\Big(1 + \frac{v_n}{2^{n+1}}\Big).$$

D'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$\ell n\, v_{n+1} - \ell n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-v_n}{2^{n+1}}$$

et le second membre est le terme général d'une série absolument convergente (dominé par le terme général de la série géométrique de raison $1/2$). Par conséquent, la série télescopique $\sum(\ell n\, v_{n+1} - \ell n\, v_n)$ est (absolument) convergente et la suite de terme général $\ell n\, v_n$ converge vers un réel ℓ.

Par continuité de la fonction exp, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\gamma = e^{\ell} > 0$.

✍ *On peut même expliciter la valeur de γ ! Au contraire de ce qu'on vient de voir, c'est une démonstration* ad hoc, *qui n'est pas susceptible de servir dans d'autres circonstances.*

❧ On a relevé plus haut la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = v_n \cdot \frac{1}{1+\frac{u_n}{2}}$$

En posant $p_{-1} = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = \prod_{k=0}^{n}\Big(1 + \frac{u_k}{2}\Big), \tag{3}$$

on a arrive (par récurrence) à l'expression suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{v_0}{p_{n-1}} = \frac{u_0}{p_{n-1}}$$

et donc à

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{u_0}{2^n p_{n-1}}. \tag{4}$$

Il reste à déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une expression explicite de la constante γ.

❧ D'après la définition (3) du produit p_n et l'expression (4) de u_n,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = p_{n-1} \cdot \Big(1 + \frac{u_n}{2}\Big) = p_{n-1} + \frac{u_0}{2^{n+1}}.$$

En reconnaissant une série télescopique et une série géométrique,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n - p_{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n - p_{n-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_0}{2^{n+1}} = u_0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = p_{-1} + u_0 = 1 + u_0$$

et finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_0}{1+u_0} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

On note a_n, le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n!$. Donner un développement asymptotique à trois termes de a_n.

Le développement décimal de l'entier x s'écrit avec $(d+1)$ chiffres si, et seulement si,

$$x = b_0 + 10b_1 + \cdots + 10^d b_d = \sum_{k=0}^{d} b_k 10^k$$

avec $0 \leqslant b_0, \dots, b_{d-1} \leqslant 9$ et $1 \leqslant b_d \leqslant 9$.

Autrement dit, le développement décimal de x s'écrit avec $(d+1)$ chiffres si, et seulement si, $10^d \leqslant x < 10^{d+1}$, c'est-à-dire

$$d \ln 10 \leqslant x < (d+1) \ln 10$$

ou encore

$$d = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \right\rfloor.$$

Par conséquent,

$$a_n = \left\lfloor \frac{\ln(n!)}{\ln 10} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n!)}{\ln 10} + \mathcal{O}(1)$$

puisque $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{=} x + \mathcal{O}(1)$ par définition de la partie entière.

On étudie donc en fait $\ln(n!)$.

❧ La comparaison classique entre somme et intégrale nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_1^n \ln t \, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \int_1^n \ln t \, dt + \ln n.$$

En calculant l'intégrale, on en déduit que

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \qquad (\star)$$

et donc que

$$a_n = \frac{\ln(n!)}{\ln 10} + \mathcal{O}(1) = \frac{n \ln n}{\ln 10} - \frac{n}{\ln 10} + \mathcal{O}(\ln n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *Nous allons préciser ce développement en reprenant l'estimation $(\star)$ d'une manière classique : la méthode qui suit est celle qui justifie l'existence de la* ***constante d'Euler****.*

Pour préciser l'estimation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = v_n + o(v_n),$$

on réécrit la différence des quantités connues comme une somme partielle :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) - v_n = \sum_{k=1}^{n} \big(u_k - (v_k - v_{k-1})\big) - v_1$$

puis on étudie la série de terme général $w_k = u_k - (v_k - v_{k-1})$.

❧ Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln k\Big) - (n \ln n - n) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \big[\ln k - (k \ln k - k) + (k-1)\ln(k-1) + 1\big] \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big[1 + (k-1)\ln\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\Big].\end{aligned}$$

On vérifie rapidement que

$$w_k = 1 + (k-1)\ln\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{2k} + z_k \qquad \text{avec} \qquad z_k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big). \qquad (\dagger)$$

❧ **Version simple**

On a démontré que $w_k \sim {}^1\!/_{2k}$ lorsque k tend vers $+\infty$. Or ${}^1\!/_{2k}$ est positif pour tout $k \geqslant 1$, donc w_k est positif pour k assez grand et comme la série harmonique est divergente, les sommes partielles sont équivantes :

$$\sum_{k=2}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k}.$$

On sait bien que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell n\, n$$

et on peut conclure :

$$\ell n(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\ell n\, n - n + \frac{\ell n\, n}{2} + o(\ell n\, n).$$

❧ **Version savante**

On connaît l'histoire de la constante d'Euler et on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ell n\, n + \gamma + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

D'autre part, on a vu (†) que la série $\sum z_k$ était absolument convergente et que, en notant S la somme de cette série,

$$S - \sum_{k=2}^{n} z_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big) = \mathcal{O}({}^1\!/_n).$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=2}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ell n\, n}{2} + C + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Finalement, il existe une constante K telle que

$$\ell n(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\,\ell n\, n - n + \frac{\ell n\, n}{2} + K + o({}^1\!/_n).$$

✍ *Pour retrouver l'**équivalent de Stirling**, il reste à démontrer que* $K = \ell n\sqrt{2\pi}$ *(ce qui se déduit des **intégrales de Wallis**).*

Soit $k \in \mathbb{N}$. *Démontrer que*

$$I_k = \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4-x^2}\,dx$$

est un multiple entier de π.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k = \left[x \mapsto x^k\sqrt{4-x^2}\right]$ est continue sur le segment $[-2,2]$, donc l'intégrale est bien définie.

❧ La fonction f_k a même parité que l'entier k et l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0.

Pour tout entier <u>impair</u> k, on a donc $I_k = 0$ et le résultat est démontré dans ce cas.

❧ On suppose dorénavant que l'entier k est pair : il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$ et, par parité,

$$I_k = 2\int_0^2 f_k(x)\,dx.$$

Si $x = 2\sin t$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, alors $4-x^2 = (2\cos t)^2$ et comme $\cos t \geqslant 0$ (puisque $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$), on a

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos t.$$

Le changement de variable $x = \sin t$ (avec $dx = 2\cos t\,dt$) nous donne alors

$$\begin{aligned} I_{2p} &= 2\int_0^{\pi/2} (2\sin t)^{2p}(2\cos t)\cdot(2\cos t\,dt) = 2.4^{p+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2p} t[1-\sin^2 t]\,dt \\ &= 2.4^{p+1}[W_{2p} - W_{2p+2}] \end{aligned}$$

où on reconnaît les intégrales de Wallis :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad W_{2p} = \int_0^{\pi/2}\sin^{2p} t\,dt.$$

✍ *On doit, sinon connaître par cœur, savoir retrouver rapidement la relation de récurrence :*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad (2p+1)W_{2p} = (2p+2)W_{2p+2}$$

qui permet de trouver l'expression explicite de ces intégrales :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad W_{2p} = \frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{2.4^{p+1}}{2p+1}\cdot W_{2p+2} = \frac{4^{p+1}}{p+1}\cdot W_{2p} = \frac{1}{p+1}\cdot\binom{2p}{p}\cdot 2\pi.$$

En particulier, $I_0 = 2\pi$ (ce qui est conforme au résultat attendu) et, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\binom{2p}{p} = \frac{(2p)\cdots(p+1)}{p!} = \frac{(2p)\cdots(p+2)}{(p-1)!}\cdot\frac{p+1}{p} = \binom{2p}{p-1}\cdot\frac{p+1}{p} \in \mathbb{N}.$$

Cette relation nous dit que l'entier p est un diviseur du produit $(p+1)\times\binom{2p}{p-1}$, alors que p et $(p+1)$ sont premiers entre eux.

✍ *Il est clair que* $(p+1)-p = 1$ *et on conclut avec le Théorème de Bézout !*

D'après le Théorème de Gauss, l'entier p est un diviseur de $\binom{2p}{p-1}$: il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{2p}{p-1} = qp$ et donc tel que

$$I_{2p} = \frac{1}{p+1}\cdot\binom{2p}{p}\cdot 2\pi = \frac{1}{p+1}\cdot\binom{2p}{p-1}\cdot\frac{p+1}{p}\cdot 2\pi = q\times 2\pi.$$

❧ On a ainsi démontré que I_k était un multiple entier de 2π pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n, le produit des chiffres qui figurent dans la représentation décimale de n. Par exemple,

$$p_{10} = p_{405} = 0, \quad p_{45} = 20...$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum p_n z^n.$$

✍ *On rappelle que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n z^n$ est égal à R si, et seulement si, la suite $(p_n x^n)$ est bornée pour tout $0 \leqslant x < R$ et n'est bornée pour aucun $x > R$.*

❧ Pour tout $d \in \mathbb{N}$,

$$m_d \overset{\text{déf.}}{=} 1 \cdots 1 = \sum_{k=0}^{d} 10^k,$$

et donc $p_{m_d} = 1$. Par conséquent, pour $x > 1$,

$$\lim_{d \to +\infty} p_{m_d} x^{m_d} = +\infty,$$

donc la suite de terme général $p_n x^n$ n'est pas bornée et $R \leqslant 1$.

❧ Si

$$n = a_d \cdot 10^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \cdot 10^k \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0,$$

alors

$$p_n = \prod_{k=0}^{d} a_k = a_d \times \prod_{0 \leqslant k < d} a_k \quad \text{avec} \quad \forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant 9.$$

Par conséquent,

$$0 \leqslant p_n < a_d \cdot 10^d \leqslant n.$$

Pour $|x| < 1$, la suite $(nx^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc la suite $(p_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $R \geqslant 1$.

❧ Le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n z^n$ est donc égal à 1.

Soit X, une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont le support est fini.

1. *On appelle **médiane** de X tout réel μ tel que*

$$\mathbf{P}(X \leqslant \mu) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geqslant \mu) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Démontrer l'existence d'une médiane. Y a-t-il unicité de la médiane ?

2. *Pour quels réels t l'espérance $\mathbf{E}[(X-t)^2]$ est-elle minimale ?*

3. *Pour quels réels t l'espérance $\mathbf{E}[|X-t|]$ est-elle minimale ?*

✍ *Il n'est pas vraiment nécessaire ici de connaître la **fonction de répartition** F de la variable aléatoire X, définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

mais ça peut donner des pistes...

Il est donc utile de savoir que la fonction F est croissante, qu'elle tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et vers 1 au voisinage de $+\infty$ et qu'elle est continue à droite en tout point avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = F(x^-) + \mathbf{P}(X = x).$$

1. Notons $x_1 < \cdots < x_n$, les points du support de X :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) = 1 \quad \text{avec} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = x_k) > 0.$$

✍ *Quelques propriétés de la fonction de répartition pour éclairer la discussion qui va suivre.*

❧ *Si μ est un point du support, alors il existe $1 \leqslant r \leqslant n$ tel que $\mu = x_r$ et par conséquent*

$$\mathbf{P}(X \leqslant \mu) = \mathbf{P}\big(X \in]-\infty, x_r]\big) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k),$$
$$\mathbf{P}(X \geqslant \mu) = \mathbf{P}\big(X \in [x_r, +\infty[\big) = \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}(X = x_k).$$

❧ *Sinon, il existe un entier $0 \leqslant r \leqslant n+1$ tel que $x_r < \mu < x_{r+1}$ (en convenant que $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$). Dans ce cas, $\mathbf{P}(x_r < X < x_{r+1}) = 0$, donc $\mathbf{P}(X \in]x_r, \mu]) = \mathbf{P}(X \in [\mu, x_{r+1}[) = 0$ et*

$$\mathbf{P}(X \leqslant \mu) = \mathbf{P}\big(X \in]-\infty, x_r] \sqcup]x_r, \mu]\big) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k),$$
$$\mathbf{P}(X \geqslant \mu) = \mathbf{P}\big(X \in [\mu, x_{r+1}[\sqcup [x_{r+1}, +\infty[\big) = \sum_{k=r+1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k).$$

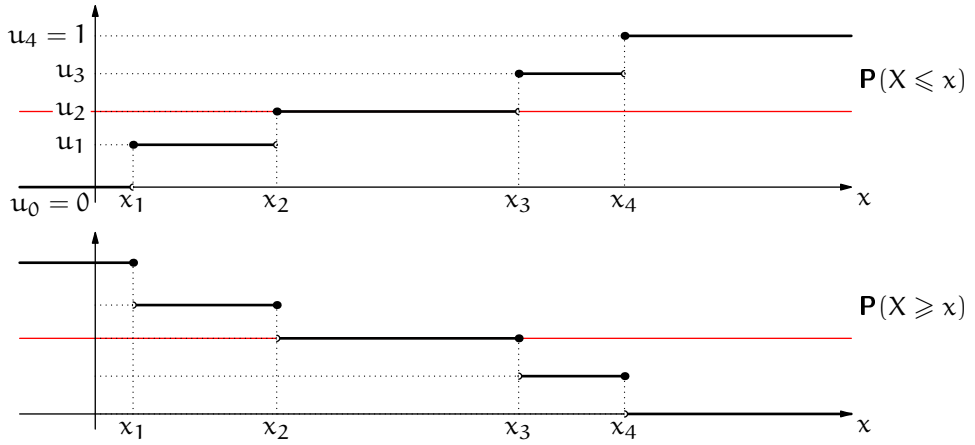
❧ On considère les réels $(u_r)_{0 \leqslant r \leqslant n+1}$ définis par

$$u_r = \mathbf{P}(X \leqslant x_r) = 1 - \mathbf{P}(X > x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \geqslant x_{r+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k) = 1 - \sum_{k=r+1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k)$$

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1$ par convention. Par définition du support, la famille $(u_r)_{0 \leqslant r \leqslant n+1}$ est strictement croissante.

❧ **Premier cas :** il existe un (unique !) entier $1 \leqslant r \leqslant n$ tel que

$$u_r = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$



Les médianes sont les éléments du segment $[x_2, x_3]$.

► Pour $x < x_r$, on a $[X \leqslant x] \subset [X < x_r] = [X \leqslant x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X < x_r]$ et donc

$$\forall\, x < x_r, \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X < x_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(X = x_r) < \frac{1}{2}$$

puisque $\mathbf{P}(X = x_r) > 0$ (car x_r est dans le support de la loi de X).

► Pour $x \geqslant x_r$, on a $[X \leqslant x_r] \subset [X \leqslant x]$, donc

$$\forall\, x \geqslant x_r, \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x) \geqslant \mathbf{P}(X \leqslant x_r) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$

► Pour $x \leqslant x_{r+1}$, on a $[X \geqslant x_{r+1}] \subset [X \geqslant x]$, donc

$$\forall\, x \leqslant x_{r+1}, \qquad \mathbf{P}(X \geqslant x) \geqslant \mathbf{P}(X \geqslant x_{r+1}) = \sum_{k=r+1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$

► Enfin, pour $x > x_{r+1}$, on a $[X \geqslant x] \subset [X > x_{r+1}] = [x_{r+1} < X < x_{r+2}] \sqcup [x_{r+2} \leqslant X]$, donc

$$\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X > x_{r+1}) = \sum_{k=r+2}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(X = x_{r+1}) < \frac{1}{2}$$

car x_{r+1} est dans le support de la loi de X.

Dans ce cas,

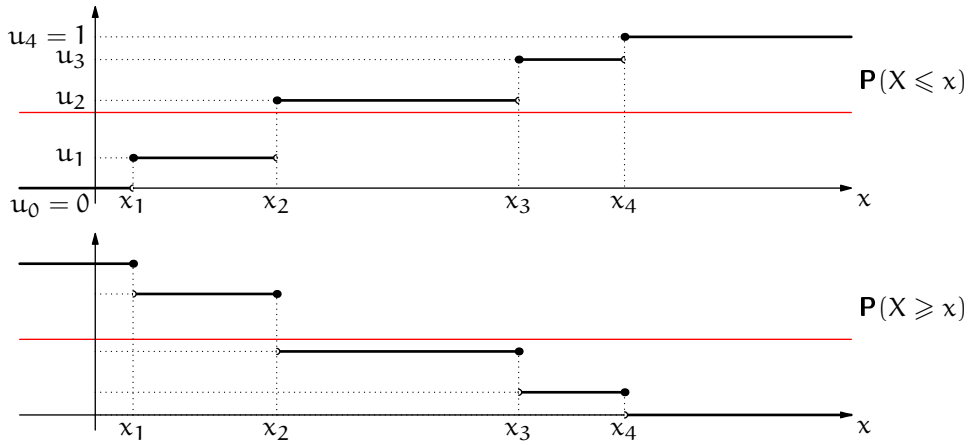
— si $x < x_r$, alors $\mathbf{P}(X \leqslant x) < 1/2$;

— tout réel $\mu \in [x_r, x_{r+1}]$ vérifie les deux contraintes $\mathbf{P}(X \leqslant \mu) \geqslant 1/2$ et $\mathbf{P}(X \geqslant \mu) \geqslant 1/2$ simultanément ;

— si $x > x_{r+1}$, alors $\mathbf{P}(X \geqslant x) < 1/2$.

L'ensemble des médianes de X est alors le segment $[x_r, x_{r+1}]$.

❧ **Deuxième cas :** aucun u_r n'est égal à $1/2$.



La médiane est $\mu = x_2$.

Dans ce cas, il existe un, et un seul, entier $1 \leqslant r \leqslant n$ tel que

$$u_{r-1} < \frac{1}{2} < u_r = u_{r-1} + \mathbf{P}(X = x_r).$$

▶ Pour $x < x_r$,
— ou bien $x \leqslant x_{r-1}$ et $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant x_{r-1}]$;
— ou bien $x_{r-1} < x < x_r$ et alors $[X \leqslant x] = [X \leqslant x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X \leqslant x]$, avec $[x_{r-1} < X \leqslant x] \subset [x_{r-1} < X < x_r]$.
Dans les deux situations,

$$\forall\, x < x_r, \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant x_{r-1}) = u_{r-1} < 1/2.$$

▶ Pour $x \geqslant x_r$, on a $[X \leqslant x_r] \subset [X \leqslant x]$, donc

$$\forall\, x \geqslant x_r, \quad \mathbf{P}(X \leqslant x) \geqslant \mathbf{P}(X \leqslant x_r) = u_r > 1/2.$$

▶ Pour $x \leqslant x_r$, on a $[X < x_r]^c = [X \geqslant x_r] \subset [X \geqslant x]$ et $[X < x_r] = [X \leqslant x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X < x_r]$, donc

$$\forall\, x \leqslant x_r, \quad \mathbf{P}(X \geqslant x) \geqslant \mathbf{P}(X \geqslant x_r) = 1 - \mathbf{P}(X < x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x_{r-1}) = 1 - u_{r-1} > 1/2.$$

▶ Enfin, pour $x > x_r$, on a $[X \geqslant x] \subset [X > x_r] = [X \leqslant x_r]^c$, donc

$$\forall\, x > x_r, \quad \mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X > x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x_r) = 1 - u_r < 1/2.$$

Dans ce deuxième cas,
— la contrainte $\mathbf{P}(X \leqslant \mu) \geqslant 1/2$ est vérifiée si, et seulement si, $\mu \geqslant x_r$
— et la contrainte $\mathbf{P}(X \geqslant \mu) \geqslant 1/2$ est vérifiée si, et seulement si, $\mu \leqslant x_r$.
La loi de X admet donc une, et une seule médiane : $\mu = x_r$.

✍ *On donnera une autre démonstration à la fin de l'exercice.*

2. Comme le support de X est fini, la variable aléatoire X est bornée et admet des moments de tout ordre.

Notons $m = \mathbf{E}(X)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(X - t)^2 = (X - m)^2 + 2(m - t)(X - m) + (m - t)^2.$$

Les trois termes du second membre sont des variables aléatoires d'espérance finie (elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs par hypothèse), donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(X - t)^2] &= \mathbf{V}(X) + 2(m - t)\,\mathbf{E}(X - m) + (m - t)^2 \\ &= \mathbf{V}(X) + (m - t)^2\end{aligned}$$

puisque $m = \mathbf{E}(X)$.

On en déduit que l'espérance $\mathbf{E}[(X - t)^2]$ est minimale si, et seulement si, $t = \mathbf{E}(X)$ et son minimum est égal à $\mathbf{V}(X)$.

✍ *La démonstration qu'on a donnée vaut pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre deux !*

3. D'après la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \mathbf{E}[|X - t|] = \sum_{k=1}^{n} |x_k - t|\,\mathbf{P}(X = x_k).$$

On étudie donc ici une fonction g continue et affine par morceaux. Plus précisément, cette fonction est affine sur les intervalles

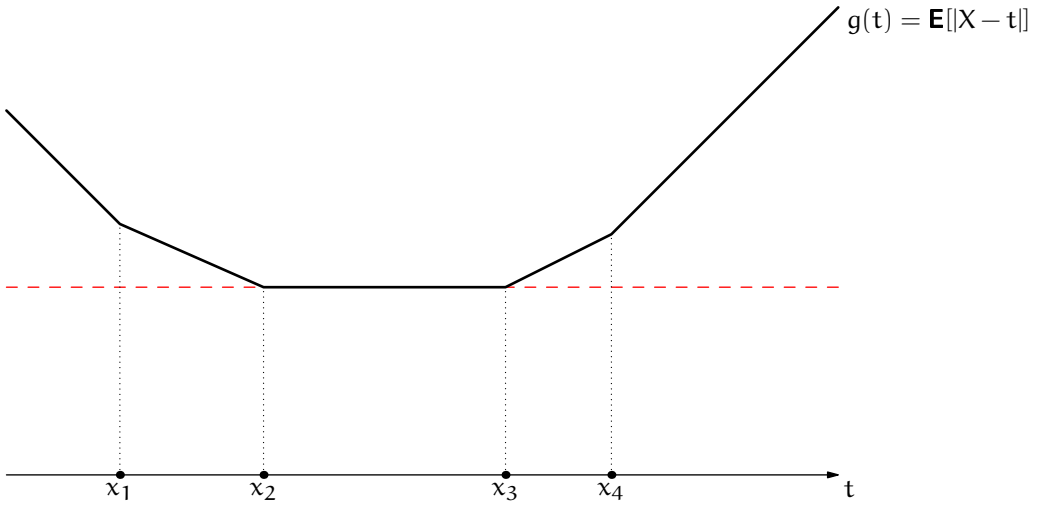
$$]x_0, x_1[=]-\infty, x_1[,]x_1, x_2[, \ldots,]x_r, x_{r+1}[, \ldots,]x_{n-1}, x_n[,]x_n, x_{n+1}[=]x_n, +\infty[.$$

Pour $t \in]x_r, x_{r+1}[$, on a $x_r < t < x_{r+1}$ et donc

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=1}^{r} \underbrace{(t - x_k)}_{>0} \mathbf{P}(X = x_k) + \sum_{k=r+1}^{n} \underbrace{(x_k - t)}_{>0} \mathbf{P}(X = x_k) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X = x_k) - \sum_{k=r+1}^{n} \mathbf{P}(X = x_k) \right] \cdot t + C^{te} \\ &= [u_r - (1 - u_r)]t + C^{te} = (2u_r - 1)t + C^{te}. \end{aligned}$$

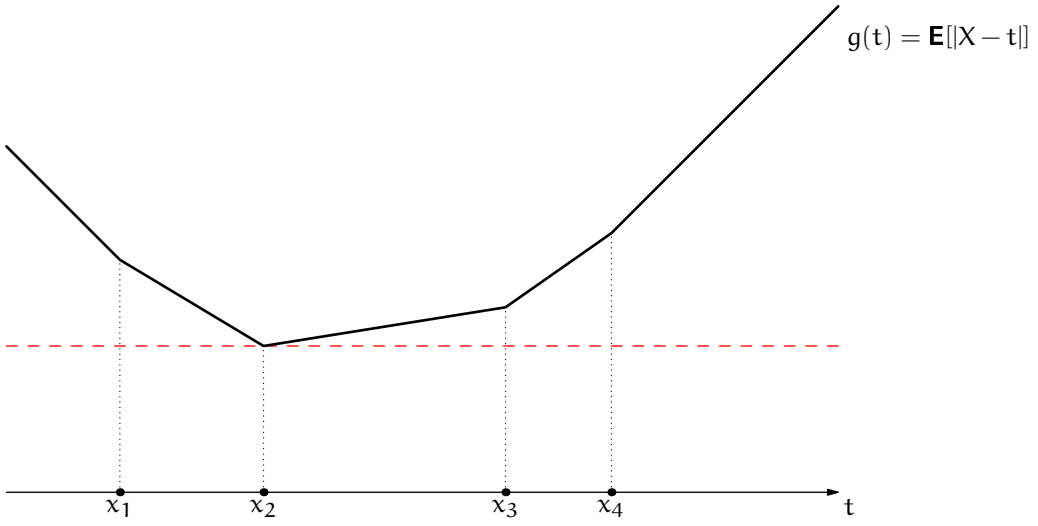
On peut alors reprendre la discussion précédente sur la médiane.

❧ S'il existe un entier r_0 tel que $u_{r_0} = 1/2$, alors
- pour $r < r_0$, la pente $(2u_r - 1) < 2u_{r_0} - 1 = 0$ est strictement négative et la fonction g est strictement décroissante sur $]x_r, x_{r+1}[$;
- pour $r = r_0$, la pente $(2u_{r_0} - 1)$ est nulle et la fonction g est constante sur l'intervalle ouvert $]x_{r_0}, x_{r_0+1}[$ et donc sur le segment $[x_{r_0}, x_{r_0+1}]$ (puisqu'elle est *continue* sur ce segment) ;
- pour $r > r_0$, la pente $(2u_r - 1) > 2u_{r_0} - 1 = 0$ est strictement positive et la fonction g est strictement croissante sur $]x_r, x_{r+1}[$.



Dans ce cas, la fonction g est donc minimale sur le segment $[x_{r_0}, x_{r_0+1}]$, qui est l'ensemble des médianes de X.

❧ Si $u_r \neq 1/2$ pour tout entier r, alors il existe un, et un seul, entier r_0 tel que la médiane μ soit égale à x_{r_0} et
- pour $r < r_0$, la pente $(2u_r - 1) < (2u_{r_0} - 1) < 0$ est strictement négative et la fonction g est strictement décroissante sur $]x_r, x_{r+1}[$;
- pour $r \geqslant r_0$, la pente $(2u_r - 1) \geqslant (2u_{r_0} - 1) > 0$ est strictement positive et la fonction g est strictement croissante sur $]x_r, x_{r+1}[$.



Dans ce cas, la fonction g atteint son minimum en $t = x_{r_0} = \mu$ uniquement.

❧ Dans tous les cas, l'espérance $\mathbf{E}[|X - t|]$ est minimale si, et seulement si, le réel t est une médiane de X.

*Soient X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **stochastiquement inférieure** à Y lorsque*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(X \leqslant t) \leqslant \mathbf{P}(Y \leqslant t).$$

On note alors $X \leqslant_{st} Y$.

1. *Démontrer que $X \leqslant_{st} Y$ si, et seulement si,*

$$\mathbf{E}[h(X)] \leqslant \mathbf{E}[h(Y)]$$

pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée.

2. *On suppose que $X \leqslant_{st} Y$ et que X et Y sont indépendantes. Démontrer que*

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}.$$

Peut-on améliorer cette minoration en remplaçant $1/2$ par une constante $a > 1/2$?

1.

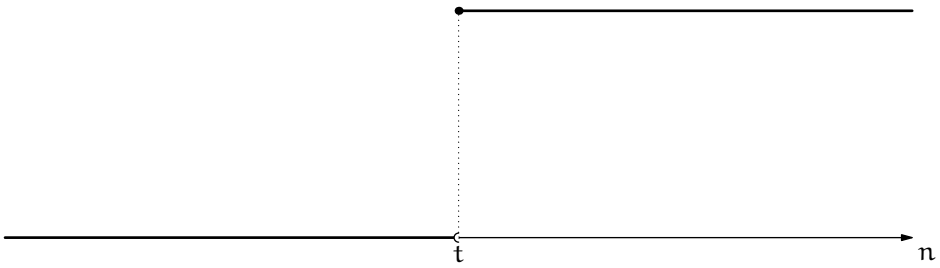
✍ *Pour toute fonction bornée $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, la variable aléatoire $h(X)$ est bornée, donc d'espérance finie.*

❧ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction

$$h_t = \left[n \mapsto \mathbb{1}_{[n \geqslant t]}\right]$$

est une fonction croissante et bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\mathbf{E}[h_t(X)] = \mathbf{P}(X \leqslant t).$$



❧ Réciproquement, supposons que X soit stochastiquement inférieure à Y et considérons une fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée.

D'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\,\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\left[\mathbf{P}(X \geqslant n) - \mathbf{P}(X \geqslant n+1)\right].$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} h(n)\left[\mathbf{P}(X \geqslant n) - \mathbf{P}(X \geqslant n+1)\right] &= \sum_{n=0}^{N} h(n)\,\mathbf{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N+1} h(n-1)\,\mathbf{P}(X \geqslant n) \\ &= h(0) + h(N)\,\mathbf{P}(X \geqslant n) + \sum_{n=1}^{N}\left[h(n) - h(n-1)\right]\mathbf{P}(X \geqslant n).\end{aligned}$$

✍ *On aura reconnu la transformation d'Abel.*

La fonction h est bornée et on sait que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n) = 0,$$

donc $h(N)\,\mathbf{P}(X \geqslant n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\mathbf{E}[h(X)] = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[h(n) - h(n-1)\big]\,\mathbf{P}(X \geqslant n).$$

✍ *Cette égalité est vraie pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est donc vraie aussi pour Y.*

Mais $[h(n) - h(n-1)] \geqslant 0$ (puisque h est croissante) et $\mathbf{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbf{P}(Y \geqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\mathbf{E}[h(X)] \leqslant h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[h(n) - h(n-1)\big]\,\mathbf{P}(Y \geqslant n) = \mathbf{E}[h(Y)].$$

2. On conditionne par X au moyen du système complet d'évènements $([X = m])_{m\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}_{[X=m]}(Y \geqslant m)$$

et par indépendance des variables aléatoires :

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(Y \geqslant m).$$

Comme X est stochastiquement inférieure à Y, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) \geqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X \geqslant m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n).$$

❧ Comme la famille de terme général $\mathbf{P}(X = k)$ est sommable (propriété de σ-additivité), la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n)\big)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \tag{5}$$

est sommable et la sous-famille

$$\big(\mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n)\big)_{0\leqslant m\leqslant n} \tag{6}$$

est sommable elle aussi. D'après le Théorème de Fubini appliqué à la famille (5),

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\right) = 1 \tag{7}$$

et d'après le Théorème de Fubini appliqué à la sous-famille (6),

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n)$$

et donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n). \tag{8}$$

✍ *Dans cette dernière transformation, il s'agit seulement de changer d'indices (on intervertit les rôles de m et n), ce n'est pas une interversion de sommes.*

Notons S, cette somme. On a démontré que

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n) && \text{avec (8)}\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\mathbf{P}(X = m)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n)\right]\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(X = n)\\
&= 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2. && \text{avec (7)}
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs et ils ne sont pas tous nuls (puisque le support de la loi de X est contenu dans $\mathbb{N}$). En particulier, $2S > 1$, donc $S > 1/2$.

❧ Pour obtenir la minoration $S > a$, il faudrait que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 > 2a - 1 > 0$$

pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. C'est impossible ! On peut considérer la variable aléatoire X de loi uniforme sur $[\![0, N]\!]$ pour s'en convaincre :

$$\forall\, 0 \leqslant n \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{N+1}, \qquad \forall\, n > N, \quad \mathbf{P}(X = n) = 0$$

donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 = \frac{1}{N+1}.$$

L'expression $2S - 1$, strictement positive pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, ne peut donc être minorée par une constante strictement positive indépendante de X.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, strictement positives. Calculer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y_{m,n} = \frac{X_1 + \cdots + X_m}{X_1 + \cdots + X_m + \cdots + X_n}$$

en fonction de $1 \leqslant m \leqslant n$.

Comme les variables aléatoires X_k sont strictement positives, il est clair que $0 < Y_{m,n}(\omega) \leqslant 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. Par conséquent, toutes ces variables aléatoires sont d'espérance finie.

✍ *Toute variable aléatoire bornée est d'espérance finie.*

❧ Comme les variables aléatoires X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

ont même loi, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par conséquent, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les variables aléatoires

$$Y_{1,n} = \frac{X_1}{X_1 + \cdots + X_n} \quad \text{et} \quad \frac{X_{\sigma(1)}}{X_{\sigma(1)} + \cdots + X_{\sigma(n)}} = \frac{X_{\sigma(1)}}{X_1 + \cdots + X_n}$$

ont même loi.

✍ *Si deux vecteurs aléatoires $(U_1, \dots, U_n)$ et $(V_1, \dots, V_n)$ ont même loi, alors les variables aléatoires*

$$f(U_1, \dots, U_n) \quad \textit{et} \quad f(V_1, \dots, V_n)$$

ont même loi, quelle que soit la fonction f.

Il est essentiel de se rappeler cette propriété quand on travaille avec un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi, puisqu'il s'agit d'un vecteur aléatoire ***invariant par symétrie****.*

Ainsi, la variable aléatoire

$$Y_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}$$

est la somme de m variables aléatoires d'espérance finie, de même loi que $Y_{1,n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_{m,n}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{E}\Big(\frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\Big) = m\,\mathbf{E}(Y_{1,n}).$$

❧ En particulier, la variable aléatoire $Y_{n,n}$, qui est constamment égale à 1, est la somme de n variables aléatoires de même loi que $Y_{1,n}$:

$$Y_{n,n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1 + \cdots + X_n} = 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}.$$

Par conséquent, $1 = \mathbf{E}(Y_{n,n}) = n\,\mathbf{E}(Y_{1,n})$ et finalement

$$\forall\, 1 \leqslant m \leqslant n, \qquad \mathbf{E}(Y_{m,n}) = \frac{m}{n}.$$

Soient E, *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{K}$ *et* u, *un endomorphisme de* E.

1. *Quels sont les polynômes* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P(u)$ *soit un automorphisme de* E *?*

2. *À quelle condition la sous-algèbre* $\mathbb{K}[u]$ *est-elle contenue dans* $GL(E) \cup \{0\}$*?*

Comme E est un espace de dimension finie, alors $L(E)$ est aussi un espace de dimension finie et la sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$ est aussi un espace de dimension finie.

Par ailleurs, l'idéal annulateur de u n'est pas réduit au polynôme nul et l'endomorphisme u possède un polynôme minimal μ (qui divise tous les polynômes annulateurs de u).

1. L'application $\Phi_P = [v \mapsto P(u).v]$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[u]$. Si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible, alors Φ_P est injectif et comme $\mathbb{K}[u]$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'application Φ_P est aussi surjective.

Comme $I_E \in \mathbb{K}[u]$ (sous-algèbre), il existe un polynôme Q tel que

$$P(u).Q(u) = I_E.$$

✍ *Ce résultat est classique : si un endomorphisme* $v \in \mathbb{K}[u]$ *est inversible, alors son inverse est également un polynôme en* u.

On a donc démontré que

$$(PQ)(u) = I_E = 1(u).$$

Autrement dit, le polynôme $PQ - 1$ appartient à l'idéal annulateur de u : il existe donc un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$PQ - 1 = A\mu \quad \text{c'est-à-dire} \quad PQ - A\mu = 1.$$

Par conséquent, P et μ sont premiers entre eux (théorème de Bézout).

Réciproquement, si P et μ sont premiers entre eux, alors il existe deux polynômes A et B tels que

$$A\mu + BP = 1$$

d'où $B(u).P(u) = I_E$, ce qui prouve que $P(u)$ est bien un automorphisme de E (et que $B(u)$ est son inverse).

2. Supposons que la sous-algèbre $K[u]$ soit contenue dans $GL(E) \cup \{0\}$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

— ou bien $P(u) \in GL(E)$ et donc P et μ sont premiers entre eux (d'après ce qui précède) ;

— ou bien $P(u) = 0$ et donc μ divise P (polynôme annulateur).

❧ Supposons que μ soit irréductible. Alors

$$\langle \mu \rangle \subset \langle \mu \rangle + \langle P \rangle \subset \mathbb{K}[X]$$

et il n'y a que deux possibilités :

— ou bien $\langle \mu \rangle = \langle \mu \rangle + \langle P \rangle$, ce qui signifie que $P \in \langle \mu \rangle$ et donc que P est un polynôme annulateur de u ;

— ou bien $\langle \mu \rangle + \langle P \rangle = \mathbb{K}[X]$, ce qui signifie que P et μ sont premiers entre eux et donc que $P(u)$ est inversible.

❧ Inversement, supposons que μ soit composé : il existe deux polynômes non constants A et B tels que $\mu = A.B$.

Comme A et μ ne sont pas premiers entre eux, alors $A(u)$ n'est pas inversible.

Comme μ ne divise pas A, alors A n'est pas un polynôme annulateur et $A(u)$ n'est pas l'endomorphisme nul.

❧ Conclusion : la sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$ est contenue dans $GL(E) \cup \{0\}$ si, et seulement si, le polynôme minimal de u est irréductible.

Soit $(G,\cdot)$, un groupe commutatif fini de neutre e et de cardinal n. On écrit

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i},$$

la décomposition du cardinal n en produit de facteurs premiers (les α_i sont des entiers naturels non nuls). Pour alléger les notations, on posera $\pi_i = p_i^{\alpha_i}$.
Pour tout entier $d \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$G_d = \{x \in G \,:\, x^d = e\}.$$

1. *Vérifier que G_d est un sous-groupe de $(G,\cdot)$.*
2. *On suppose que l'entier d est premier à n. Que dire du sous-groupe G_d ?*
3. *On considère le groupe produit*

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{r} G_{\pi_i}.$$

Démontrer que l'application f définie par

$$\forall\, (x_1,\dots,x_r) \in \Gamma, \qquad f(x_1,\dots,x_r) = \prod_{i=1}^{r} x_i$$

est un isomorphisme du groupe produit Γ sur le groupe G.
4. *On suppose que $\#(G_d) \leqslant d$ pour tout diviseur d de n.*
4. a. *Démontrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un élément g_i d'ordre π_i dans G.*
4. b. *En déduire que le groupe $(G,\cdot)$ est cyclique.*

1. Par définition, $G_d \subset G$.
Puisque $e^d = e$, l'ensemble G_d contient e (et n'est donc pas vide).
Soient x et y, deux éléments de G_d. Par définition, $x^d = y^d = e$ et comme le groupe $(G,\cdot)$ est commutatif,

$$(x\cdot y^{-1})^d = x^d \cdot (y^{-1})^d = e\cdot (y^d)^{-1} = e^{-1} = e,$$

ce qui prouve que $x\cdot y^{-1} \in G_d$.
L'ensemble G_d est donc bien un sous-groupe de $(G,\cdot)$.

2. Comme $(G,\cdot)$ est un groupe fini, d'après le Théorème de Lagrange, l'ordre de tout élément x de G divise l'ordre n de G.
Si $x \in G_d$, alors (par définition) $x^d = e$, donc l'ordre de x est un diviseur de d.
Comme n et d sont ici supposés premiers entre eux, on en déduit que l'ordre de $x \in G_d$ est égal à 1, c'est-à-dire $x = e$.
Ainsi, $G_d = \{e\}$ pour tout entier d premier à n.

3. Soit $x = (x_1,\dots,x_r) \in \Gamma$. Comme les x_k appartiennent tous à G et que $(G,\cdot)$ est un groupe, le produit $x_1\cdots x_r$ appartient aussi à G. Par conséquent, l'application f est bien définie de Γ dans G.
❧ Cette application f est bien un morphisme de groupes : quels que soient $x = (x_1,\dots,x_r)$ et $y = (y_1,\dots,y_r)$ dans Γ,

$$x \otimes y = (x_1\cdot y_1,\dots,x_r\cdot y_r)$$

(par définition de la loi sur le groupe produit) et

$$f(x\otimes y) \overset{\dagger}{=} (x_1\cdot y_1)\cdot\dots\cdot(x_r\cdot y_r) \overset{\ddagger}{=} (x_1\cdot\dots\cdot x_r)\cdot(y_1\cdot\dots\cdot y_r) \overset{\dagger}{=} f(x)\cdot f(y)$$

par définition de f ($\dagger$) et commutativité de la loi $\cdot$ ($\ddagger$).
Donc l'application f est bien un morphisme de groupes du groupe produit $(\Gamma,\otimes)$ dans le groupe $(G,\cdot)$.
❧ Le morphisme de groupes f est injectif si, et seulement si, son noyau est réduit à l'élément neutre du groupe de départ, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Ker} f = \{(e,\dots,e)\}.$$

✍ *Comme* $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-groupe de* $(\Gamma, \otimes)$*, l'inclusion*

$$\{(e, \dots, e)\} \subset \operatorname{Ker} f$$

est toujours vraie et on n'en parle jamais.

Considérons donc $x = (x_1, \dots, x_r) \in \Gamma$ tel que

$$f(x) = x_1 \cdot \cdots \cdot x_r = e.$$

Par définition des sous-groupes G_{π_i}, on sait que

$$x_1^{\pi_1} = x_2^{\pi_2} = \cdots = x_r^{\pi_r} = e.$$

Comme les entiers $\pi_1 = p_1^{\alpha_1}$, $\pi_2 = p_2^{\alpha_2}$, …, $\pi_r = p_r^{\alpha_r}$ sont deux à deux premiers entre eux (puisque les entiers $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts), on déduit du Lemme chinois que, pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un entier n_i tel que

$$n_i \equiv 1 \pmod{\pi_i} \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \neq i, \quad n_i \equiv 0 \pmod{\pi_j}.$$

Autrement dit, il existe des entiers $k_{i,1}, \dots, k_{i,r}$ tels que

$$n_i = 1 + k_{i,i}\pi_i \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \neq i, \quad n_i = k_{i,j}\pi_j.$$

On déduit alors de $x_1 \cdot \cdots \cdot x_r = e$ que

$$e = (x_1 \cdot \cdots \cdot x_r)^{n_i} = x_1^{n_i} \cdot \cdots \cdot x_r^{n_i} = x_i^{1+k_{i,i}\pi_i} \cdot \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j \neq i}} x_j^{k_{i,j}\pi_j} = x_i$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. On a ainsi démontré l'injectivité de f.

❧ Nous allons maintenant démontrer la surjectivité du morphisme f. Pour cela, nous considérons un élément $y \in G$ et nous cherchons un antécédent $x = (x_1, \dots, x_r) \in \Gamma$ de y par f.

Comme les entiers $\pi_1, \dots, \pi_r$ sont deux à deux premiers entre eux, on en déduit que les entiers

$$q_1 = \prod_{j \neq 1} \pi_j, \quad q_2 = \prod_{j \neq 2} \pi_j, \quad \dots, \quad q_r = \prod_{j \neq r} \pi_j$$

sont premiers dans leur ensemble. Il existe donc des entiers relatifs $a_1, \dots, a_r$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i q_i = 1.$$

Par conséquent,

$$y = y^1 = \prod_{i=1}^{r} y^{a_i q_i} = \prod_{i=1}^{r} (y^{q_i})^{a_i}.$$

Par définition des entiers q_i, on sait que $q_i \pi_i = n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad (y^{q_i})^{\pi_i} = y^{q_i \pi_i} = y^n = e$$

puisque l'ordre de l'élément y divise l'ordre n du groupe $(G, \cdot)$. Cela prouve que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad y^{q_i} \in G_{\pi_i}$$

et comme G_{π_i} est un sous-groupe de $(G, \cdot)$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad (y^{q_i})^{a_i} \in G_{\pi_i}$$

(les a_i sont des entiers relatifs). On a ainsi démontré que

$$\forall\, y \in G, \qquad x = \big((y^{q_1})^{a_1}, (y^{q_2})^{a_2}, \dots, (y^{q_r})^{a_r}\big) \in \Gamma$$

et que $y = f(x)$.

❧ En conclusion, l'application f est bien un isomorphisme de groupes du groupe produit $(\Gamma, \otimes)$ sur le groupe $(G, \cdot)$.

4. a. En particulier, le morphisme f réalise une bijection entre deux ensembles finis, donc les cardinaux de ces deux ensembles sont égaux. Ainsi,

$$n = \#(G) = \prod_{i=1}^{r} \#(G_{\pi_i}).$$

On suppose ici que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad \#(G_{\pi_i}) \leqslant \pi_i$$

donc

$$\prod_{i=1}^{r} \#(G_{\pi_i}) \leqslant \prod_{i=1}^{r} \pi_i = n.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad \#(G_{\pi_i}) = \pi_i.$$

❧ Le Théorème de Lagrange nous assure que l'ordre de tout élément du sous-groupe G_{π_i} divise l'ordre de ce sous-groupe. Comme π_i est un puissance de p_i, on en déduit que l'ordre de tout élément de G_{π_i} est une puissance de p_i.

Par conséquent, s'il n'existe aucun élément de G_{π_i} dont l'ordre soit égal à π_i, alors l'ordre de chaque élément de G_{π_i} est un diviseur strict de π_i :

$$\forall\, x \in G_{\pi_i}, \qquad x^{p_i^{\alpha_i - 1}} = e.$$

Autrement dit,

$$G_{\pi_i} \subset G_{p_i^{\alpha_i - 1}}$$

et donc, en considérant les cardinaux,

$$\pi_i = \#(G_{\pi_i}) \leqslant \#(G_{p_i^{\alpha_i - 1}}) \leqslant p_i^{\alpha_i - 1} < \pi_i,$$

ce qui est absurde.

❧ On a ainsi démontré que chaque sous-groupe G_{π_i} contient un élément g_i dont l'ordre est égal à π_i.

Puisque l'ordre du sous-groupe G_{π_i} est égal à l'ordre de $g_i \in G_{\pi_i}$, le sous-groupe G_{π_i} est en fait cyclique et engendré par g_i :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad G_{\pi_i} = \langle g_i \rangle.$$

✍ *Le groupe produit $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif d'ordre 12.*

Le groupe $H_8 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique (l'ordre de chacun de ses éléments est au plus égal à 4, aucun n'est d'ordre 8), alors que le groupe $H_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est cyclique. Par conséquent, le groupe produit $H = H_8 \times H_3$ n'est pas cyclique et, par isomorphisme le groupe $(G, \cdot)$ n'est pas cyclique non plus.

❧ *Non, ce groupe $(G, \cdot)$ n'est pas défini, mais c'est sans importance : quel qu'il soit, il est isomorphe à un groupe (bien défini !) qui n'est pas cyclique, donc il n'est pas cyclique.*

❧ *Oui, on peut expliciter un groupe $(G, \cdot)$ qui vérifie ces propriétés : il suffit de fureter dans le groupe symétrique $(\mathfrak{S}_9, \circ)$.*

4. b. Comme les entiers π_i sont deux à deux premiers entre eux, l'ordre de l'élément

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_r$$

est égal au produit des entiers π_i, c'est-à-dire à n.

✍ *Voir l'exercice corrigé* `rms135-492` *pour le cas de deux éléments et conclure par récurrence sur r.*

On a donc un élément g de G dont l'ordre est égal à l'ordre du groupe $(G, \cdot)$, ce qui prouve que $G = \langle g \rangle$ et en particulier que le groupe $(G, \cdot)$ est cyclique.

1. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si, et seulement si, son spectre est réduit à $\{0\}$.*

2. *Quelles que soient les matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose*

$$[A, B] = AB - BA.$$

On note $C = [A, B]$ et on suppose que $[A, C] = 0_n$.

2. a. *Démontrer que $\operatorname{tr}(C^k) = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.*

2. b. *En déduire que C est nilpotente.*

2. c. *Démontrer que*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad [B, A^p] = -pA^{p-1}C.$$

1. Si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible et 0 est donc une valeur propre de A.

D'autre part, A admet un polynôme annulateur de la forme X^d (avec $d \in \mathbb{N}^*$), donc toute valeur propre de A est une racine de X^d, donc 0 est bien la seule valeur propre de A.

❧ Réciproquement, supposons que le spectre de A soit réduit à $\{0\}$. Le polynôme caractéristique de A est un polynôme à coefficients complexes dont le degré est égal à $n \geqslant 1$, donc il est scindé (Théorème de d'Alembert-Gauss) et les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. Donc le polynôme caractéristique de A est égal à X^n et A est nilpotente (Théorème de Cayley-Hamilton).

✍ *On pouvait se passer du Théorème de Cayley-Hamilton en raisonnant sur le polynôme minimal de A.*

2. a. Tout d'abord, $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$ (propriété fondamentale de la trace).

Plus généralement, l'hypothèse $[A, C] = 0_n$ signifie que les matrices A et C commutent. Par conséquent, A et C^k commutent pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad C^{k+1} = C^k \cdot (AB - BA) = C^kAB - C^kBA = AC^kB - C^kBA.$$

La propriété fondamentale de la trace nous assure alors que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{tr}(C^{k+1}) = \operatorname{tr}(A \cdot C^kB) - \operatorname{tr}(C^kB \cdot A) = 0.$$

2. b. Pour toute matrice trigonalisable (et donc en particulier pour toute matrice à coefficients complexes), on peut exprimer la trace en fonction des valeurs propres et de leurs multiplicités respectives :

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda \lambda$$

et plus généralement

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \operatorname{tr}(C^k) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda \lambda^k.$$

❧ Considérons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ dont le terme constant est nul :

$$P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d = \sum_{k=1}^{d} a_kX^k.$$

Alors

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda P(\lambda) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda \sum_{k=1}^{d} a_k\lambda^k = \sum_{k=1}^{d} a_k \left(\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda \lambda^k \right) = 0. \qquad (\star)$$

❧ Considérons maintenant l'ensemble $X = \operatorname{Sp}(C) \cup \{0\}$ et les polynômes interpolateurs $(P_x)_{x \in X}$ associés aux abscisses de X (Théorie de l'interpolation de Lagrange).

Si $\lambda_0 \in \operatorname{Sp}(C)$ est une valeur propre non nulle de C, alors $\lambda_0 \in X$ et $\lambda_0 \neq 0$, donc $P_{\lambda_0}(0) = 0$ (ce qui nous autorise à appliquer la propriété $(\star)$ qui vient d'être établie) et $P_{\lambda_0}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(C)$ distinct de λ_0. On déduit alors de $(\star)$ que

$$m_{\lambda_0} = m_{\lambda_0} P_{\lambda_0}(\lambda_0) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(C)} m_\lambda P_{\lambda_0}(\lambda) = 0.$$

C'est absurde !

✍ *Par définition, la multiplicité d'une valeur propre est au moins égale à 1.*

❧ Par conséquent, la matrice C n'a pas d'autre valeur propre possible que 0.
Comme C est une matrice à coefficients complexes, elle admet au moins une valeur propre.
Donc le spectre de C est bien réduit à $\{0\}$ et la matrice C est donc nilpotente.

✍ *Le résultat est valable aussi pour une matrice à coefficients réels, il suffit de la considérer comme une matrice à coefficients complexes et de raisonner sur le spectre complexe de cette matrice.*

2. c. Pour $p = 1$, on a $[B, A] = -C$ (par définition de C).
Supposons que $[B, A^p] = -pA^{p-1}C$ pour un entier $p \geqslant 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}[B, A^{p+1}] &= BA^p.A - A.A^pB = (BA^p - A^pB).A + (A^pB.A - A^p.AB) = [B, A^p].A - A^p.[A, B] \\ &= -pA^{p-1}C.A - A^p.C && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= -pA^p.C - A^p.C = -(p+1)A^p.C && \text{(car A et C commutent)}\end{aligned}$$

et on a démontré par récurrence que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad [B, A^p] = -pA^{p-1}.C.$$

Soient A *et* B, *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = 0_n$.

1. *A-t-on nécessairement* $BA = 0_n$?

2. *Démontrer que*

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad \operatorname{tr}[(A+B)^p] = \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p).$$

3. *Établir une relation entre* $\operatorname{rg} A$ *et* $\operatorname{rg} B$.

1. Considérons les matrices A et B dont les premières colonnes sont respectivement égales à

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et à} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

toutes les autres colonnes de ces matrices étant nulles. Autrement dit :

$$A = U.U^\top \qquad \text{et} \qquad B = V.U^\top.$$

Il est donc clair que $\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot U$ et $\operatorname{Im} B = \mathbb{R} \cdot V$ et que

$$X \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B \iff U^\top.X = 0.$$

Par conséquent, on a bien $AB = 0_n$ (puisque $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$) mais pas $BA = 0_n$ (puisque $\operatorname{Im} A \not\subset \operatorname{Ker} B$).

2. Comme $AB = 0_n$, on peut démontrer par récurrence que

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^k.$$

✍ *Si l'expression développée est correcte pour* $(A+B)^p$, *alors*

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= \left(\sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^k\right)\cdot(A+B) = \sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^{k+1} + \sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^kB \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} B^{(p+1)-k}A^k + \underbrace{B^{p+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^{p} B^{p-k}A^{k-1}.\underbrace{(AB)}_{=0_n} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} B^{(p+1)-k}A^k.\end{aligned}$$

Pour tout $1 \leqslant k < p$, on a $k-1 \in \mathbb{N}$ et $(p-1-k) \in \mathbb{N}$ et donc

$$\operatorname{tr}(B^{p-k}A^k) = \operatorname{tr}(A^kB^{p-k}) = \operatorname{tr}(A^{k-1}.AB.B^{p-1-k}) = \operatorname{tr}(0_n) = 0.$$

On déduit alors de la linéarité de la trace que

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad \operatorname{tr}[(A+B)^p] = \underbrace{\operatorname{tr} A^p}_{k=p} + \underbrace{\operatorname{tr} B^p}_{k=0}.$$

3. Comme on l'a mentionné, la propriété $AB = 0_n$ équivaut au fait que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} B \leqslant n - \operatorname{rg} A$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leqslant n.$$

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geqslant 2$) pour laquelle $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

2. *Déterminer les éléments propres de A.*

3. *Calculer le déterminant de A.*

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (Théorème spectral).

✍ *La seconde question est la seule intéressante ! Nous allons en présenter deux solutions. Un court rappel pour comprendre la première : si un endomorphisme u est diagonalisable, alors*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E).$$

Si u n'est pas inversible, alors $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}(u)$ et si u n'est pas identiquement nul, alors il admet au moins une valeur propre non nulle.

Si λ_0 est une valeur propre non nulle de u et x_0, un vecteur propre de u associé à λ_0, alors

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot u(x_0) = u\Big(\frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0\Big) \in \mathrm{Im}\, u.$$

Par conséquent,

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \Bigg(\underbrace{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)}_{\subset \mathrm{Im}\, u} \Bigg).$$

Comme u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que

$$\mathrm{Im}\, u = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$$

et donc que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Une dernière précision : cette dernière propriété n'est pas réservée aux endomorphismes diagonalisables ! On peut démontrer qu'elle équivaut au fait que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ ou, si on préfère, au fait que le sous-espace propre associé à 0 soit égal au sous-espace caractéristique associé à 0 ou encore au fait que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique soit inférieure à 1.

Et maintenant, reprenons !

2. **Première version** : on considère l'endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Il est clair que le rang de u est égal à 2 :

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n,\ e_1)$$

et que, si $n \geqslant 3$,

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u - 0 \cdot \mathrm{I}_E) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_2, \ldots, e_n - e_2).$$

(Pour $n = 2$, le noyau de u est réduit au vecteur nul. On y reviendra à la question suivante !)

Comme u est diagonalisable, alors

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$$

et comme le plan $P = \mathrm{Im}\, u$ est stable par u, on peut définir l'endomorphisme $v \in \mathrm{L}(P)$ induit par restriction de u au plan P. Les valeurs propres non nulles de u sont alors les valeurs propres de v et les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres non nulles sont les vecteurs propres de v.

Le plan P admet une base naturelle : $\mathscr{B}_P = \big(u(e_1), u(e_2)\big)$ et comme

$$u\big(u(e_1)\big) = u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} u(e_k) = u(e_1) + (n-1)u(e_2)$$
$$u\big(u(e_2)\big) = u(e_1),$$

la matrice de v relative à cette base $\mathscr{B}_P$ est

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de A (c'est-à-dire les valeurs propres de A_P) sont les racines du polynôme

$$X^2 - X - (n-1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette expression moche n'est pas un problème ! En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (qui sont des vecteurs propres aussi bien pour u que pour v, tout est là !) sont représentés dans la base $\mathscr{B}_P$ par les vecteurs non nuls du noyau de

$$A_P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit de regarder la première ligne de cette matrice (dont le rang est égal à 1 puisque λ est une valeur propre de A_P...) pour en déduire que les vecteurs propres de A_P associés à la valeur propre λ sont proportionnels à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot \big[u(e_1) + (\lambda - 1) \cdot u(e_2)\big] = \mathbb{R}\Big[\lambda \cdot e_1 + \sum_{k=2}^{n} e_k\Big].$$

Deuxième version : Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (alias le noyau) est égale à $(n-2)$, la somme des dimensions des autres sous-espaces propres est égale à 2 et il y a donc au plus deux valeurs propres non nulles (peut-être une valeur propre double ?). Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et par conséquent son degré est au plus égal à 3. (De plus, comme $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, le terme constant du polynôme minimal est nul.)

On prend le temps de poser le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2n-1 & n & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la famille (I_n, A, A^2) est libre et que

$$A^3 = A^2 + (n-1)A,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - X^2 - (n-1)X.$$

On en déduit sans difficulté les trois valeurs propres de A et les sous-espaces propres comme plus haut.

✍ *La dimension des sous-espaces propres nous permet d'en déduire que le polynôme caractéristique de A est égal à*

$$X^{n-2}\big(X - X - (n-1)\big).$$

3. Comme le rang de A est égal à 2, il n'y a que deux cas possibles :

— si $n \geqslant 3$, alors la matrice A n'est pas inversible et $\det A = 0$;
— si $n = 2$, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}.$$

1. *Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

2. *Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc a_n est bien défini.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $[t \mapsto 1]$ sur l'intervalle $[0,1[$ et la convergence est dominée :

$$\forall\, t \in [0,1[\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est égale à

$$\int_0^1 1\,dt = 1.$$

✍ *En général, pour calculer un développement asymptotique d'une intégrale, on intègre par parties.*

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - a_n = \int_0^1 1 - f_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt = \int_0^1 t \cdot \frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,dt.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} 1 - a_n &= \left[t \cdot \frac{\ln(1+t^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, par concavité du logarithme,

$$0 \leqslant \ln(1+t^n) \leqslant t^n$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

✍ *On peut être beaucoup plus précis !*

Pour $0 \leqslant t < 1$, on peut développer $\ln(1+t^n)$ en série entière et intégrer terme à terme ce développement sur $[0,1[$:

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}t^{nk}}{k}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}.$$

On en déduit que

$$n\int_0^1 \ell n(1+t^n)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(1+1/kn)}.$$

On remarque alors que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{kn} \leqslant \frac{1}{n}$$

et on déduit que

$$n\int_0^1 \ell n(1+t^n)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(kn)^\ell}.$$

Pour $n \geqslant 2$ (mais pas pour $n = 1$!), on peut appliquer le Théorème de Fubini :

$$n\int_0^1 \ell n(1+t^n)\,dt = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2+\ell}}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^\ell = G(1/n)$$

où G est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 1.

On en déduit que, pour tout $N \geqslant 2$,

$$a_n = 1 - \frac{\ell n\, 2}{n} + \sum_{\ell=2}^{N} \frac{u_\ell}{n^\ell} + o\left(\frac{1}{n^N}\right) \quad \text{où} \quad u_\ell = (-1)^\ell \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\ell}.$$

Remarque : pour établir le développement limité, on peut se passer du Théorème de Fubini en se souvenant que

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant r, \quad \left|\frac{1}{1+u} - \sum_{\ell=0}^{N} (-1)^\ell u^\ell\right| = \frac{u^{N+1}}{1+u} \leqslant r^{N+1}.$$