

Soit un jeu de $2n$ cartes numérotées de 1 à $2n$. De combien de manières peut-on mélanger ce jeu ? De combien de manières peut-on le mélanger de telle sorte que les cartes portant un numéro impair soient ordonnées en croissant ?

• Il y a $(2n)!$ permutations d'un ensemble à $2n$ éléments, donc il y a $(2n)!$ mélanges possibles en tout.

- Pour que les cartes portant un numéro impair soient ordonnées en croissant,
 - on choisit la position des cartes de numéro impair dans le paquet mélangé : il s'agit de choisir n positions parmi $2n$ positions possibles, donc il y a

$$\binom{2n}{n}$$

possibilités ;

- la position de chaque carte de numéro impair est maintenant déterminée (puisque ces cartes sont rangées par ordre croissant) ;
- les positions occupées par les cartes de numéro pair sont également déterminées (elles ne peuvent qu'occuper les n places restantes) ;
- toutes les permutations des cartes de numéro pair sont possibles et comme il y a n cartes de numéro pair, il y a $n!$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, il y a donc

$$\binom{2n}{n} n! = \frac{(2n)!}{n!}$$

manières de mélanger les cartes en faisant en sorte que les cartes de numéro impair soient rangées dans l'ordre croissant.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k + X_{k+1}.$$

La fonction S_n est bien une variable aléatoire en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires. Comme une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire d'espérance finie, la variable aléatoire S_n est aussi un variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) + \mathbf{E}(X_{k+1}) = \sum_{k=1}^n 2p = 2np.$$

♣ On peut aussi écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=2}^{n+1} X_k = X_1 + X_{n+1} + \sum_{k=2}^n X_k.$$

Comme les variables aléatoires X_k sont bornées, elles admettent toutes un moment d'ordre deux et comme elles sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}(X_1) + \sum_{k=2}^n \mathbf{V}(2X_k) + \mathbf{V}(X_{n+1}) = [4(n-1) + 2] \mathbf{V}(X) = (4n-2)p(1-p).$$

✎ La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances. Lorsque les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, la formule se complique avec l'apparition des covariances qui ne sont plus nécessairement nulles :

$$\mathbf{V}(Y_1 + \dots + Y_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell).$$

Avec $Y_k = X_k + X_{k+1}$ et $Y_\ell = X_\ell + X_{\ell+1}$, on a

- $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell) = 0$ pour $k < \ell - 1$ d'après le lemme des coalitions (puisque les paires d'indices $\{k, k+1\}$ et $\{\ell, \ell+1\}$ sont alors disjointes);
- et pour $k = \ell - 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) &= \mathbf{Cov}(X_k + X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2}) \\ &= \mathbf{Cov}(X_k, X_{k+1} + X_{k+2}) + \mathbf{V}(X_{k+1}) + \mathbf{Cov}(X_{k+1}, X_{k+2}) = \mathbf{V}(X_{k+1}) = p(1-p) \end{aligned}$$

à nouveau par le lemme des coalitions.

1. Soient a et b , deux entiers relatifs non nuls, premiers entre eux. Démontrer que : si a divise c et si b divise c , alors ab divise c .

2. Trouver un entier relatif x tel que

$$x \equiv 6 \pmod{17} \quad \text{et} \quad x \equiv 4 \pmod{15}. \quad (*)$$

3. Résoudre $(*)$.

1. [Question de cours] Comme a et b sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

On en déduit que

$$acu + bcv = c.$$

Comme a et b divisent c , il existe deux entiers k et q tels que

$$c = ka = qb.$$

On en déduit que

$$c = a(qb)u + b(ka)v = (ab)(qu + kv)$$

et comme $qu + kv \in \mathbb{Z}$, on a démontré que ab divise c .

▮ Réciproquement, si ab divise c , alors il est clair que a et b divisent c .

2. Comme $11 + 6 = 17$ et $11 + 4 = 15$, on dispose d'une solution "évidente" :

$$-11 \equiv 6 \pmod{17} \quad \text{et} \quad -11 \equiv 4 \pmod{15}.$$

▮ Si on ne voit pas que $x = -11$ est une solution particulière, on peut en trouver une en appliquant la méthode usuelle qui part de l'équation de Bézout pour $a = 17$ et $b = 15$.

L'algorithme d'Euclide nous donne

$$8 \times 15 - 7 \times 17 = 120 - 119 = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{array}{l} -119 \equiv 1 \pmod{15} \\ \equiv 0 \pmod{17} \end{array} \quad \text{et que} \quad \begin{array}{l} 120 \equiv 0 \pmod{15} \\ \equiv 1 \pmod{17}. \end{array}$$

Par conséquent,

$$x_0 = 6 \times 120 - 4 \times 119 = 720 - 476 = 244$$

est une solution particulière de $(*)$.

3. Comme -11 est une solution particulière, un entier relatif x est une solution de $(*)$ si, et seulement si, $x + 11$ est divisible par 15 et par 17. D'après la première question, cela équivaut au fait que $x + 11$ soit divisible par

$$15 \times 17 = (16 - 1)(16 + 1) = 256 - 1 = 255.$$

Par conséquent, x est solution de $(*)$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = -11 + 255k = 244 + 255(k - 1).$$

Soit S , l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X-1)^n Q + X^n P = 1.$$

1. Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple $(P_0, Q_0) \in S$ tel que $\deg P_0 < n$ et $\deg Q_0 < n$.
2. Déterminer les éléments de S .

1. Les polynômes $X-1$ et X sont premiers entre eux (Bézout : $X - (X-1) = 1$). Par conséquent, les polynômes $(X-1)^n$ et X^n sont premiers entre eux et (Bézout) il existe donc des couples (U, V) de polynômes tels que

$$(X-1)^n U + X^n V = 1.$$

L'ensemble S n'est donc pas vide.

• Considérons un couple (P_1, Q_1) de polynômes tels que

$$(X-1)^n Q_1 + X^n P_1 = 1$$

et effectuons la division euclidienne de P_1 par $(X-1)^n$: il existe donc un polynôme A et un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$P_1 = (X-1)^n A + P_0.$$

En posant $Q_0 = Q_1 + X^n A$, on obtient alors

$$\begin{aligned} (X-1)^n Q_0 + X^n P_0 &= (X-1)^n Q_1 + X^n P_1 \\ &= (X-1)^n [Q_1 + X^n A] + X^n [P_1 - (X-1)^n A] \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a donc $(X-1)^n Q_0 = 1 - X^n P_0$ et comme $\deg P_0 < n$, on en déduit que

$$n + \deg Q_0 \leq n + \deg P_0 < 2n$$

et donc $\deg Q_0 < n$.

Le couple (P_0, Q_0) est donc un élément de S tel que $\deg P_0 < n$ et $\deg Q_0 < n$.

• Considérons un couple (P_2, Q_2) de polynômes tels que

$$(X-1)^n Q_2 + X^n P_2 = 1 = (X-1)^n Q_0 + X^n P_0.$$

Alors $(X-1)^n (Q_2 - Q_0) = X^n (P_0 - P_2)$ et comme X^n et $(X-1)^n$ sont premiers entre eux, alors $(X-1)^n$ divise $P_2 - P_0$ et X^n divise $Q_2 - Q_0$: il existe donc deux polynômes A et B tels que

$$P_2 - P_0 = (X-1)^n A \quad \text{et} \quad Q_2 - Q_0 = X^n B.$$

Si $\deg P_2 < n$ et $\deg Q_2 < n$, alors les degrés de $(P_2 - P_0)$ et de $(Q_2 - Q_0)$ sont aussi strictement inférieurs à n . Il faut donc que $A = B = 0$ et donc

$$(P_2, Q_2) = (P_0, Q_0).$$

Il existe donc un, et un seul, couple (P_0, Q_0) dans S tel que $\deg P_0 < n$ et $\deg Q_0 < n$.

2. On a déterminé une solution particulière $(P_0, Q_0) \in S$.
On a démontré que : si $(P, Q) \in S$, alors il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = P_0 + (X-1)^n A.$$

Comme $(X-1)^n Q + X^n P = (X-1)^n Q_0 + X^n P_0$, on en déduit que

$$Q = Q_0 - X^n A.$$

Réciproquement, il est clair que, pour tout $A \in \mathbb{R}[X]$, le couple

$$(P, Q) = (P_0 + (X-1)^n A, Q_0 - X^n A)$$

appartient à S .

Ainsi

$$S = \{(P_0 + (X-1)^n A, Q_0 - X^n A), A \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme unitaire de degré 3 admettant trois racines distinctes, notées z_1, z_2 et z_3 . On note M_k , l'image de la racine z_k pour $1 \leq k \leq 3$.

La polynôme dérivé P' admet une racine double si, et seulement si, le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Par hypothèse,

$$P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

et donc

$$P' = 3X^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)X + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1).$$

Le discriminant réduit de P' est égal à

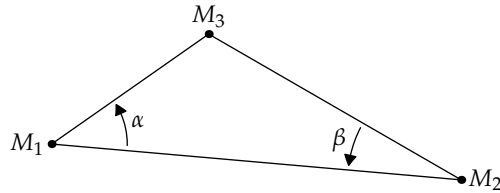
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$$

donc P' admet une racine double si, et seulement si,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 0$$

• Si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral, alors les trois côtés ont même longueur :

$$\frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{M_1M_3}{M_1M_2} = 1 = \frac{M_2M_1}{M_2M_3} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_3 - z_2|}$$



et les angles orientés

$$\alpha = (\mathbf{M_1M_2}, \mathbf{M_1M_3}) = \text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

$$\beta = (\mathbf{M_2M_3}, \mathbf{M_2M_1}) = \text{Arg} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$$

sont égaux. Par conséquent, il faut que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Réciproquement, si

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2},$$

alors les angles orientés α et β sont égaux, donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_3 et par conséquent $M_1M_3 = M_2M_3$. En égalant aussi les modules, on obtient aussi que

$$M_1M_3 \times M_2M_3 = M_1M_2^2$$

d'où finalement : $M_1M_3 = M_2M_3 = M_1M_2$ et le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est donc équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

• Comme les complexes z_1, z_2 et z_3 sont distincts, l'égalité précédente équivaut à

$$(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -(z_2 - z_1)^2$$

c'est-à-dire à

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 0$$

(il suffit de développer).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On considère une application $\varphi : \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \quad (1)$$

et telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(A_\lambda) = \lambda. \quad (2)$$

Démontrer que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \det M.$$

🔗 Comme il est question de matrices à coefficients complexes, il faut tout de suite penser à trigonaliser la matrice M !

✎ **Cas des matrices inversibles** — D'après (2),

$$\varphi(I_2) = 1.$$

On déduit de (1) que, pour toute matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$,

$$\varphi(P)\varphi(P^{-1}) = \varphi(I_2) = 1.$$

L'image de $GL_2(\mathbb{C})$ est donc contenue dans $\mathbb{C}^*$ et

$$\forall P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(P^{-1}) = \frac{1}{\varphi(P)}.$$

✎ **Cas des matrices semblables** — Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

D'après (1) et ce qui précède,

$$\varphi(B) = \varphi(P^{-1})\varphi(A)\varphi(P) = \varphi(A).$$

✎ La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prouve que les deux matrices A_λ et B_λ sont semblables et donc que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(B_\lambda) = \lambda = \det B_\lambda. \quad (3)$$

✎ **Cas des matrices diagonalisables** — Si la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors elle est semblable à

$$\text{Diag}(\lambda, \mu) = A_\lambda B_\mu$$

où λ et μ sont deux nombres complexes (non nécessairement distincts). On déduit alors de (1), (2) et (3) que

$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda B_\mu) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu) = \lambda\mu = \det M. \quad (4)$$

✎ **Trigonalisation** — Toute matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable, c'est-à-dire qu'elle est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = A_\lambda B_\mu T \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

🔗 Si la matrice A n'est pas alors les deux valeurs propres λ et μ sont égales (cours) et on peut démontrer qu'il est possible de choisir $\alpha = 1$ (exercice classique).

Toujours d'après (1), (2) et (3),

$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu)\varphi(T) = \lambda\mu\varphi(T) = \det M \times \varphi(T).$$

Il reste donc à calculer $\varphi(T)$ avec un peu d'astuce...

• On remarque que

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable. On déduit de (1) et (4) (avec $a = \alpha/4$) que

$$\varphi(T) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

et finalement que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \det M.$$

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A .
2. Donner une équation de l'image de A . Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

1. Avec les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, on trouve que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

et, d'après le cours, ces deux matrices ont même rang.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de colonnes, donc $\text{rg } A \leq 3$.

Il est clair que, pour la seconde matrice, les colonnes C_2 et C_3 ne sont pas proportionnelles. Donc $\text{rg } A \geq 2$.

D'autre part, la colonne C_1 n'est pas une combinaison linéaire de C_2 et C_3 , donc $\text{rg } A \geq 3$.

Donc le rang de A est égal à 3 et les colonnes de A forment une famille libre.

• L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice. Comme les trois colonnes forment une famille libre, elles constituent en fait une base de l'image de A .

🔗 On travaille ici dans un espace de dimension 4 et l'image de A est donc un hyperplan.

2. D'après le cours, si la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre, alors le vecteur v appartient au sous-espace $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ si, et seulement si, la famille (u_1, u_2, u_3, v) est liée.

Par conséquent, le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

appartient à $\text{Im } A$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 3 & 2 & 1 & t \end{pmatrix} = 0.$$

En développant par la dernière colonne, on obtient ainsi une équation cartésienne de l'image de A .

$$V \in \text{Im } A \iff 2x - 8z + 2t = 0.$$

- Comme $2 \times 1 - 8 \times 3 + 2 \times 4 \neq 0$, le vecteur B n'appartient pas à l'image de A .

🔗 Si on ne dispose pas d'une équation cartésienne pour représenter l'hyperplan $\text{Im } A$, on peut calculer le rang de la matrice obtenue en concaténant A et B .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier assez rapidement que le rang de cette matrice est égal à 4, ce qui prouve que la colonne B n'est pas une combinaison linéaire des colonnes qui engendrent l'image de A .

Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible et que B est nilpotente.

1. Si ces deux matrices commutent : $AB = BA$, alors les matrices $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

2. Sinon, la matrice $A + B$ n'est pas nécessairement inversible.

✎ On généralise ici un résultat du cours : si x est un élément nilpotent d'indice n dans un anneau A , alors $1_A - x$ est inversible et

$$(1_A - x)^{-1} = 1_A + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Comme $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, on sait que l'indice de nilpotence de B est inférieur à n :

$$B^n = 0_n.$$

Comme les matrices A et B commutent, on sait que

$$(A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k} = A^n - B^n = A^n$$

$$(A + B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k} = A^n - (-B)^n = A^n$$

et comme A^n est inversible (puisque A est inversible), on en déduit que les deux matrices $A \pm B$ sont inversibles avec

$$(A - B)^{-1} = (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k},$$

$$(A + B)^{-1} = (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k}.$$

✎ La formule de la somme géométrique

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) * \left(\sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \right)$$

est vraie dans n'importe quel anneau $(A, +, *)$, commutatif ou non, pourvu que les deux éléments x et y considérés ici commutent entre eux.

2. Il est clair que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Il est tout aussi clair que la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

✎ Il suffit de trouver un contre-exemple, le plus simple est le meilleur.

On commence donc par choisir la matrice nilpotente la plus simple qui soit.

Pour que la somme $A + B$ ne soit pas inversible, il suffit que la seconde colonne de cette matrice soit nulle, ce qui impose la seconde colonne de A .

Pour que A soit inversible, il suffit alors de choisir une première colonne non proportionnelle à la seconde colonne qu'on vient de choisir.

Et le tour est joué !

|| Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$. On suppose que $f \circ f = \omega$. Démontrer que $\text{rg } f \leq 2$.

Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc

$$f(y) = (f \circ f)(x) = 0_E.$$

Ainsi $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ et, d'après le Théorème du rang,

$$\dim E = 4 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f \geq 2 \dim \text{Im } f,$$

donc $\text{rg } f \leq 2$.

Variante avec calculs élémentaires

Nous allons démontrer que l'hypothèse $f \circ f = \omega$ implique que la dimension de $\text{Ker } f$ est au moins égale à 2.

- Si $\dim \text{Ker } f = 0$, alors f est injective et $f \circ f$ est injective : c'est impossible.
- Si $\dim \text{Ker } f = 1$, alors il existe un vecteur $\alpha \neq 0_E$ tel que $\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha$. Si $f \circ f(x) = 0_E$, alors

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in \text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha.$$

Si $\alpha \notin \text{Im } f$, alors la relation précédente devient $f(x) = 0_E$, donc $\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Ker } f$ et, comme l'inclusion réciproque est évidente, on en déduit que $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$, donc $\dim \text{Ker}(f \circ f) = 1$: c'est impossible.

Si au contraire $\alpha \in \text{Im } f$, alors il existe $\alpha_0 \in E$ tel que $\alpha = f(\alpha_0)$ et la propriété sur x nous donne un scalaire λ tel que

$$f(x) = \lambda \alpha = f(\lambda \alpha_0)$$

c'est-à-dire

$$x - \lambda \alpha_0 \in \text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha$$

et donc $x \in \text{Vect}(\alpha, \alpha_0)$. On a cette fois démontré que

$$\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Vect}(\alpha, \alpha_0)$$

et donc que $\dim \text{Ker}(f \circ f) \leq 2$: c'est impossible.

• En définitive, la dimension de $\text{Ker } f$ est au moins égale à 2 et donc (Théorème du rang !) le rang de f est au plus égal à 2.

Soient E , un espace vectoriel et u , un endomorphisme nilpotent de E .

On considère un vecteur $x \in E$ et on suppose que l'entier naturel k est choisi de telle sorte que

$$u^k(x) \neq 0_E.$$

Alors la famille

$$\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^k(x))$$

est libre.

Réduction du problème.

Comme u^k est linéaire et que $u^k(x) \neq 0_E$, il est clair que $x \neq 0_E$.

L'ensemble

$$I_x = \{\ell \in \mathbb{N} : u^\ell(x) \neq 0_E\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $k = 0$ puisque $x \neq 0_E$!). Cette partie est majorée par l'indice de nilpotence d de u : comme u^d est l'endomorphisme nul, le vecteur $u^d(x)$ est nul et

$$\forall \ell \geq d, \quad u^\ell(x) = u^{\ell-d}(u^d(x)) = u^{\ell-d}(0_E) = 0_E$$

donc $\ell \notin I_x$ pour tout $\ell \geq d$.

▮ Ce raisonnement n'est donc possible que pour $\ell \geq d$.

En effet, comme l'endomorphisme u est nilpotent, il n'est pas inversible et l'endomorphisme u^m est défini si, et seulement si, l'entier m est un entier naturel.

D'après l'Axiome de bon ordre, l'ensemble I_x admet un plus grand élément ℓ_0 tel que

$$u^{\ell_0}(x) \neq 0_E \quad \text{et} \quad u^{\ell_0+1}(x) = 0_E.$$

• Si on démontre que la famille

$$\mathcal{F}_0 = (x, u(x), \dots, u^k(x), \dots, u^{\ell_0}(x))$$

est libre, alors la famille $\mathcal{F}$ sera libre en tant que sous-famille de la famille libre $\mathcal{F}_0$.

Il suffit donc de démontrer que la famille $\mathcal{F}_0$ est libre.

• **Démonstration dans le cas particulier** $k = \ell_0$

Pour les raisons qu'on vient d'exposer, on suppose ici que $u^k(x) \neq 0_E$ et que $u^{k+1}(x) = 0_E$.

▮ On peut raisonner "de proche en proche" (ce qui est une peu rigoureuse façon de raisonner par récurrence) ou, plus rapidement, par l'absurde en invoquant à nouveau l'Axiome de bon ordre.

Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors il existe une famille de scalaires

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

telle que

$$\sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell \cdot u^\ell(x) = 0_E.$$

Comme

$$\{0 \leq \ell \leq k : \alpha_\ell \neq 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément k_0 (Axiome de bon ordre). Ainsi,

$$\begin{aligned} 0_E &= \sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \sum_{0 \leq \ell < k_0} \underbrace{\alpha_\ell}_{=0} u^\ell(x) + \sum_{\ell=k_0}^k \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \underbrace{\alpha_{k_0}}_{\neq 0} u^{k_0}(x) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell u^\ell(x). \end{aligned}$$

Comme $k_0 \leq k$, alors $k - k_0 \in \mathbb{N}$, donc l'endomorphisme u^{k-k_0} est bien défini et, par linéarité,

$$\begin{aligned} 0_E &= u^{k-k_0}(0_E) \\ &= \alpha_{k_0} u^{k-k_0}(u^{k_0}(x)) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell u^{\ell+k-k_0}(x) \\ &= \alpha_{k_0} u^k(x) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell \cdot 0_E \end{aligned}$$

car $\ell + k - k_0 = k + (\ell - k_0) \geq k + 1$ pour tout entier $\ell > k_0$.

✎ C'est ici qu'il est important d'avoir supposé que

$$u^{k+1}(x) = 0_E.$$

On obtient ainsi $\alpha_{k_0} u^k(x) = 0_E$ alors que le scalaire α_{k_0} n'est pas nul (par définition de l'indice k_0) et que le vecteur $u^k(x)$ n'est pas nul (par hypothèse de l'énoncé) : c'est absurde !

✎ On a ainsi démontré que la famille

$$(x, u(x), \dots, u^k(x))$$

était libre, quel que soit l'entier $k \in I_x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent, alors

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

2. Si $u_1, \dots, u_n$ sont des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux, alors la composée

$$u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul.

☞ Il s'agit ici de généraliser un résultat du cours : si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n , alors l'indice de nilpotence de u est inférieur à n et u^n est l'endomorphisme nul.

1. Comme u et v sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension n , leur indice de nilpotence est strictement inférieur à n et

$$u^n = v^n = \omega.$$

☛ Il est clair que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et donc que

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg} v.$$

☛ Comme u et v commutent, le sous-espace $F = \operatorname{Im} v$ est stable par u et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ v).$$

Comme v n'est pas l'endomorphisme nul, alors $\dim F = \operatorname{rg} v \geq 1$.

☛ Considérons l'endomorphisme u_F de F induit par restriction de u au sous-espace stable F . Pour tout $x \in F$,

$$u_F(x) = u(x) \in F$$

donc

$$\forall x \in F, \quad (u_F)^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

Ainsi, u_F est un endomorphisme nilpotent de F et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F < \dim F = \operatorname{rg} v.$$

Par définition de l'image d'une application linéaire, un vecteur y appartient à $\operatorname{Im} u_F$ si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $y = u_F(x) = u(x)$ c'est-à-dire, par définition du sous-espace F , s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$y = u(x) = u(v(x_0)) = (u \circ v)(x_0) = (v \circ u)(x_0)$$

(On rappelle que u et v commutent.) Autrement dit :

$$\operatorname{Im} u_F = \operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F = \operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u).$$

On a ainsi démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

☞ Par symétrie, on a également démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u) < \operatorname{rg} u.$$

2. Considérons des endomorphismes nilpotents $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux et la famille d'entiers naturels $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$ définie par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad d_k = \operatorname{rg}(u_1 \circ \dots \circ u_k).$$

• Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$ est nilpotent :

$$(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k)^n = u_1^n \circ u_2^n \circ \cdots \circ u_k^n = \omega$$

car les endomorphismes u_ℓ commutent deux à deux et leurs indices de nilpotence respectifs sont tous majorés par n (= la dimension de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent).

• Il est clair que $d_1 = \text{rg } u_1 < n$ et, d'après ce qui précède, pour tout $1 \leq k < n$, deux cas se présentent :

— ou bien l'endomorphisme $v_k = u_1 \circ \cdots \circ u_k$ est nul et, dans ce cas,

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = u_1 \circ \cdots \circ u_k \circ \cdots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul ;

— ou bien v_k est un endomorphisme nilpotent non nul qui commute avec u_{k+1} et, dans ce cas, $d_{k+1} < d_k$.

Si l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ n'était pas l'endomorphisme nul, alors on aurait une famille strictement décroissante de n entiers naturels strictement compris entre 0 et n :

$$0 < d_n < d_{n-1} < \cdots < d_1 < n$$

ce qui est évidemment impossible.

La composée $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ est donc l'endomorphisme nul.

Soient E , un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $p_1, \dots, p_n$, des endomorphismes non nuls de E tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$

1. Les sous-espaces vectoriels $\text{Im } p_i$ (avec $1 \leq i \leq n$) sont en somme directe.

2. Le rang de p_i est égal à 1 pour tout $1 \leq i \leq n$.

1. Considérons des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i \in \text{Im } p_i.$$

Par hypothèse, $p_i \in L(E)$ et $p_i \circ p_i = p_i$, donc p_i est un projecteur. Comme $x_i \in \text{Im } p_i$, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = p_i(x_i)$$

et donc que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad p_j(x_i) = (p_j \circ p_i)(x_i) = 0_E.$$

Par linéarité de p_j ,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n p_j(x_i) = x_j$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.

On a ainsi démontré que les sous-espaces vectoriels $\text{Im } p_j$ étaient en somme directe.

2. On a donc

$$\bigoplus_{j=1}^n \text{Im } p_j \subset E$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n \text{rg } p_j \leq \dim E = n.$$

Par hypothèse, aucun des endomorphismes p_j n'est l'endomorphisme nul, donc

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \text{rg } p_j \geq 1.$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{(\text{rg } p_j - 1)}_{\geq 0} \leq (n - n) = 0$$

et donc que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \text{rg } p_j = 1.$$

|| Soient $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que AB est semblable à la matrice $\text{Diag}(0, 9, 9)$.
 || Calculer le rang de BA et déterminer BA .

• Par hypothèse, $AB \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}(AB)P = \text{Diag}(0, 9, 9).$$

Autrement dit : $(P^{-1}A)(BP) = \text{Diag}(0, 9, 9)$. Comme

$$BA = (BP)(P^{-1}A),$$

quitte à remplacer A par $P^{-1}A$ et B par BP , on peut donc supposer que le produit AB est égal à $\text{Diag}(0, 9, 9)$ (et pas seulement semblable à cette matrice diagonale).

• Par hypothèse, il est clair que le rang de AB est égal à 2.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de ses lignes, ainsi qu'au nombre de ses colonnes. Par conséquent, les rangs de A , B et BA sont tous inférieurs à 2.

• Comme $\text{Im}(AB) \subset \text{Im } A$, le rang de AB est inférieur au rang de A . On a donc :

$$2 = \text{rg}(AB) \leq \text{rg } A \leq 2$$

et donc $\text{rg } A = 2$. Comme $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, les deux colonnes de A sont linéairement indépendantes et le noyau de la matrice A est donc réduit au vecteur nul.

Il existe donc une matrice ligne $L_0 \in \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $A_0 \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} L_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

• Le rang de B est inférieur à 2 et le nombre de colonnes de B est égal à 3, donc la famille des colonnes de B est liée et le noyau de B n'est donc pas réduit au vecteur nul.

Si $BX = 0$, alors

$$0 = ABX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} X$$

et par conséquent

$$X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le noyau de B n'est pas réduit au vecteur nul, on a donc démontré que

$$BX = 0 \iff X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que le rang de B est égal à 2.

Il existe donc une matrice $B_0 \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$B = (0_{2,1} \quad B_0).$$

• Finalement, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & L_0 B_0 \\ 0_{2,1} & A_0 B_0 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = 0_{2,1} L_0 + B_0 A_0.$$

Autrement dit,

$$A_0 B_0 = 9I_2, \quad L_0 B_0 = 0_{1,2}, \quad BA = B_0 A_0.$$

Comme B_0 est inversible, on en déduit que $L_0 = 0_{1,2}$ et que $A_0 = 9B_0^{-1}$.

On a ainsi démontré que

$$BA = 9I_2$$

et en particulier que $\text{rg}(BA) = 2$.

Soit u , un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ tel que

$$u^3 + u = 0.$$

1. Démontrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u \quad \text{et que} \quad \text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + I).$$

2. Démontrer que u n'est pas injectif et que $\text{rg } u = 2$.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous indique que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u. \quad (5)$$

Par ailleurs, si le vecteur y appartient à $\text{Ker } u \cap \text{Im } u$, alors il existe un vecteur x tel que $y = u(x)$ et $u^2(x) = u(y) = 0_E$. Or, par hypothèse,

$$0_E = u^3(x) + u(x) = u(u^2(x)) + u(x) = u(0_E) + y = y.$$

Donc $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont en somme directe et, d'après la relation (5) sur les dimensions,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

Par hypothèse, le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u . Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux nous donne

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + I). \quad (6)$$

On déduit de cette décomposition que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Ker}(u^2 + I)$$

et de (5) que $\dim \text{Ker}(u^2 + I) = \dim \text{Im } u$.

Par ailleurs, pour tout vecteur $y \in \text{Im } u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et donc

$$(u^2 + I)(y) = u^3(x) + u(x) = 0_E$$

donc $\text{Im } u \subset \text{Ker}(u^2 + I)$.

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure à l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + I).$$

En appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, on a obtenu

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + I).$$

Il faut alors résister à la tentation d'identifier $\text{Im } u$ et $\text{Ker}(u^2 + I)$: un sous-espace peut avoir une infinité de supplémentaires !

(Seul le supplémentaire orthogonal, quand il existe, est unique.)

2. Si u est injectif, alors $\text{Ker } u = \{0_E\}$ et par conséquent $E = \text{Ker}(u^2 + I)$. On a donc

$$u^2 = -I$$

et en particulier

$$(\det u)^2 = -1$$

(puisque la dimension de E est *impaire*), ce qui est absurde (puisque $\det u \in \mathbb{R}$).

♣ On déduit de (5) que $\operatorname{rg} u < 3$ et donc $\operatorname{rg} u \leq 2$.

Comme u n'est pas l'endomorphisme nul (par hypothèse), le sous-espace $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$ n'est pas réduit au vecteur nul (d'après (6)) et il existe donc un vecteur $x_0 \neq 0_E$ dans ce sous-espace.

La famille (x_0) est donc libre et, d'après le Théorème d'augmentation des familles libres, la famille $(x_0, u(x_0))$ est liée si, et seulement si, le vecteur $u(x_0)$ appartient au sous-espace engendré par x_0 ; autrement dit, s'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x_0) = \alpha \cdot x_0.$$

En appliquant u , on en déduit que

$$u^2(x_0) = \alpha^2 \cdot x_0 \quad \text{et donc que} \quad \alpha^2 \cdot x_0 = -x_0$$

puisque $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2 + I)$. Comme $x_0 \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible (puisque α est réel).

Par conséquent, la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre. Comme $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2 + I)$ et que $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$ est un sous-espace stable par u , on a justifié que cet espace contenait une famille libre de deux vecteurs.

✎ *Quel que soit le polynôme P , les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u .*

Ainsi,

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2 + I) \geq 2.$$

Finalement, on a démontré que

$$\operatorname{rg} u = 2 \quad \text{et que} \quad \dim \operatorname{Ker} u = 1$$

d'après (5).

✎ *On peut aboutir au résultat en étudiant le polynôme caractéristique de u .*

On connaît un polynôme annulateur de $u : X(X^2 + 1)$. Le polynôme minimal de u est un polynôme unitaire, non constant, qui divise tous les polynômes annulateurs. Comme u n'est pas l'endomorphisme nul, on en déduit que le polynôme minimal de u est égal à $(X^2 + 1)$ ou à $X(X^2 + 1)$.

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 (la dimension de E) et possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme minimal (ce dernier point est au programme lorsque le polynôme minimal est scindé mais pas dans le cas général).

Par conséquent, le polynôme caractéristique est de la forme

$$(X^2 + 1)^m \quad \text{ou} \quad X^{m_1}(X^2 + 1)^{m_2}$$

où les entiers m , m_1 et m_2 sont au moins égaux à 1. Comme le degré est égal à 3, la seule possibilité est $X(X^2 + 1)$.

Comme 0 est une racine simple du polynôme caractéristique, la dimension du noyau est égale à 1 et le rang est donc égal à 2 (5).

3. Comme $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, on peut choisir un vecteur e_1 qui dirige $\operatorname{Ker} u$.

On choisit ensuite un vecteur e_2 , non nul, dans $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$. On a justifié plus haut que le couple $(e_2, e_3) = (e_2, u(e_2))$ était alors une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$. Comme ce sous-espace est un plan, on a donc trouvé une base!

On dispose ainsi

- d'un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$
- et d'une base de $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$.

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E , on en déduit que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de E .

Par choix de e_1 , on a $u(e_1) = 0_E$.

Par choix de e_3 , on a $u(e_2) = e_3$ et comme $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + I)$, on a

$$u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2.$$

Donc la matrice de u relative à cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ Pour bien comprendre la question posée, il faut d'abord lire la matrice A comme il convient ! Cette matrice est diagonale par blocs :

$$A = \text{Diag}(A_0, A_1)$$

avec $A_0 = (0) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ et

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cela doit alors faire penser à une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels (une droite et un plan) stables par $\mathfrak{u}$ et donc à une base de E adaptée à la décomposition (6).

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$. Trouver un polynôme annulateur simple de B . Aboutir à une contradiction et conclure.
3. Démontrer que A est semblable à C .

1. La matrice A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Elle admet donc 0 pour seule valeur propre et, si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à $\text{Diag}(0, 0, 0)$, donc on aurait $A = 0_3$.

La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2. On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = 0_3.$$

Par conséquent, $B^6 = A^3 = 0_3$ et B admet X^6 pour polynôme annulateur.

Comme $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son polynôme minimal est un diviseur unitaire de X^6 dont le degré est compris entre 1 et 3 (au sens large). Il y a donc trois possibilités :

- si le polynôme minimal de B est X , alors $B = 0_3$ et $A = B^2 = 0_3$: impossible !
- si le polynôme minimal de B est X^2 , alors $B^2 = 0_3$ et $A^2 = B^4 = 0_3$: impossible !
- si le polynôme minimal de B est X^3 , alors $B^3 = 0_3$ et

$$A^2 = B^4 = B^3 \cdot B = 0_3$$

ce qui est impossible aussi.

Bref, rien ne va. Par conséquent, notre hypothèse initiale est fautive et il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

3. Notons f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On a donc

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2.$$

Analyse — S'il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans laquelle la matrice de f est C , alors il faut que

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = 0, \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1.$$

Synthèse — La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_2, e_1, e_3)$ est une base (permutation des vecteurs de la base canonique) et la matrice de f dans cette base est bien égale à C .

Les matrices A et C sont donc semblables.

|| Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $M^n = I_2$. Alors $M^{12} = I_2$.

La matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$:

$$X^n - 1 = \prod_{0 \leq k < n} (X - e^{i2k\pi/n})$$

donc elle est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique est un polynôme de degré 2, lui aussi scindé dans $\mathbb{C}[X]$, dont les racines (= les valeurs propres complexes de M) sont des racines de $X^n - 1$, c'est-à-dire des racines n -ièmes de l'unité.

Comme la matrice M est à coefficients entiers, son polynôme caractéristique est lui aussi à coefficients entiers et donc réels. Trois cas se présentent donc :

- ou bien le polynôme caractéristique admet une racine réelle double (1 ou -1) et, comme M est diagonalisable, $M = \pm I_2$, donc $M^2 = I_2$ et a fortiori $M^{12} = I_2$;
- ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes (1 et -1) et, comme M est diagonalisable, M est semblable à la matrice de symétrie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc $M^2 = I_2$ et, une fois encore, $M^{12} = I_2$;

- ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$\zeta = e^{i2k\pi/n} \quad \text{et} \quad \bar{\zeta} = e^{-i2k\pi/n}$$

si bien que

$$\chi = (X - \zeta)(X - \bar{\zeta}) = X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} X + 1$$

et la matrice M est alors semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$.

✎ Pour bien comprendre la discussion suivante, il faut se rappeler que l'ensemble $\mathbb{U}_m$ des racines m -ièmes de l'unité est contenu dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n -ièmes de l'unité si, et seulement si, m divise n .

Dans ce dernier cas, comme le polynôme caractéristique est à coefficients entiers, il faut que les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k < n$ vérifient la condition

$$2 \cos \frac{2k\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire

$$\cos \frac{2k\pi}{n} \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}.$$

Si ce cosinus est égal à 0, alors $\frac{2k\pi}{n} = \pi/2$ et les racines du polynôme caractéristique sont $\pm i \in \mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_{12}$.

Si ce cosinus est égal à $\pm 1/2$, alors $\frac{2k\pi}{n} = \pi/3$ ou $2\pi/3$ et les racines du polynôme caractéristiques sont $e^{\pm i\pi/3}$ (qui appartiennent à $\mathbb{U}_6$ et donc à $\mathbb{U}_{12}$) ou $e^{\pm i2\pi/3}$ (racines cubiques de l'unité, qui appartiennent aussi à $\mathbb{U}_{12}$).

Enfin, si ce cosinus est égal à ± 1 , alors $\frac{2k\pi}{n} = 0$ ou π et, dans ce cas, les racines sont réelles : ± 1 et appartiennent à $\mathbb{U}_{12}$.

Dans tous les cas, la matrice M est semblable à la matrice diagonale $\text{Diag}(\zeta, \bar{\zeta})$ et la matrice M^{12} à

$$\begin{pmatrix} \zeta^{12} & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}^{12} \end{pmatrix} = I_2$$

(puisque ζ et $\bar{\zeta}$ sont nécessairement des racines douzièmes de l'unité.

Seule la matrice I_2 est semblable à I_2 , donc $M^{12} = I_2$.

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

1. La propriété à établir est évidente pour $P = 1$ et pour $P = X$.
Si elle est vraie pour $P = X^k$, alors

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k B \stackrel{\text{H.R.}}{=} \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée (par récurrence) pour $P = X^k$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

on a

$$XP' = \sum_{k=0}^d a_k k X^k$$

et le résultat est ainsi établi par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Supposons que B soit diagonalisable. Alors le polynôme minimal P de B est scindé, à racines (réelles!) simples.

D'après la formule précédente, il faut donc que P et XP' soient des polynômes annulateurs de A . Les valeurs propres de A doivent donc être des racines de P , mais aussi des racines de XP' .

Comme P n'a que des racines simples, aucune racine de P n'est racine de P' . Par conséquent, il faut que toutes les racines de P soient aussi racines de X et P n'admet donc qu'une seule racine : 0 et il s'agit d'une racine simple.

Donc le polynôme minimal de B est égal X et $B = 0_{2n}$.

- Réciproquement, si $A = 0_n$, alors $B = 0_{2n}$ est évidemment diagonalisable!
- En conclusion, la matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est nulle.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on suppose qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie : $\exp(M) = A$.

1. Démontrer que M admet une unique valeur propre. Préciser la forme de cette valeur propre.
2. Démontrer que M est triangulaire supérieure.
3. Résoudre l'équation $\exp(M) = A$.

1. En tant que matrice à coefficients complexes, la matrice M est trigonalisable. Si elle admet deux valeurs propres distinctes, alors elle est même diagonalisable. D'après le cours, la matrice $A = \exp(M)$ serait alors diagonalisable.

Mais la matrice A n'admet qu'une seule valeur propre (elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux). Par conséquent, si la matrice A était diagonalisable, elle serait en fait diagonale — et ce n'est clairement pas le cas !

La matrice M admet donc une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

D'après le cours, e^λ est une valeur propre de $\exp(M) = A$, donc $e^\lambda = -1$. Par conséquent, il existe un entier impair $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\operatorname{Sp}(M) = \{ik\pi\}.$$

2. Comme $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, son polynôme caractéristique est égal à $(X - \lambda)^2$ et, pour les raisons expliquées plus haut, son polynôme minimal est lui aussi égal à $(X - \lambda)^2$.

Le polynôme minimal est un diviseur unitaire non constant du polynôme caractéristique. Il n'y a donc que deux possibilités : $(X - \lambda)$ et $(X - \lambda)^2$. Comme $M \neq \lambda I_2$, le polynôme minimal est égal à $(X - \lambda)^2$.

En posant $N = M - \lambda I_2$, on a une matrice nilpotente d'indice 2 :

$$N \neq 0_2, \quad N^2 = 0_2$$

telle que $M = \lambda I_2 + N$. Comme N et I_2 commutent, on déduit de la formule du binôme que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell \\ &= \lambda^k I_2 + k \lambda^{k-1} N. \end{aligned} \quad (\text{car } N^2 = 0_2)$$

Par conséquent,

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} I_2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \lambda^{k-1}}{k!} N = e^\lambda I_2 + e^\lambda N.$$

Comme $\exp(M) = A$, on en déduit que $e^\lambda = -1$ (ce qui confirme le résultat démontré précédemment) et que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien démontré que la matrice M était triangulaire :

$$M = \lambda I_2 + N = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Comme on vient de le voir, la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(M) = A$ si, et seulement si, il existe un complexe λ tel que

$$e^\lambda = -1 \quad \text{et} \quad M = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe λ vérifie $e^\lambda = -1$ si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2p + 1)i\pi$. Donc la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(M) = A$ si, et seulement si, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} (2p + 1)i\pi & -1 \\ 0 & (2p + 1)i\pi \end{pmatrix}.$$

On considère un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et un endomorphisme f de E tel que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Soit $x \in \text{Ker}(f - I) \cap \text{Im}(f - I)$. Démontrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que

$$x = f(y) - y.$$

Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x , y et n .

2. Démontrer que

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus \text{Im}(f - I).$$

3. Soit $x \in E$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p f^k(x).$$

Démontrer que la suite $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

L'hypothèse sur les normes signifie que l'application linéaire f est continue et que $\|f\| \leq 1$. On en déduit par récurrence que

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f^n(u)\| \leq \|u\|$$

et donc que $\|f^n\| \leq 1$.

1. Comme $x \in \text{Im}(f - I)$, il existe bien $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.
Comme de plus $x \in \text{Ker}(f - I)$, alors $f(x) = x$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x = f^k(x) = f^k(f(y) - y) = f^{k+1}(y) - f^k(y).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - f^k(y) = f^n(y) - y$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{1}{n} \cdot (f^n(y) - y).$$

2. On en déduit en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leq \frac{\|f^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

Cette propriété étant vraie pour tout entier $n \geq 1$, on en déduit par passage à la limite que $x = 0_E$.

• Nous venons de montrer que les deux sous-espaces vectoriels

$$\text{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - I)$$

sont en somme directe. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et que f est un endomorphisme de E , on déduit du théorème du rang que

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f - I) + \dim \text{Im}(f - I)$$

et donc que

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus \text{Im}(f - I).$$

3. Soit $x \in E$. D'après la première question, il existe deux vecteurs

$$x_1 \in \text{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad x_2 \in \text{Im}(f - I)$$

tels que $x = x_1 + x_2$. On a donc $f(x_1) = x_1$ et il existe un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. On vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) = x_1 + f^k(x_2) = x_1 + f^{k+1}(y_2) - f^k(y_2).$$

Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad v_p(x) = x_1 + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1}(y_2) - y_2).$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \|v_p(x) - x_1\| &= \frac{1}{p+1} \|f^{p+1}(y_2) - y_2\| \\ &\leq \frac{1}{p+1} (\|f^{p+1}(y_2)\| + \|y_2\|) \\ &\leq \frac{2}{p+1} \|y\|_2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p(x) = x_1$$

où x_1 est le projeté de x sur $\text{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\text{Im}(f - I)$.

☞ *Ce qui précède est vraie pour n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie, que la norme soit associée à un produit scalaire ou pas...*

Complément

☛ On a utilisé (deux fois!) plus haut que, pour tout vecteur $x_2 \in \text{Im}(f - I)$, il existait un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. Bien entendu, un tel vecteur y_2 n'est pas unique!

$$f(y_2) - y_2 = f(y'_2) - y'_2 \iff y'_2 - y_2 \in \text{Ker}(f - I)$$

Comme E est un espace euclidien,

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus [\text{Ker}(f - I)]^\perp$$

et la projection orthogonale π_2 sur $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$ est bien définie.

Si $y_2 \in E$ vérifie $f(y_2) - y_2 = x_2$, alors on pose $y'_2 = \pi_2(y_2)$ et on a donc

$$y_2 = y'_2 + \underbrace{[y_2 - y'_2]}_{\in \text{Ker}(f - I)}$$

ce qui prouve que $f(y'_2) - y'_2 = x_2$. Il existe donc un vecteur $y'_2 \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp$ tel que $x_2 = f(y'_2) - y'_2$.

☞ *Après avoir analysé la situation, nous passons à la synthèse.*

☛ Considérons l'application linéaire

$$\varphi : [\text{Ker}(f - I)]^\perp \rightarrow \text{Im}(f - I)$$

définie par

$$\forall y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp, \quad \varphi(y) = f(y) - y.$$

D'après l'analyse qui précède, cette application linéaire est surjective. De plus, cette application est injective :

$$y \in \text{Ker } \varphi \iff y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp \cap \text{Ker}(f - I) = \{0_E\}.$$

L'application φ est donc un isomorphisme de $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$ sur $\text{Im}(f - I)$.

☛ Comme $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$ est un espace vectoriel de dimension finie, sa sphère unité S est compacte (elle est fermée et bornée) et l'application linéaire φ est continue. L'application numérique $\|\varphi\|$ est donc bornée et atteint ses bornes sur S .

Comme l'application linéaire φ est injective et que le vecteur nul n'appartient pas à S , l'application φ ne s'annule pas sur S et l'application $\|\varphi\|$ ne prend que des valeurs strictement positives sur S .

Il existe donc deux réels strictement positifs α et β et deux vecteurs unitaires y_m et y_M de $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$ tels que

$$\forall y \in S, \quad 0 < \alpha = \|\varphi(y_m)\| \leq \|\varphi(y)\| \leq \|\varphi(y_M)\| = \beta.$$

Les valeurs α et β sont respectivement le minimum et le maximum atteint par l'application

$$\|\varphi\| : [\text{Ker}(f - I)]^\perp \rightarrow \mathbb{R}$$

sur la sphère unité de $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$.

On en déduit (par linéarité de φ et homogénéité de la norme) que

$$\forall y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp, \quad \alpha\|y\| \leq \|\varphi(y)\| \leq \beta\|y\|$$

et donc (puisque φ est un isomorphisme) que

$$\forall x \in \text{Im}(f - I), \quad \frac{1}{\beta}\|x\| \leq \|\varphi^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|.$$

Notons π , la projection sur $\text{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\text{Im}(f - I)$. On sait que $I - \pi$ est la projection sur $\text{Im}(f - I)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - I)$ et, comme E est un espace vectoriel de dimension finie, on sait que ces deux endomorphismes de E sont des applications linéaires continues.

On a démontré dans l'exercice que la suite d'applications linéaires $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait simplement sur E vers la projection π .

On a démontré plus haut que

$$v_p(x) = \pi(x) + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I)(\varphi^{-1} \circ (I - \pi)(x))$$

pour tout $x \in E$. On a donc

$$v_p = \pi + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I) \circ \varphi^{-1} \circ (I - \pi)$$

et par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|v_p - \pi\| &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \|f^{p+1} - I\| \|\varphi^{-1}\| \|I - \pi\| \\ &\leq \frac{1}{p+1} \cdot (\|f^{p+1}\| + \|I\|) \|\varphi^{-1}\| \|I - \pi\| \\ &\leq \frac{2}{p+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \|I - \pi\|. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v_p - \pi\| = 0$$

ou, autrement dit, que la suite d'applications linéaires $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur la sphère unité de E vers la projection π .

Pour tous P et Q dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Déterminer deux réels a et b tels que l'expression

$$\varphi(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

soit minimale de deux manières :

- en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$;
- en choisissant a et b de telle sorte que le polynôme $(X^2 - aX - b)$ soit orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.

La première question est une question de cours archi-classique, il faut prendre soin de citer clairement tous les théorèmes qu'on applique (et ils sont quelques-uns).

1. Comme P et Q sont des polynômes, la fonction $[t \mapsto P(t)Q(t)]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\langle P | Q \rangle$ est bien définie (premier théorème : condition suffisante d'existence d'une intégrale).

Il est alors clair que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une application bilinéaire et symétrique à valeurs réelles.

Comme la fonction $[t \mapsto P(t)^2]$ est positive et que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle P | P \rangle$ est positive (deuxième théorème : positivité de l'intégrale).

Comme la fonction $[t \mapsto P(t)^2]$ est **continue** et positive et que la longueur de l'intervalle d'intégration est **strictement positive**, si l'intégrale $\langle P | P \rangle$ est nulle, alors la fonction $[t \mapsto P(t)^2]$ est nulle sur l'intervalle d'intégration $[0, 1]$ (troisième théorème : nullité de l'intégrale).

Comme P est un polynôme et qu'il possède une infinité de racines (= tous les réels entre 0 et 1 au moins), c'est le polynôme nul (quatrième théorème : caractérisation du polynôme nul).

Par conséquent, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. L'expression $\varphi(a, b)$ est égale à $\|X^2 - (aX + b)\|^2$. D'après le cours, cette expression est minimale si, et seulement si, $(aX + b)$ est le projeté orthogonal du vecteur X^2 sur le sous-espace $\text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

La suite de l'exercice consiste donc à mettre en pratique deux caractérisations du projeté orthogonal.

Première caractérisation

Si $(e_k)_{1 \leq k \leq d}$ est une base orthonormée du sous-espace F , alors le projeté orthogonal du vecteur x sur F est le vecteur

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^d \langle e_k | x \rangle \cdot e_k.$$

NB : si $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq d}$ est une base orthogonale de F , alors

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^d \frac{\langle \varepsilon_k | x \rangle}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$

Deuxième caractérisation

Si $(u_k)_{1 \leq k \leq d}$ est une base de F , orthogonale ou non, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y tel que

$$y \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_d) = F$$

et que

$$\forall 1 \leq k \leq d, \quad \langle y - x | u_k \rangle = 0.$$

On connaît une base de F : le couple $(1, X)$. On peut donc choisir $\varepsilon_1 = 1$ et chercher ε_2 orthogonal à ε_1 de la forme

$$\varepsilon_2 = X + \lambda.$$

✎ On aura reconnu une version élémentaire de l'algorithme de Gram-Schmidt.

On a donc

$$0 = \langle \varepsilon_1 | \varepsilon_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot (t + \lambda) dt = \frac{1}{2} + \lambda,$$

ce qui donne

$$\varepsilon_2 = X - \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1\|^2 &= \int_0^1 1 dt = 1, \\ \|\varepsilon_2\|^2 &= \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4} dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\ \langle X^2 | \varepsilon_1 \rangle &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \\ \langle X^2 | \varepsilon_2 \rangle &= \int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Le projeté orthogonal de $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$\frac{1/3}{1} \cdot 1 + \frac{1/12}{1/12} \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{6}.$$

✎ Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|} \right) = \left(1, \sqrt{12} \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right) \right).$$

Il faut penser à la racine carrée !

♣ Le projeté orthogonal du vecteur $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est de la forme $y = aX + b$. Il doit vérifier de plus

$$\langle X^2 - (aX + b) | 1 \rangle = \langle X^2 - (aX + b) | X \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 t^2 - at - b dt = \int_0^1 t^3 - at^2 - bt dt = 0.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} a/2 + b = 1/3 \\ a/3 + b/2 = 1/4 \end{cases}$$

dont la solution est bien entendu $(a, b) = (1, -1/6)$.

Soient E , un espace euclidien et u , un endomorphisme de E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$. Un tel endomorphisme est dit **normal**.

Les endomorphismes auto-adjoints et les isométries vectorielles sont évidemment des endomorphismes normaux.

1. Pour tout $x \in E$,

$$\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2.$$

2. En déduire que u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

3. Démontrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

4. Si u est diagonalisable, alors u est auto-adjoint.

1. Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|^2 &= \langle u^*(x) | u^*(x) \rangle = \langle x | (u \circ u^*)(x) \rangle \\ &= \langle x | (u^* \circ u)(x) \rangle && (u \text{ et } u^* \text{ commutent}) \\ &= \langle u(x) | u(x) \rangle = \|u(x)\|^2. \end{aligned}$$

2. Comme l'endomorphisme I est auto-adjoint,

$$(u - \lambda I)^* = (u^* - \lambda I).$$

Par conséquent, si l'endomorphisme u est normal, alors

$$(u - \lambda I)^* \circ (u - \lambda I) = (u - \lambda I) \circ (u^* - \lambda I).$$

D'après la question précédente,

$$\forall x \in E, \quad \|(u^* - \lambda I)(x)\|^2 = \|(u - \lambda I)(x)\|^2$$

et en particulier

$$\forall x \in E, \quad u^*(x) - \lambda x = 0_E \iff u(x) - \lambda x = 0_E.$$

Autrement dit : u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et si la matrice d'un endomorphisme u quelconque relative à cette base $\mathcal{B}$ est la matrice A , alors la matrice de l'adjoint u^* relative à $\mathcal{B}$ est la matrice A^T .

On en déduit que, d'une manière générale, les endomorphismes u et u^* ont mêmes valeurs propres (les polynômes caractéristiques sont égaux), mais aussi que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre ont même dimension puisque

$$\operatorname{rg}(u - \lambda I) = \operatorname{rg}(u^* - \lambda I).$$

L'hypothèse de normalité sur u nous donne un résultat beaucoup plus fort : les sous-espaces propres sont égaux !

• Variante.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de u . Le sous-espace propre

$$F = \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$$

est stable par u^* (puisque u et u^* commutent) et donc par $(u^* - \lambda I)$.

Quels que soient les vecteurs x et y dans F ,

$$\langle u(x) - \lambda x | y \rangle = \langle 0_E | y \rangle = 0$$

mais, par définition de l'adjoint,

$$0 = \langle u(x) - \lambda x | y \rangle = \langle x | u^*(y) - \lambda y \rangle.$$

On a remarqué que le vecteur $u^*(y) - \lambda y$ appartenait au sous-espace F et on voit qu'il est orthogonal à tous les vecteurs x de F . Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi démontré que

$$\forall y \in \text{Ker}(u - \lambda I), \quad u^*(y) = \lambda y.$$

Autrement dit, $\text{Ker}(u - \lambda I) \subset \text{Ker}(u^* - \lambda I)$. Par symétrie, l'inclusion réciproque est vraie et les sous-espaces propres sont donc égaux.

3. Soient λ et μ , deux valeurs propres distinctes de u . On considère un vecteur propre x associé à λ et un vecteur propre y associé à μ . On déduit de la question précédente que $u^*(y) = \mu y$.

Par conséquent,

$$\lambda \langle x | y \rangle = \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle = \mu \langle x | y \rangle.$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle x | y \rangle = 0$ et donc que les sous-espaces propres $\text{Ker}(u - \lambda I)$ et $\text{Ker}(u - \mu I)$ sont orthogonaux.

4. Si l'endomorphisme normal u est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^{\perp} \text{Ker}(u - \lambda I).$$

En choisissant une base orthonormée de chaque sous-espace propre de u , on obtient alors une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u .

Dans cette base, la matrice de u est diagonale (base de vecteurs propres) et donc symétrique. Comme la matrice de u relative à une base orthonormée bien choisie est symétrique réelle, on en déduit que $u = u^*$.

Soit E , un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in E$, la suite de terme général $\|x - u_n\|$ converge.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1. Pour $x = 0_E$, la suite $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc elle est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie possède une valeur d'adhérence. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a donc une valeur d'adhérence.

2. Il existe donc une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$. Avec $x = \ell$, on sait que la suite de terme général $\|u_n - \ell\|$ converge. Comme la suite extraite de terme général $\|u_{\varphi(n)} - \ell\|$ tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$$

et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k,$$

on pose

$$\|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Pour tout $b \in \mathbb{C}$, on étudie la forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(b).$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
2. Si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.
3. On suppose que $|b| = 1$. En considérant les polynômes

$$P_n = \sum_{k=0}^n \bar{b}^k X^k,$$

on montre que la forme linéaire f n'est pas continue.

4. Si $|b| < 1$, alors la forme linéaire f est continue. Calculer la norme subordonnée $\|f\|$.

1. Les a_k sont nuls à partir d'un certain rang, donc la famille $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille bornée de réels positifs. Par conséquent, la borne supérieure $\|P\|$ est bien définie et à valeurs réelles.

On vérifie sans peine (cf cours) que

$$\|P\| = 0 \implies P = 0$$

et que

$$\forall P \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|.$$

Enfin, comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité triangulaire :

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

Ainsi, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $\|X^n\| = 1$ et

$$f(X^n) = b^n$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(X^n)| = +\infty.$$

La forme linéaire f n'est donc pas bornée sur la sphère unité de E , donc elle n'est pas continue.

3. Comme $|b| = 1$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\bar{b}^k| = 1$$

et par conséquent $\|P_n\| = 1$: on étudie encore une suite de polynômes situés sur la sphère unité de E .

Par ailleurs, comme $|b| = 1$,

$$f(P_n) = \sum_{k=0}^n \bar{b}^k \cdot b^k = \sum_{k=0}^n |b|^{2k} = n + 1$$

ce qui montre à nouveau que la forme linéaire f n'est pas bornée sur la sphère unité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(P_n)| = +\infty.$$

La forme linéaire f n'est donc pas continue.

4. Si $|b| < 1$, alors

$$|f(P)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k b^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b|^k \leq \|P\| \sum_{k=0}^n |b|^k$$

puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_k| \leq \|P\|.$$

La série géométrique $\sum |b|^k$ est convergente, donc

$$\forall P \in E, \quad |f(P)| \leq \frac{1}{1-|b|} \cdot \|P\|,$$

ce qui prouve que la forme linéaire f est lipschitzienne et que

$$\|f\| \leq \frac{1}{1-|b|}.$$

• Supposons que $b = |b| e^{i\theta}$ et posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta} X^k.$$

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(P_n) = \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta} |b|^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n |b|^k.$$

Il existe donc une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(P_n)| = \frac{1}{1-|b|}.$$

On en déduit que

$$\sup_{\|P\|=1} |f(P)| \geq \frac{1}{1-|b|}.$$

Mais le premier calcul avait montré que

$$\sup_{\|P\|=1} |f(P)| \leq \frac{1}{1-|b|}$$

et par conséquent

$$\|f\| = \sup_{\|P\|=1} |f(P)| = \frac{1}{1-|b|}.$$

Soit E , un espace euclidien. On note K , l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E .

1. Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que $p \in K$ si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

2. En déduire que K est compact.

1. (Question de cours)

♣ Si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in E$, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

(Théorème de Pythagore).

✎ Cette propriété signifie qu'un projecteur orthogonal est toujours une application linéaire continue et que $\|p\| \leq 1$.

Comme $p(x) = x$ pour tout vecteur $x \in \text{Im } p$, on en déduit que, en général, $\|p\| = 1$.

♣ Réciproquement, si p n'est pas une projection orthogonale, alors il existe deux vecteurs $u \in \text{Im } p$ et $v \in \text{Ker } p$ tels que $\langle u | v \rangle \neq 0$. (En particulier, ces deux vecteurs sont distincts de 0_E .)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = u + t \cdot v \quad \text{si bien que} \quad p[x(t)] = u.$$

En calculant $\|x(t)\|^2$, on vérifie qu'il existe des réels t tels que

$$\|x(t)\| > \|u\| = \|p[x(t)]\|.$$

2. L'ensemble K est une partie de $L(E)$, espace vectoriel de dimension finie. Cet espace peut être muni de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme euclidienne.

♣ D'après la question précédente,

$$\forall p \in K, \quad \|p\| \leq 1,$$

donc K est une partie bornée de $L(E)$.

♣ Considérons une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projecteurs orthogonaux qui converge vers une endomorphisme $f \in L(E)$.

Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f(x) - p_n(x)\| \leq \|f - p_n\| \|x\|$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = f(x).$$

De manière analogue, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \| (f \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x) \| \\ & \leq \| (f \circ f)(x) - (p_n \circ f)(x) + (p_n \circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x) \| \\ & \leq \| (f - p_n) \circ f(x) \| + \| p_n \circ (f - p_n)(x) \| \quad (\text{inégalité triangulaire et linéarité de } p_n) \\ & \leq \|f - p_n\| \|f(x)\| + \|p_n\| \|f - p_n\| \|x\| \\ & \leq \|f - p_n\| [\|f(x)\| + \|x\|]. \end{aligned}$$

Comme $\|f - p_n\|$ tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n \circ p_n)(x) = (f \circ f)(x).$$

Comme tous les p_n sont des projecteurs,

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(x) = (p_n \circ p_n)(x)$$

donc

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (f \circ f)(x)$$

par unicité de la limite.

L'endomorphisme f est donc un projecteur. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|p_n\| \leq 1$$

donc $\|f\| \leq 1$.

La boule unité fermée de $L(E)$ est fermée : comme tous les p_n appartiennent à ce fermé, la limite f appartient encore à ce fermé.

D'après la question précédente, l'endomorphisme f est donc un projecteur orthogonal. Nous avons donc démontré que K était une partie fermée de $L(E)$.

Comme $L(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée et bornée de $L(E)$ est compacte. Donc K est compact.

Variante rapide — D'après la première question, la partie K est l'intersection de la boule unité fermée de $L(E)$ et de l'ensemble

$$[f \circ f - f = \omega_E]$$

des projecteurs de E .

L'application $[f \mapsto f \circ f - f]$ est continue de $L(E)$ dans $L(E)$ (comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, les applications polynomiales sont continues), donc l'ensemble des projecteurs de E est un fermé (image réciproque d'un singleton [=fermé] par une application continue).

L'ensemble K est donc une partie fermée (intersection de deux fermés) contenue dans une partie compacte (la boule unité d'un espace vectoriel de dimension finie), donc K est bien un compact.

Trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \tan \frac{1}{k+n}.$$

Les termes de la somme dépendent de l'indice n , par conséquent S_n n'est pas la somme partielle d'une série.

En réécrivant les termes de la somme, on fait apparaître le motif k/n :

$$\tan \frac{1}{k+n} = \tan \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+k/n)} \right)$$

qui doit faire penser aux sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Mais la tangente complique la donne !

Pour $1 \leq k \leq n$, le quotient $\frac{1}{k+n}$ est compris entre 0 et $1/n$. Il est donc petit et par conséquent

$$\tan \frac{1}{k+n} \approx \frac{1}{k+n}, \quad (7)$$

ce qui suggère que

$$S_n \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Malheureusement, la relation (7) n'a pas vraiment de sens (l'entier k est-il fixé ? s'agit-il d'un équivalent uniforme en k ?) et aucun théorème du cours ne permet de passer de cette relation de comparaison entre les termes à la relation analogue entre les sommes.

• Première méthode

La fonction $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0, \pi/4]$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi/4], \quad \tan'(x) &= 1 + \tan^2 x \\ \tan''(x) &= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \end{aligned}$$

donc

$$\forall 0 \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan''(x) \leq 2 \times 1 \times (1 + 1^2) = 4.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a donc

$$\forall x \in [0, \pi/4], \quad |\tan x - x| \leq 4 \frac{x^2}{2} = 2x^2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2} \leq \frac{2n}{(1+n)^2}. \quad (8)$$

Pour majorer une somme, on peut parfois se contenter de multiplier le plus grand terme par le nombre total de termes...

L'encadrement (8) prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = 0.$$

On a reconnu plus haut une somme de Riemann et on a déjà calculé sa limite, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2.$$

♣ Variante de la première méthode

🔗 On a travaillé sur le segment $[0, \pi/4]$ de manière assez arbitraire. Or les arguments de la fonction $\tan$ sont tous compris entre $1/2n$ et $1/n$. Il serait donc plus judicieux d'étudier $\tan$ au voisinage de 0 et plus précisément l'écart entre le graphe de $\tan$ et sa tangente à l'origine...

On considère la fonction $f = [x \mapsto \tan x - x]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1/n]$ et

$$\forall x \in [0, 1/n], \quad 0 \leq f'(x) = \tan^2 x \leq \tan^2 \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est donc lipschitzienne sur $[0, 1/n]$ avec en particulier

$$\forall x \in [0, 1/n], \quad |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq \tan^2 \frac{1}{n} \cdot |x| \leq \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}.$$

On a donc (inégalité triangulaire)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{1}{k+n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}$$

et donc (somme de n termes, tous égaux)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq \tan^2 \frac{1}{n}. \quad (9)$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = 0$$

et on peut conclure de la même manière.

🔗 Il est important de noter qu'on a utilisé ici un théorème moins précis que dans la première version (inégalité des accroissements finis, c'est-à-dire approximation au premier ordre, vs inégalité de Taylor-Lagrange au second ordre), mais on s'en est servi de façon plus judicieuse (en considérant un intervalle plus petit).

Cela explique pourquoi on a obtenu une meilleure approximation (le majorant de (9) est un infiniment petit du second ordre alors que le majorant de (8) était un infiniment petit du premier ordre).

♣ Deuxième méthode

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \tan \frac{1}{n+t}.$$

Il est clair que cette fonction est continue et décroissante. Une comparaison classique entre somme et intégrale nous donne l'encadrement suivant.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) - f(0) + \int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt \leq S_n \leq \int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt \quad (10)$$

D'une part,

$$f(n) - f(0) = \tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part, le changement de variable $t = nu$ nous donne

$$\int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt = \int_0^1 g_n(u) du \quad \text{avec} \quad g_n(u) = n \tan \frac{1}{n(1+u)}.$$

Chaque fonction g_n est intégrable sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) et

$$g_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n(1+u)} = \frac{1}{1+u}.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$ (et donc intégrable sur ce segment).

Par croissance de la fonction $\tan$ sur $[0, 1/n] \subset [0, 1]$,

$$\forall u \in [0, 1], \quad 0 \leq n \tan \frac{1}{n(1+u)} \leq n \tan \frac{1}{n}$$

et d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction $\tan$ est 2-lipschitzienne sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \tan \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n},$$

si bien que la convergence est dominée :

$$\forall n \geq 2, \forall u \in [0, 1], \quad 0 \leq g_n(u) \leq 2.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre n et, en tant que fonction de u , il est intégrable sur le segment $[0, 1]$.)

On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(u) \, du = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2$$

et finalement, on déduit de (10) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$$

par encadrement.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + x - 1.$$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un, et un seul, réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée.
3. Écrire un code Python qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie. Conjecturer la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
4. Démontrer cette conjecture.

1. La fonction f_n est continue (polynomiale) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$. Elle est aussi dérivable et

$$\forall x > 0, \quad f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$$

donc la fonction f_n est strictement croissante sur I . Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$J = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-1, +\infty[.$$

Comme $0 \in J$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in I$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f_n(1) = 1 > 0 = f_n(x_n).$$

Comme la fonction f_n est croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n < 1.$$

Comme $0 < x_n < 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_n^{n+1} < x_n^n$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n + x_n - 1 = f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n < x_{n+1}.$$

On a ainsi démontré que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ était (strictement) croissante et majorée (par 1).

3. Le code est classique.

```
def dichotomie(n, eps):
    def f(x):
        return x**n+x-1
    a, b = 0, 1
    fa = f(a)
    while b-a>eps:
        c = (a+b)/2
        fc = f(c)
        if fa*fc>0:
            a, fa = c, fc
        else:
            b = c
    return a, b

for n in range(1, 101):
    print(dichotomie(n, 0.001))
```

L'exécution de ce code suggère que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

4. Comme la suite (x_n) est croissante et majorée par 1, sa limite ℓ est elle aussi inférieure à 1. Supposons donc que $\ell < 1$. Par croissance de la suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_n^n \leq \ell^n,$$

ce qui prouve par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n + x_n - 1 = 0 + \ell - 1 = 0$$

puisque $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. On aboutit ainsi à $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Il faut donc que $\ell = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2.$$

1. Étudier la continuité de f .

2. Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq x.$$

Tracer le graphe de f .

3. On considère un réel a et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = f(x_k).$$

Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

1. La fonction $[x \mapsto [x]]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc la fonction f est en particulier continue en chaque point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $f(n) = n + (n - n)^2 = n$: chaque entier est un point fixe de f .

Lorsque x tend vers n **par valeurs supérieures**, alors $[x]$ tend vers n et $x - [x]$ tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers n .

Lorsque x tend vers n **par valeurs inférieures**, alors $[x]$ tend vers $(n - 1)$ et $x - [x]$ tend vers $n - (n - 1) = 1$, donc $f(x)$ tend vers

$$(n - 1) + 1^2 = n.$$

La fonction f est donc continue en chaque point $n \in \mathbb{Z}$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq x - [x] < 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leq (x - [x])^2 \leq x - [x]$$

et par conséquent

$$f(x) \leq [x] + (x - [x]) = x.$$

➤ Plus précisément, si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $0 < x - [x] < 1$. Donc $(x - [x])^2 < (x - [x])$ et $f(x) < x$. Les entiers sont donc les seuls points fixes de f .

• Considérons un entier $n \in \mathbb{Z}$ et deux réels $n \leq x < y < n + 1$. On a donc $[x] = [y] = n$ et

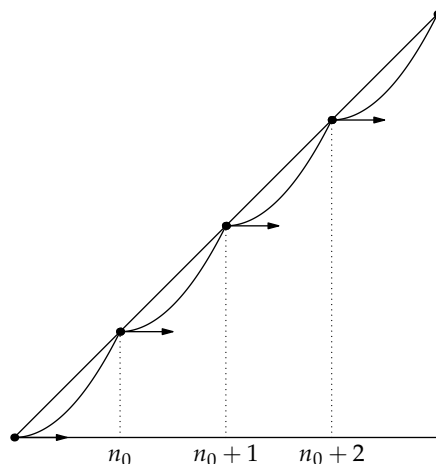
$$0 \leq x - n < y - n < 1.$$

Par conséquent,

$$f(n) = n \leq n + (x - n)^2 = f(x) < n + (y - n)^2 = f(y) < n + 1 = f(n + 1).$$

La fonction f est donc strictement croissante sur chaque segment $[n, n + 1]$.

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3. Comme $f(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = f(x_k) \leq x_k.$$

• Posons $n = \lfloor a \rfloor$. On a donc $n \leq x_0 < n + 1$.

Comme f est strictement croissante et que chaque entier est un point fixe de f , on en déduit (par récurrence) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n \leq x_k < n + 1.$$

• La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n \leq x_{k+1} \leq x_k \leq x_0 < n + 1.$$

Par conséquent, elle converge vers un réel $\ell \in [n, x_0]$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, la limite ℓ est un point fixe de f qui appartient au segment $[n, x_0] \subset [n, n + 1[$.

Comme les entiers sont les seuls points fixes de f , on en déduit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $n = \lfloor x_0 \rfloor$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Il est clair que tous les facteurs sont strictement positifs :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

donc $u_n > 0$ et

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

On sait que

$$\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3).$$

Donc

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ainsi, $\ln u_n$ est la somme des trois sommes partielles :

— la somme partielle d'une série convergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

(Critère spécial des séries alternées);

— la somme partielle d'une série divergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}$$

(comparaison bien connue des sommes partielles de la série harmonique avec une intégrale);

— la somme partielle d'une série absolument convergente (terme général dominée par le terme général d'une série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$).

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ln u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} [S_1 + o(1)] + \left[\frac{\ln n}{2} + o(\ln n)\right] + [S_2 + o(1)] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}. \end{aligned}$$

Par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

et donc que la série $\sum u_n$ est (très) grossièrement divergente.

On a calculé un équivalent de $\ln u_n$ qui ne permet pas de trouver facilement un équivalent de u_n . En effet, on a obtenu

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \frac{\ln n}{2} \cdot \exp(o(\ln n)) = \sqrt{n} \cdot \exp(o(\ln n))$$

et le dernier facteur est une forme indéterminée :

- si $o(\ln n)$ tend vers $+\infty$, ce facteur tend vers $+\infty$;
- si $o(\ln n)$ est borné, ce facteur est borné;
- si $o(\ln n)$ tend vers $-\infty$, ce facteur tend vers 0.

Avec un peu de culture, on connaît la constante d'Euler

$$\gamma \approx 0,577$$

qui est définie par

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

On en déduit alors que

$$\ln u_n = \frac{\ln n}{2} + (S_1 + \gamma + S_2) + o(1),$$

ce qui nous donne

$$u_n \sim e^{\gamma + S_1 + S_2} \cdot \sqrt{n}.$$

On dispose ainsi d'un équivalent de u_n — faussement précis, car on n'a aucune idée des valeurs de S_1 et de S_2 .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note r_n , le reste de la division euclidienne de n par 5.

1. La série $\sum \frac{r_n}{n(n+1)}$ est convergente.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k(k+1)}.$$

Exprimer S_{5n} en fonction des nombres harmoniques

$$H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}.$$

1. Par définition de la division euclidienne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r_n < 5.$$

Donc

$$\frac{r_n}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et, par comparaison avec une série de Riemann, la série est (absolument) convergente.

2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $0 \leq r \leq 4$,

$$r_k = r \iff \exists \ell \in \mathbb{N}, \quad k = 5\ell + r.$$

On peut donc décomposer S_{5n} en somme de cinq termes.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+1)(5\ell+2)} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+2)(5\ell+3)} + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+3)(5\ell+4)} \\ &\quad + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+4)(5\ell+5)} + 0 \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{5\ell(5\ell+1)} \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} - \frac{1}{5\ell+2} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+2} - \frac{1}{5\ell+3} \\ &\quad + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+3} - \frac{1}{5\ell+4} + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+4} - \frac{1}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} - \frac{4}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} + \frac{1}{5\ell+5} - \frac{1}{\ell+1} \\ &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n. \end{aligned}$$

3. Il faut alors comparer la somme

$$H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$$

à l'intégrale

$$I_n = \int_n^{5n} \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

La méthode usuelle (FAITES UNE FIGURE !) nous donne :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln 5 + \frac{1}{5n} \leq S_{5n} \leq \ln 5 + \frac{1}{n}$$

et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

✪ Comme la série converge, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente. Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ln 5.$$

🔗 En présentant les calculs de manière un peu plus abstraite (c'est-à-dire en faisant intervenir une somme double), on devrait pouvoir généraliser le résultat au cas de la division euclidienne par un entier naturel $p \geq 2$ quelconque.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f''(t) \geq \alpha^2 f(t). \quad (*)$$

1. La fonction f est convexe.
2. La dérivée f' est négative.
3. La fonction f tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)
4. La dérivée f' tend vers une limite finie en $+\infty$. (Préciser laquelle.)
5. La fonction $\alpha^2 f^2 - (f')^2$ est négative.
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}.$$

1. Comme f est positive, l'inégalité $(*)$ montre que sa dérivée seconde f'' est positive. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2. Supposons qu'il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que $f'(t_0) > 0$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse t_0 a pour expression

$$y = f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme f est convexe, son graphe est au-dessus de ses tangentes et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq f(t_0) + (x - t_0)f'(t_0).$$

Comme $f'(t_0) > 0$, le second membre tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et, par comparaison, f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. Cela contredit l'hypothèse sur f (la fonction est supposée majorée).

Par conséquent, la dérivée est négative : $f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Comme la dérivée est négative, la fonction f est décroissante. Par hypothèse, elle est positive, donc minorée et elle admet donc une limite finie $\ell \geq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\ell > 0$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) \geq \ell$$

(puisque f est décroissante) et, d'après $(*)$,

$$\forall t \geq 0, \quad f''(t) \geq \ell \alpha^2.$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall t > 0, \exists c_t > 0, \quad \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = f''(c_t) \geq \ell \alpha^2$$

et donc

$$\forall t > 0, \quad f'(t) \geq f'(0) + \ell \alpha^2 t.$$

✎ Comme f est supposée deux fois dérivable et non pas de classe $\mathcal{C}^2$, on ne peut pas appliquer ici le Théorème fondamental. On peut le remplacer par le Théorème des accroissements finis, car $f' : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est continue sur le segment $[0, t]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, t[$.

Le minorant tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ (car $\alpha > 0$ et ℓ est ici supposé strictement positif). Par comparaison, la dérivée f' tend vers $+\infty$ alors qu'il s'agit d'une fonction négative : c'est absurde!

Par conséquent, la fonction f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

4. La fonction f' est croissante (puisque f est convexe) et négative (on vient de le démontrer), donc elle tend vers une limite finie $\ell' \leq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Supposons que $\ell' < 0$. Comme f' est croissante, on a alors

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \leq \ell'.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \leq f(0) + \ell' x.$$

Comme $\ell' < 0$, on en déduit par comparaison que f tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$, ce qui est absurde (la fonction f est, par hypothèse, positive).

5. On considère la fonction $g = \alpha^2 f^2 - (f')^2$: comme f est deux fois dérivable, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = 2\alpha^2 f(x)f'(x) - 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)[\alpha^2 f(x) - f''(x)].$$

Or la dérivée f' est négative et le crochet est négatif, donc la dérivée g' est positive. La fonction g est donc croissante. Comme

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)]^2 = 0,$$

la fonction g est donc négative sur $\mathbb{R}_+$.

6. En factorisant g :

$$g(x) = [\alpha f(x) - f'(x)][\alpha f(x) + f'(x)] \leq 0$$

on obtient que

$$\forall x \geq 0, \quad \alpha f(x) + f'(x) \leq 0.$$

🔗 On sait que $\alpha > 0$, on a démontré que $f(x) \geq 0$ et que $f'(x) \leq 0$. Par conséquent, si le premier crochet est nul, alors $f(x) = f'(x) = 0$ et le second crochet est nul aussi.

Notre conclusion est donc vraie même lorsqu'on semble diviser par zéro !

Comme f est deux fois dérivable, nous définissons une fonction continue et positive g en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \alpha f(x) + f'(x).$$

🔗 Il y a un cours sur les équations différentielles, il n'y en a pas sur les inéquations différentielles !

La méthode que nous présentons ici est aussi astucieuse que fructueuse : on introduit une fonction auxiliaire g pour pouvoir considérer f comme la solution d'une équation différentielle (très facile à résoudre) et on étudie les propriétés de f selon les propriétés de g .

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) + \alpha y(x) = g(x).$$

Il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^{-\alpha x} \left(A + \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \right).$$

Pour $x = 0$, on obtient $f(0) = A$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) &= f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t) dt \\ &\leq f(0)e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

puisque la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

On pose

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. (Préciser l'expression de sa dérivée.)
2. Calculer le développement limité à l'ordre deux de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.

1. Considérons la fonction g définie par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Il est clair que la fonction g est continue sur l'intervalle $I_0 =]0, +\infty[$. De plus,

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t - t^2/2 + o(t^2)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t). \quad (*)$$

En posant $g(0) = 1$, on définit donc un prolongement de g qui est continu sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction G définie par

$$\forall x \in I = \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

est une primitive de g .

➤ Plus précisément, la fonction G est la primitive de g qui tend vers 0 en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel x^2 appartient à l'intervalle I , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = G(x^2) - G(0) = G(x^2).$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2) = 2x \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2\ln(1+x^2)}{x}.$$

2. On connaît le développement limité à l'ordre 1 de g au voisinage de 0 (*). Comme G est une primitive de G , on en déduit que

$$G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} G(0) + x - \frac{x^2}{4} + o(x^2) = x - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

(puisque $G(0) = 0$).

➤ Un développement limité n'a de sens qu'au voisinage d'un point de référence x_0 . Il est donc absurde d'intégrer un développement limité sur un intervalle donné.

En revanche, si on connaît le développement limité à l'ordre n d'une fonction g au voisinage de x_0 :

$$g(x_0 + t) \underset{t \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$$

on obtient le développement limité à l'ordre $(n+1)$ des primitives de g au voisinage de x_0 en primitivant terme à terme :

$$G(x_0 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} G(x_0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Puisqu'il s'agit d'un calcul de primitive, on prendra soin de tenir compte de la constante d'intégration $G(x_0)$!

Lorsque x tend vers 0, le réel x^2 tend aussi vers 0, ce qui permet d'obtenir le développement limité de f par substitution.

$$f(x) = G(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

➤ Mauvaise réponse ! C'est trop précis !

On pose

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$. (Préciser l'expression de sa dérivée.)
2. Démontrer que f est continue sur $[0, 1]$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Calculer le développement limité à l'ordre deux de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.

1. Pour $0 < t < 1$, on pose

$$g(t) = \frac{\ln(1-t)}{t}.$$

Il est clair que cette fonction g est continue sur $]0, 1[$. Sachant que

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{-t + o(t)}{t} = -1 + o(1),$$

on peut poser $g(0) = -1$ pour obtenir ainsi une fonction continue sur l'intervalle $I = [0, 1[$.

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction G définie par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

est alors une primitive de g et donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

• Par composition, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1[$:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \longmapsto f(x) = G(x^2) \end{array}$$

et d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2)$$

soit

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f'(x) = \frac{2 \ln(1-x^2)}{x}.$$

2. On sait que la fonction $\ln$ est intégrable au voisinage de l'origine. Lorsque t tend vers 1 (par valeurs inférieures),

$$g(t) \sim \ln(1-t)$$

donc la fonction g est intégrable au voisinage de 1. La fonction f est donc bien définie en 1 :

$$f(1) = \int_0^1 g(t) dt.$$

• Il suffit que la fonction g soit intégrable sur $[0, 1[$ pour que l'intégrale généralisée soit convergente.

Comme g est continue sur l'intervalle $[0, 1[$, elle est donc intégrable sur $[0, 1[$ et, par définition des intégrales généralisées,

$$\int_0^1 g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} G(x).$$

Par composition de limites, comme x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1,

$$f(x) = G(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow 1} G(x) = \int_0^1 g(t) dt = f(1).$$

La fonction f est donc continue sur $[0, 1]$.

✎ Comment calculer $f(1)$? Avec un changement de variable et une intégration terme à terme :

$$f(1) = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \ln u du = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Vous devriez pouvoir vérifier les détails sans difficulté.

3. L'expression de la dérivée montre que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\infty.$$

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, on peut appliquer le Théorème des accroissements finis : pour tout réel $0 < x < 1$, il existe un réel $c_x \in]x, 1[$ tel que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(c_x).$$

L'encadrement $x < c_x < 1$ prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(c_x) = -\infty$$

donc le taux d'accroissement étudié ne tend pas vers une limite finie.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

✎ On a en fait prouvé que le graphe de f avait une tangente verticale au point d'abscisse 1.

4. En primitivant le développement limité à l'ordre 0 de g , on obtient le développement limité à l'ordre 1 de G :

$$G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + o(x).$$

Comme x^2 tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut substituer pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de f :

$$f(x) = G(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 + o(x^2).$$

✎ Le graphe de f admet donc une tangente horizontale à l'origine et est situé sous cette tangente.

Le développement limité qu'on vient de calculer nous donne cette information au voisinage de l'origine seulement.

L'expression de la dérivée nous montre que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$, donc $f(x) < f(0)$ pour tout $0 < x \leq 1$: le graphe de f est donc situé sous sa tangente à l'origine sur la totalité de l'intervalle $[0, 1]$!

Calculer

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{du}{3 + \cos^2 u}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On posera $v = \tan u$.

En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, $\varphi(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $\tan$ réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$ sur $J = \mathbb{R}$. On peut donc effectuer le changement de variable $v = \tan u$ pour tout $x \in I_0$.

Si $x \in I_0$, alors le segment $[0 \leftrightarrow x]$ est contenu dans l'intervalle ouvert I_0 .

On sait que

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + v^2} \quad \text{et} \quad dv = (1 + \tan^2 u) du = \frac{du}{\cos^2 u}$$

donc, pour tout $x \in I_0$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{3}{\cos^2 u} + 1} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1 + 3(1 + v^2)} dv.$$

Autrement dit, pour tout $x \in I_0$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{3} \int_0^{\tan x} \frac{dv}{4/3 + v^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3} \tan x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3} \tan x}{2}. \end{aligned}$$

Il est utile de retenir une fois pour toutes que

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$$

pour tout $a > 0$ et pas plus difficile de retenir que

$$\int \frac{dx}{a^2 + (x + b)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x + b}{a}$$

quels que soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Comme l'intégrande est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Théorème fondamental).

On peut aussi remarquer que φ est la primitive nulle en $x = 0$ d'une fonction paire : cette fonction φ est donc impaire.

En particulier,

$$\varphi(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Par symétrie,

$$\varphi(-\pi/2) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{3 + \cos^2 u} = \varphi(\pi/2) - \varphi(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

L'intégrande étant une fonction paire et périodique, de période π , on en déduit que

$$\int_0^\pi \frac{du}{3 + \cos^2 u} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{3 + \cos^2 u} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \quad (*)$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

• Cet entier relatif n est égal à

$$\left\lfloor \frac{x + \pi/2}{\pi} \right\rfloor$$

mais cela est sans importance.

Dans le cas général ($|x - n\pi| < \pi/2$), on déduit de la relation de Chasles, de la périodicité de l'intégrande et de la propriété (*) que

$$\begin{aligned} \int_0^x \dots &= \int_0^{n\pi} \dots + \int_{n\pi}^x \dots \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} \dots + \int_0^{x-n\pi} \dots \\ &= \frac{n\pi}{2\sqrt{3}} + \varphi(x - n\pi) \end{aligned}$$

et comme $x - n\pi \in I_0$, on a finalement

$$\varphi(x) = \frac{n\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3} \tan x}{2}.$$

• Dans le cas particulier où $x = n\pi + \pi/2 = (2n + 1)\pi/2$,

$$\varphi(x) = (2n + 1)\varphi(\pi/2) = \frac{(2n + 1)\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

Pour tout réel $R > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les racines complexes de P_n ont un module supérieur à R .

▮ Pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{C}$: il possède donc n racines complexes (en comptant avec multiplicité).

Par ailleurs, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction $\exp$ (théorie des séries entières) et la fonction $\exp$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}$.

Il faut bien que les racines de P_n soient passées quelque part... Nous allons montrer qu'elles sont parties vers l'infini.

Nous allons raisonner par l'absurde en fixant $R > 0$ et en supposant qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme P_n admette au moins une racine complexe z_n telle que $|z_n| \leq R$.

▮ Il revient au même de considérer un compact K non vide et de supposer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \exists z_n \in K, P_n(z_n) = 0.$$

En effet, tout compact est borné et donc contenu dans un disque fermé de rayon $R > 0$.

✱ Autrement dit, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |z_{n_k}| \leq R \quad \text{et} \quad P_{n_k}(z_{n_k}) = 0.$$

Comme la suite $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe bornée, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$|\ell| \leq R.$$

✱ Les polynômes P_n sont les sommes partielles de la série entière dont la somme est $\exp$. Comme le rayon de convergence de cette série entière est infini, cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact contenu dans $\mathbb{C}$ et en particulier sur le disque fermé $[|z| \leq R]$. Comme ℓ et les z_{n_k} appartiennent tous à ce disque fermé, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\exp(\ell) - P_{n_k}(z_{n_k})| &\leq |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| + |\exp(z_{n_k}) - P_{n_k}(z_{n_k})| \\ &\leq |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| + \|\exp - P_{n_k}\|_{\infty} \end{aligned}$$

où la borne supérieure est prise sur le disque fermé $[|z| \leq R]$.

Comme z_{n_k} converge vers ℓ et que $\exp$ est continue sur $\mathbb{C}$, on a bien

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\exp(\ell) - \exp(z_{n_k})| = 0.$$

Comme la suite des fonctions $(P_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque fermé $[|z| \leq R]$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\exp - P_{n_k}\|_{\infty} = 0.$$

Par encadrement, on a donc démontré que

$$\exp(\ell) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{n_k}(z_{n_k}).$$

Or, par définition, $P_{n_k}(z_{n_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\exp(\ell) = 0$: impossible !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que

$$\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, \quad |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}.$$

2. Démontrer que

$$\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, \quad \left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{t}{n}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(G_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1], \quad g'_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \left(-\frac{t}{n}\right).$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|g'_n(t)| = \frac{te^t}{n} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1 \times e^t}{n} \times 1 = \frac{e^t}{n}. \quad (*)$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Comme la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, t]$, on déduit de l'encadrement précédent et de l'inégalité des accroissements finis que

$$|g_n(t) - g_n(0)| \leq |t - 0| \max_{0 \leq s \leq t} |g'_n(s)| \leq \frac{te^t}{n}.$$

En divisant par $e^t > 0$, on en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - e^{-t} \right| \leq \frac{t}{n}.$$

3. On déduit de l'encadrement précédent le résultat très classique :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

et on en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction constante 1.

Cela nous conduit à conjecturer que la suite $(G_n)_{n \geq 1}$ converge vers la fonction $[x \mapsto x]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |G_n(x) - x| &= \left| \int_0^x g_n(t) - 1 dt \right| \leq \int_0^x |g_n(t) - 1| dt \\ &\leq \int_0^x \frac{te^t}{n} dt \\ &\leq \frac{ex}{n} \leq \frac{e}{n}. \end{aligned} \quad (*)$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et de limite nulle (lorsque n tend vers $+\infty$), ce qui prouve que la suite de fonctions $(G_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $[x \mapsto x]$.

On considère le segment $I = [0, \pi/2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall t \in I, \quad f_n(t) = n \cos^n t \sin t.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Soit $0 < \alpha < \pi/2$. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I_\alpha = [\alpha, \pi/2]$.

Cette suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur I ? On pourra considérer la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) g(t) dt = g(0).$$

pour toute fonction g continue sur I .

1. Pour $t = 0$, il est clair que $f_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $0 < t \leq \pi/2$, on a $0 \leq \cos t < 1$ et par croissances comparées (suite géométrique vs puissance),

$$\sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction identiquement nulle ω .

2. Pour $0 < \alpha < \pi/2$, par décroissance de la fonction $\cos$ sur I ,

$$\forall \alpha \leq t \leq \pi/2, \quad 0 \leq f_n(t) = \sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \leq 1 \times n \times \cos^n \alpha.$$

Ce majorant est indépendant de $t \in I_\alpha$ et comme $0 \leq \cos \alpha < 1$, il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (à nouveau par croissances comparées).

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I_α vers la fonction ω .

• Toutes les fonctions f_n sont continues sur I et la fonction ω est également continue sur I . Comme I est un segment (en particulier, un intervalle borné), si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I vers ω , alors on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \omega(t) dt = 0.$$

✎ Il n'est pas utile de re-démontrer ce résultat, même si la démonstration est très simple : si $a < b$, alors

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \left[\frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} = 1,$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction ω .

✎ L'argument utilisé pour démontrer que la suite de fonctions ne convergeait pas uniformément sur I prouve en fait que la convergence n'est pas dominée.

Ce qui suit établit la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un nouveau sens : on parle de convergence $*$ -faible ou de convergence étroite et la limite n'est plus une fonction mais la mesure de Dirac en 0, c'est-à-dire la forme linéaire ε_0 définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad \varepsilon_0(f) = f(0).$$

✎ Pour alléger les notations mais surtout pour faciliter la compréhension, nous n'utiliserons pas l'expression des fonctions f_n , mais seulement les propriétés suivantes :

— les fonctions f_n sont positives;

— les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, 1]$ et leur intégrale est égale à 1.

On en déduit que

$$g(0) = \int_0^1 f_n(t)g(0) dt \quad (\dagger)$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) = \int_0^1 f_n(t)[g(t) - g(0)] dt. \quad (\star)$$

La relation $(\dagger)$, sur laquelle tout repose, doit être comparée à la propriété bien connue du calcul des probabilités : toute constante α est aussi l'espérance d'une variable aléatoire presque sûrement égale à α .

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g est continue en $t = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad |g(t) - g(0)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et par conséquent,

$$\forall t \in [0, 1], \quad |g(t) - g(0)| \leq |g(t)| + |g(0)| \leq 2\|g\|_\infty.$$

D'après $(\star)$ et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) \right| \leq \int_0^1 |f_n(t)[g(t) - g(0)]| dt \\ &\leq \int_0^1 f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \end{aligned}$$

puisque les fonctions f_n sont positives.

Avec la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq \int_0^\alpha f_n(t)|g(t) - g(0)| dt + \int_\alpha^1 f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t) \cdot \varepsilon dt + \int_\alpha^1 f_n(t) \cdot 2\|g\|_\infty dt && (\text{positivité des } f_n) \\ &\leq \varepsilon \int_0^\alpha f_n(t) dt + 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \\ &\leq \varepsilon + 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \end{aligned}$$

car f_n est positive sur $[0, 1]$ et son intégrale est égale à 1 (donc son intégrale sur le sous-segment $[0, \alpha]$ est inférieure à 1).

🔗 Dans la première intégrale, il est indifférent d'intégrer sur $[0, \alpha]$ ou sur $[0, 1]$ puisqu'on intègre une fonction dont les valeurs sont petites.

En revanche, dans la seconde intégrale, il est essentiel de n'intégrer que sur le sous-segment $[\alpha, 1]$: c'est sur un tel intervalle, et pas sur l'intervalle $[0, 1]$, que la convergence de la suite de fonctions est dominée.

Puisque la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[\alpha, 1]$, le second terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) \right| \leq 2\varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t) dt = g(0).$$

🔗 On pourra rapprocher cette démonstration de la preuve du Théorème de Cesaro.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum n^{(-1)^n} x^n$$

et calculer sa somme.

Il faut d'abord comprendre que la série entière étudiée est la somme de deux séries entières :

$$\sum (2k)x^{2k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Il est clair que, pour $|x| < 1$, les deux termes généraux sont des suites bornées, donc le rayon de convergence de la somme est au moins égal à 1.

D'autre part, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $n^{(-1)^n} x^n$ n'est pas bornée (par croissances comparées d'une suite géométrique divergente et d'une suite de puissances). Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1.

En conclusion, le rayon de convergence est égal à 1.

• Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^{2k} = x \sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k-1}.$$

(Le terme en $k = 0$ est nul !)

On reconnaît ici la série dérivée de $\sum x^{2k}$. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_1(x) &= x \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k \right) \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= x \frac{2x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et on reconnaît cette fois la série primitive de $\sum x^{2k}$. On peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (toujours parce que le rayon de convergence est strictement positif) et comme $S_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_2(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \pi/4.$$

En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire un équivalent simple de I_n et déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$.

3. Calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

4. Calculer la somme suivante.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1. La fonction $\tan$ est croissante sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan t \leq 1. \quad (\star)$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan^n t \leq 1$$

et comme l'intégration conserve les inégalités, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}.$$

• Comme la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a donc

$$I_n x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^n)$$

et comme la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in]-1, 1[$, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum I_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t) \tan^n t \, dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

✎ Il faut reconnaître immédiatement la forme $u' \cdot u^n$!

• D'après $(\star)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan^{n+1} t = \tan^n t \cdot \tan t \leq \tan^n t$$

et donc, en intégrant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+2} \leq I_{n+2} + I_n \leq 2I_n$$

et on déduit de la relation précédente que

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)},$$

ce qui prouve que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

• De ce fait, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $I_n x^n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum I_n x^n$ est grossièrement divergente.

Cela prouve que le rayon de convergence est au plus égal à 1 et finalement

$$R = 1.$$

3. Soit $|x| < 1$.

• On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad u_n(t) = x^n \tan^n t.$$

Chaque fonction u_n est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ et donc intégrable sur ce segment.

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad |u_n(t)| \leq x^n.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et comme $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ est convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/4]$.

Par conséquent, la somme de la série de fonctions est continue sur $[0, \pi/4]$ et

$$\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$$

• Puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $x \tan t$, on connaît sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t}.$$

On change de variable :

$$u = \tan t, \quad \frac{du}{1+u^2} = dt$$

pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)(1-xu)}.$$

Il reste à décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+u^2)(1-xu)} = \frac{a+bu}{1+u^2} + \frac{c}{1-xu}.$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant terme à terme, on trouve

$$c+a=1, \quad b=ax, \quad c=bx=ax^2$$

donc

$$a = \frac{1}{1+x^2}, \quad b = \frac{x}{1+x^2}, \quad c = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2u}{1+u^2} - x \cdot \frac{-x}{1-xu} du$$

et donc

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \ln 2 - x \ln(1-x) \right).$$

4. Il est clair que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

est convergente (Critère spécial des séries alternées).

On a justifié que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2n+1} = I_{2n+2} + I_{2n}$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n I_{2n} - (-1)^{n+1} I_{2(n+1)}.$$

Comme la suite $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, la série $\sum (-1)^n I_{2n}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Par linéarité, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} I_{2(n+1)} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

et D , l'ensemble des réels x pour lesquels la somme $S(x)$ est définie.

1. Identifier l'ensemble D . La somme S est-elle continue sur D ?

2. Démontrer que la série entière

$$\sum \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$.

3. En déduire la limite de $(1-x)S(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, donc

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n \sim \frac{x^n}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, le terme général de la série entière

- tend vers 0 pour $|x| \leq 1$;
- tend vers l'infini pour $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 et, d'après le cours,

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, l'équivalent calculé plus haut prouve que la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Pour $x = -1$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ est alternée, la valeur absolue $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ du terme général tend vers 0 en décroissant, donc la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées.

On ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison avec une série semi-convergente, mais seulement avec une série absolument convergente.

Dans le cas $x = -1$, l'équivalent prouve seulement que la série n'est pas absolument convergente et il faut étudier le comportement du terme général (et non pas celui de l'équivalent trouvé) pour pouvoir conclure.

En conclusion, $D = [-1, 1[$ et, d'après le Théorème d'Abel, la somme S est continue sur D .

D'après le cours, la somme d'une série entière est toujours continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Le Théorème d'Abel nous dit que : si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors la convergence est uniforme sur $[0, R]$ et la somme est donc continue sur $[0, R]$.

Pour $x = -1$, on peut donc appliquer le Théorème d'Abel avec

$$a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad R = 1$$

ou vérifier directement que la série de fonctions converge uniformément sur $[-1, 0]$ en exploitant le Critère spécial des séries alternées (domination du reste d'ordre n) : pour $-1 \leq x \leq 0$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ est alternée et la valeur absolue

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} |x|^n$$

du terme général tend vers 0 en décroissant, donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 0], \quad |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

Comme la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente de terme général positif, on peut démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty,$$

ce qui justifie qu'on cherche un ordre de grandeur de $S(x)$ au voisinage gauche de 1.

- Considérons une série $\sum a_n$ de terme général positif, qu'on suppose divergente.
Pour $A > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_n \geq A + 1.$$

Une fonction polynomiale étant continue, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n > A$$

et donc qu'il existe un seuil $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A.$$

Comme les a_n et x sont positifs, on en déduit que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad S(x) \geq \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A$$

et on a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty.$$

2. Comme $\sin' = \cos$, on déduit de l'Inégalité des accroissements finis que la fonction $\sin$ est lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \right| &\leq \left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1, 1]$ et ce majorant est équivalent à $1/n^{3/2}$, c'est donc le terme général d'une série convergente.

On a ainsi démontré que la série entière convergeait normalement sur le segment $[-1, 1]$.

3. On déduit de la question précédente que la fonction T définie par

$$T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^{n+1} \\ &= \sin 1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \\ &= \sin 1 \cdot x + T(x). \end{aligned}$$

Comme T est continue sur $[-1, 1]$, elle admet en particulier une limite finie, égale à $T(1)$, au voisinage gauche de 1, ce qui prouve que

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)S(x) = \sin 1 + T(1).$$

✎ Il se trouve qu'on peut calculer $T(1)$! En effet, il s'agit de la somme d'une série télescopique :

$$T(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin 1 = -\sin 1.$$

On a donc en fait démontré que

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)S(x) = 0$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \nearrow 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

On a bien calculé un ordre de grandeur de $S(x)$, mais pas un équivalent !

On pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt.$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

2. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x)$$

et calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1. Pour $x \in \Omega =] -1, +\infty[$ et $t \in I =]0, \pi/2[$, on pose

$$\varphi(t, x) = \sin^x t = \exp(x \ln \sin t).$$

• (Régularité)

Pour tout $t \in I$, il est clair que $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω (voir l'expression exponentielle de φ) et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) = (\ln \sin t)^k \varphi(t, x).$$

• (Intégrabilité pour $k = 0$)

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur l'intervalle I .

Pour $x > 0$, cette fonction tend vers 0 au voisinage de 0, donc elle est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur I .

Pour $x = 1$, cette fonction tend vers 1 au voisinage de 0 donc (même raisonnement) elle est intégrable sur I .

Pour $-1 < x < 0$,

$$\varphi(t, x) = \frac{\sin^x t}{t^x} \cdot t^x = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x \cdot t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$$

donc la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est bien intégrable au voisinage de $t = 0$ et donc intégrable sur I .

• (Intégrabilité pour $k \geq 1$)

On doit savoir que $\ln \sin t \sim \ln t$ lorsque t tend vers 0.

Pour tout $x > -1$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (\ln \sin t)^k \cdot t^x \sim \ln^k t \cdot t^x$$

et donc, pour tout $-1 < y < x$,

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^y),$$

ce qui prouve l'intégrabilité sur I .

• (Domination)

Pour $t \in I$, le facteur $\ln \sin t$ est strictement négatif, donc la fonction $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est décroissante et positive. Par conséquent,

$$\forall a > -1, \forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in I, \quad |\varphi(t, x)| \leq \varphi(t, a)$$

et, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\forall a > -1, \forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq |\ln \sin t|^k \cdot \varphi(t, a).$$

On a trouvé un majorant indépendant du paramètre x et intégrable sur I .

Le majorant trouvé dépend du paramètre k , mais c'est sans importance.

On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: quel que soit $\alpha > -1$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\alpha, +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \alpha, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) dt.$$

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{\alpha > -1} [\alpha, +\infty[$$

et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 (\ln \sin t)^k \sin^x t dt.$$

2. Soit $x \geq 0$. On a donc $x + 2 \geq 2 \geq 0$ et, comme x et $x + 2$ sont positifs, on peut intégrer par parties et

$$\begin{aligned} F(x+2) &= \int_I \sin^x t \cdot \sin^2 t dt \\ &= \int_I \sin^x t \cdot (1 - \cos^2 t) dt \\ &= F(x) - \int_I \sin^x t \cdot \cos t \times \cos t dt \\ &= F(x) - \left[\frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times \cos t \right]_0^{\pi/2} + \int_I \frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times (-\sin t) dt \\ &= F(x) - \frac{1}{x+1} F(x+2), \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

♣ En particulier,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)F(n+1)F(n+2) &= (n+2)F(n+1) \frac{n+1}{n+2} F(n) \\ &= (n+1)F(n)F(n+1) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite de terme général

$$(n+1)F(n)F(n+1)$$

est constante. Elle est donc égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)F(n)F(n+1) = F(0)F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Comme $0 \leq \sin t \leq 1$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad 0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$$

donc la suite de terme général $F(n)$ est décroissante et positive. On en déduit d'une part que

$$(n+1)F(n)^2 \geq (n+1)F(n)F(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part que

$$nF(n)^2 \leq nF(n-1)F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $F(n) \geq 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq F(n) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc que

$$F(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

✎ Il reste à passer de la variable entière n à la variable réelle x . Il suffit essentiellement de savoir que

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1,$$

ce qui donne en particulier

$$1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad \frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{\lceil x \rceil} \leq 1$$

pour tout $x > 1$.

• La fonction F est décroissante et positive (même justification que pour la suite de terme général $F(n)$, cf ci-dessus), donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(\lceil x \rceil) \leq F(x) \leq F(\lfloor x \rfloor).$$

D'après ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} F(\lfloor x \rfloor) = \sqrt{\frac{x}{\lfloor x \rfloor}} \sqrt{\frac{2\lfloor x \rfloor}{\pi}} F(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

par produit et composition de limites. De même,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} F(\lceil x \rceil) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et nous pouvons maintenant conclure :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[x \mapsto \cos^n x]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

Comme $0 \leq \cos x < 1$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\forall x \in]0, \pi/2], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n x = 0 \quad (11)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \pi/2], \quad 0 \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x < 1 \quad (12)$$

donc, en intégrant (12),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

et, par convergence dominée [(11) et (12)],

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

On peut donc appliquer le Critère spécial des séries alternées et en conclure que la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

✎ L'étude classique des intégrales de Wallis montre que

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

et donc que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann).

✎ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k x.$$

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et par conséquent intégrable.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, on reconnaît une série géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}$$

ce qui justifie la convergence simple vers une fonction continue :

$$\forall 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

mais aussi que la convergence est dominée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1 + \cos^{n+1} x}{1 + \cos x} \leq \frac{2}{1 + \cos x}.$$

✎ Le majorant trouvé est indépendant du paramètre n et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (puisque'il admet un prolongement continu sur le segment $[0, \pi/2]$).

On peut remarquer que la domination est vraie sur le segment $[0, \pi/2]$ puisque $f_n(0) = 1$ ou 0 selon la parité de n , mais pas la convergence simple : la suite de terme général $f_n(0)$ est divergente. C'est sans importance pour appliquer le Théorème de convergence dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \sum_{k=0}^n u_k$$

donc on a démontré que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

• Il reste à calculer l'intégrale. On pose pour cela

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

ce qui nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Après simplifications, il ne reste que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^1 dt = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1.$$

Démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2 t^2} dt$$

et calculer sa valeur.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+n^2 t^2}.$$

• Il est clair que chaque fonction u_n est intégrable sur I (continue sur l'intervalle fermé I et $\mathcal{O}(1/t^2)$ lorsque t tend vers $+\infty$).

• Il est tout aussi clair que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $I_0 =]0, +\infty[$ car

$$\forall t > 0, \quad u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

🔗 La série $\sum u_n(0)$ est grossièrement divergente!

• La somme S est donc définie sur I_0 :

$$\forall t \in I_0, \quad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$$

Chaque fonction u_n est continue sur I_0 et

$$\forall a > 0, \forall t \in [a, +\infty[, \quad |u_n(t)| \leq \frac{1}{1+n^2 a^2}.$$

🔗 Il s'agit de majorer une fonction monotone (décroissante) de t ...

Le majoration est indépendant de t et c'est le terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et donc sur l'intervalle

$$I_0 = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

• Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $|u_n(t)|$ tend vers 0 en décroissant. Le Critère spécial des séries alternées permet donc de dominer le reste de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I_0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq |u_{n+1}(t)| \quad (*)$$

et en particulier pour $n = 0$:

$$\forall t \in I_0, \quad |S(t)| = |R_0(t)| \leq |u_1(t)|.$$

On a démontré que la fonction u_1 était intégrable sur I_0 , donc la fonction S est intégrable sur I_0 (théorème de comparaison).

Nous avons (enfin!) démontré l'existence de l'intégrale.

• Décomposons la somme en somme partielle et reste : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} S(t) dt &= \int_0^{+\infty} S_n(t) + R_n(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} S_n(t) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} u_k(t) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale (les u_k et le reste R_n sont des fonctions intégrables sur I_0 comme on l'a démontré).

Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $R_n(t)$ tend vers 0 (puisque c'est le reste d'une série convergente) et, d'après (*),

$$\forall n \geq 1, \forall t \in I_0, \quad |R_n(t)| \leq \frac{1}{1 + (n+1)^2 t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et, en tant que fonction de t , il est intégrable sur I_0 (fonction de référence), donc la convergence est dominée et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(t) dt = 0.$$

Finalement, la série de terme général

$$\int_0^{+\infty} u_k(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + k^2 t^2} = \frac{(-1)^k}{k} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}$$

converge (ce qui n'est pas surprenant) et

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} u_k(t) dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

✚ Le cours sur les séries entières nous dit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Comme la série du second membre converge pour $x = 1$, on déduit du Théorème d'Abel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} S(t) dt = \frac{-\pi \ln 2}{2}.$$

✚ L'intégrale est donc négative. C'était prévisible! En effet, d'après le Critère spécial des séries alternées, le reste est du signe du premier terme négligé et en particulier, la somme (= reste d'ordre 0) est du signe du premier terme. Donc

$$\forall t > 0, \quad S(t) \leq 0$$

et l'intégrale de S est donc négative.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(x) = e^{-x}.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Plus généralement, on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0.$$

Démontrer que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

1. La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}$$

et une solution particulière est de la forme

$$y_0(x) = Bxe^{-x}$$

donc il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

On en déduit (par croissances comparées) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

✎ Un calcul rapide montre que $B = 1$, mais on n'a même pas besoin de connaître la valeur de B pour conclure!

2. Puisque la fonction f est donnée, on peut définir une fonction auxiliaire g en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) + f(x).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est bien continue sur $\mathbb{R}$ et, par hypothèse, elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

On peut alors voir la fonction f comme une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = g(x). \quad (*)$$

Les solutions de l'équation homogène associée à $(*)$ sont de la forme

$$y(x) = Ae^{-x}.$$

On en déduit la solution générale de $(*)$ en faisant varier la constante :

$$y(x) = A(x)e^{-x} \quad \text{avec} \quad A'(x)e^{-x} = g(x),$$

donc A est une primitive de $[x \mapsto g(x)e^x]$.

Comme la fonction f est une solution de l'équation différentielle $(*)$, il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \left(K + \int_0^x g(t)e^t dt \right).$$

La valeur de K importe peu, il reste à démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt = 0.$$

☞ Tout cela est particulièrement astucieux et aussi classique qu'astucieux... Impossible de traiter cet exercice sans connaître l'astuce!

☛ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad |g(t)| \leq \varepsilon.$$

Sur le segment $[0, A]$, la fonction g est continue, donc elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, A], \quad |g(t)| \leq M.$$

Pour tout $x \geq A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x g(t)e^t dt \right| &\leq \left| \int_0^A g(t)e^t dt \right| + \left| \int_A^x g(t)e^t dt \right| \\ &\leq \int_0^A |g(t)|e^t dt + \int_A^x |g(t)|e^t dt \\ &\leq M \int_0^A e^t dt + \varepsilon \int_A^x e^t dt \\ &\leq Me^A + \varepsilon e^x. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\forall x \geq A, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq Me^A \cdot e^{-x} + \varepsilon.$$

Comme $Me^A \cdot e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un seuil $A' > 0$ tel que

$$\forall x \geq A', \quad 0 \leq Me^A \cdot e^{-x} \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\forall x \geq \max\{A, A'\}, \quad \left| e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat attendu.

La probabilité pour qu'une personne passant sous l'échafaudage d'un peintre en bâtiment reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y), le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte de peinture).

1. On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y . Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

2. On suppose que N personnes sont passées, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y , ainsi que l'espérance et la variance de X . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

✎ Nous allons commencer par traiter ces deux questions dans un même cadre général, avant de passer aux applications numériques.

On modélise la situation décrite par l'énoncé de la manière suivante :

— il existe trois variables aléatoires N , X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui vérifient la relation suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) + Y(\omega) = N(\omega);$$

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

✎ Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait qu'on reconnaît ici un schéma de Bernoulli et que X représente, d'une certaine manière, le nombre de succès lors d'une succession de n tentatives (et Y représente alors le nombre d'échecs).

✎ On en déduit avant toute chose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(Y = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(N - X = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)} \mathbf{P}(N = n) \quad (\text{pour } 0 \leq n - k \leq n) \\ &= \binom{n}{k} q^k p^{n-k} \mathbf{P}(N = n) \quad (\text{soit } 0 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

1. On suppose pour commencer que la variable aléatoire N est presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}(N = n) = 1.$$

Dans ces conditions, l'évènement $[N \neq n]$ est négligeable et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(X = k, N = n) + \mathbf{P}(X = k, N \neq n) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(X = k \mid N = n). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

De même, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

✎ Comme N est presque sûrement constante, elle est indépendante de X . (Voir ci-dessous en cas de doute.) Comme $Y = N - X$ et que la covariance est linéaire à droite,

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, N) - \text{V}(X) = 0 - \text{V}(X) = -npq < 0.$$

Comme la covariance de X et Y n'est pas nulle, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

✎ Comme $\mathbf{P}(N = n) = 1$, on a aussi $\mathbf{P}(N = k) = 0$ pour tout entier $k \neq n$.
Pour $k \neq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a donc

$$0 \leq \mathbf{P}(X = \ell, N = k) \leq \mathbf{P}(N = k) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = k) = 0 = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = k).$$

Pour $k = n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a aussi (voir plus haut)

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = n) = \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = n).$$

Ces calculs prouvent que X et N sont indépendantes.

- 2.** On suppose maintenant que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} \end{aligned}$$

et comme $-1 + q = -p$, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

De même, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$.

En particulier, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

- ♣ Quels que soient les entiers k et ℓ , d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N - X = \ell, N = n) && \text{(puisque } X + Y = N) \\ &= \mathbf{P}(X = k, N = k + \ell) && \text{(contrainte } n = k + \ell) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = k + \ell) \mathbf{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k + \ell}{k} p^k q^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k + \ell)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\ &= \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell). \end{aligned}$$

Cela prouve bien que X et Y sont indépendantes.

En particulier, cette fois, la covariance de X et Y est nulle.

On considère une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$.

On considère que la variable aléatoire X_k indique l'année de la première floraison de la tulipe k . En considérant que, si une tulipe a fleuri une année, alors elle fleurit toutes les années suivantes, on note X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.

1. Exprimer X en fonction des variables aléatoires X_k .

2. Calculer $P(X > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que X est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

1. Par définition, la i -ième tulipe fleurit à partir de l'année X_i . Donc toutes les tulipes fleurissent l'année k si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad k \geq X_i,$$

c'est-à-dire (passage au maximum) si

$$k \geq \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

On en déduit que l'année X de la première floraison générale est donnée par

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

2. Comme on l'a vu plus haut, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[X \leq k] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i \leq k].$$

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq k) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k)$$

et comme elles suivent toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \leq k) = P(X_1 \leq k)^n = (1 - q^k)^n$$

avec $q = 1 - p \in]0, 1[$ (comme d'habitude).

• On en déduit, par passage au complémentaire et par la formule du binôme, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X > k) = 1 - (1 - q^k)^n = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \binom{n}{\ell} q^{k\ell}.$$

Le terme général de la série $\sum P(X > k)$ est donc une combinaison linéaire de séries géométriques convergentes (de raisons respectives $q, q^2, \dots, q^n$ avec $0 < q < 1$). Par conséquent, la série $\sum P(X > k)$ est convergente, donc X est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \binom{n}{\ell} \sum_{k=0}^{+\infty} (q^\ell)^k = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} \frac{(-1)^{\ell+1}}{1 - q^\ell}.$$

Il s'agit ici d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de séries convergentes, donc la linéarité de la somme suffit pour justifier l'interversion des deux symboles $\sum$. Le théorème de Fubini est hors sujet!

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . On pose $Z = X/Y$.

1. Vérifier que $Z \leq X$. Démontrer que Z admet une espérance et une variance. Préciser la valeur de $E(Z)$.

2. Caractériser la loi de Z .

✎ Pour une fois, $q \neq 1 - p$... Méfiance!

1. Comme la variable aléatoire Y suit une loi géométrique, elle est toujours supérieure à 1, donc $Z \leq X$.

Comme la variable aléatoire Z est positive, on en déduit que $Z^2 \leq X^2$.

La variable aléatoire X , de loi géométrique, admet des moments de tout ordre. Par comparaison, les variables aléatoires Z et Z^2 sont donc d'espérance finie. Donc Z admet une espérance et une variance.

✎ La variable aléatoire $1/Y$ est bien définie (puisque le dénominateur Y ne s'annule jamais) et d'espérance finie (puisque'elle est presque sûrement bornée : $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$).

Ainsi, la variable aléatoire $Z = X \times 1/Y$ apparaît comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie. Par conséquent,

$$E(Z) = E(X) \times E\left(\frac{1}{Y}\right).$$

D'après le cours, $E(X) = 1/p$ et d'après la formule de transfert,

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = \frac{-p \ln(1-q)}{q} = \frac{-p \ln p}{q}.$$

✎ Le rayon de convergence du développement en série entière de $\ln(1-x)$ est égal à 1 et $0 < q < 1$.

Finalement,

$$E(Z) = \frac{-\ln p}{q}.$$

2. Les valeurs de Z appartiennent à $\mathbb{Q}_+^*$. Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un unique couple $(n, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$r = \frac{n}{d} \quad \text{avec} \quad n \wedge d = 1$$

(représentation irréductible de r). Dans ces conditions,

$$Z(\omega) = r \iff \exists a \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} X(\omega) = an \\ Y(\omega) = ad \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[Z = r] = \bigsqcup_{a \in \mathbb{N}^*} [X = an] \cap [Y = ad].$$

Par σ -additivité de P et indépendance des variables aléatoires X et Y , on en déduit que

$$\begin{aligned} P(Z = n/d) &= \sum_{a=1}^{+\infty} P(X = an) P(Y = ad) = \sum_{a=1}^{+\infty} p(1-p)^{an-1} \cdot q(1-q)^{ad-1} \\ &= \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)^n} \cdot \frac{(1-q)^d}{1-(1-q)^d}. \end{aligned}$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$C_n = \# \{X_1, \dots, X_n\}.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, l'application $C_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire d'espérance finie.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k + n^2 \mathbf{P}(X_1 \geq k).$$

3. On suppose dorénavant que les variables aléatoires X_k sont d'espérance finie.
Démontrer que

$$\mathbf{P}(X_1 \geq k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(1/k).$$

En déduire que

$$\mathbf{E}(C_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

1. Il est clair que les valeurs de C_n sont comprises entre 1 (cas où toutes les variables aléatoires X_k prennent la même valeur) et n (cas où toutes les variables aléatoires X_k prennent des valeurs distinctes).

L'ensemble $\mathbb{N}^n$ est dénombrable (produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables) et

$$\mathbb{N}^n = \bigsqcup_{1 \leq k \leq n} E_k$$

où E_k est l'ensemble des n -uplets formés au moyen de k entiers naturels distincts.

Les ensembles E_k sont donc des ensembles dénombrables (ils sont contenus dans un ensemble dénombrable et manifestement ils sont infinis) et, pour tout entier $1 \leq k \leq n$,

$$C_n(\omega) = k \iff \exists (i_1, \dots, i_n) \in E_k, \quad (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (i_1, \dots, i_n).$$

Autrement dit,

$$[C_n = k] = \bigsqcup_{(i_1, \dots, i_n) \in E_k} [X_1 = i_1] \cap \dots \cap [X_n = i_n]$$

ce qui prouve que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad [C_n = k] \in \mathcal{A}$$

et donc que C_n est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

• Comme C_n est une variable aléatoire bornée, elle est d'espérance finie.

➤ Plus précisément, $1 \leq \mathbf{E}(C_n) \leq n$, ce qui donne de l'intérêt aux estimations qui vont suivre.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. De deux choses l'une :

- ou bien toutes les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont strictement inférieures à k et dans ce cas, elles ne peuvent pas prendre plus de k valeurs distinctes ;
- ou bien l'une d'elles au moins est supérieure à k .

Autrement dit :

$$\Omega = [X_1 < k, \dots, X_n < k] \sqcup ([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k])$$

et

$$[X_1 < k, \dots, X_n < k] \subset [C_n \leq k].$$

Comme $C_n(\omega) \leq n$ pour tout $\omega \in \Omega$, on en déduit que

$$C_n \leq k \mathbb{1}_{[X_1 < k, \dots, X_n < k]} + n \mathbb{1}_{[X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]}.$$

Comme l'espérance conserve les inégalités, on en déduit que

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k \mathbf{P}([X_1 < k, \dots, X_n < k]) + n \mathbf{P}([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]).$$

Les variables aléatoires X_k sont de même loi, donc

$$\mathbf{P}([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \geq k) = n \mathbf{P}(X_1 \geq k)$$

et finalement

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k \times 1 + n \times n \mathbf{P}(X_1 \geq k) = k + n^2 \mathbf{P}(X_1 \geq k).$$

Il n'y a plus de calcul de probabilité dans ce qui suit, c'est un résultat d'analyse. Nous considérerons donc deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq u_n \leq k + n^2 \frac{\varepsilon_k}{k} \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0.$$

et nous cherchons à en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

3. Fixons $0 < \eta < 1$ et posons $\varepsilon = \sqrt{\eta} \in]0, 1[$.
D'après les hypothèses,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{n} + n \frac{\varepsilon_k}{k}$$

et, comme $\eta > 0$, il existe un entier $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq K_0, \quad 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\forall n > K_0, \forall K_0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{n} + n \frac{\varepsilon}{k}. \quad (*)$$

Le principe du raisonnement qui va suivre est classique : c'est un passage à la borne inférieure. Si

$$\forall x \in [a, b], \quad g(n) \leq f(x)$$

alors

$$g(n) \leq \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

La mise en œuvre de ce raisonnement est (un peu) compliquée par le fait que, ici, le majorant est une fonction de la variable entière k et non pas une fonction de la variable réelle x .

Une étude rapide montre que la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n\varepsilon}{x}$$

atteint son minimum en $x_0 = n\sqrt{\varepsilon}$. Comme $0 < \varepsilon < 1$, on a $n\sqrt{\varepsilon} < n$ pour tout n et la suite de terme général $y_n = n\sqrt{\varepsilon}$ tend vers $+\infty$, donc il existe donc un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad K_0 \leq k_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor \leq n.$$

À défaut de pouvoir majorer par le minimum de la fonction f , on va majorer par une valeur particulière de f qui est assez proche du minimum de f .

On déduit donc de (*) que

$$\begin{aligned} \forall n > \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} &\leq f(k_0) = \frac{\lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor}{n} + n \frac{\varepsilon}{\lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor} \\ &\leq \frac{n\sqrt{\varepsilon} + 1}{n} + n \frac{\varepsilon}{n\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{1}{n} + 2\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $1/n$ tend vers 0, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{n} \leq \eta.$$

Finalement, en posant $N_0 = \min\{K_0, N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$,

$$\forall n > N_0, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 3\eta$$

et nous avons bien démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

On considère deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad u_n \leq k + \frac{n\varepsilon_k}{k}.$$

Démontrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$

Soient $0 < \eta < 1$ et $\varepsilon = \eta^2 > 0$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et que $\varepsilon > 0$, il existe un rang K_0 tel que

$$\forall k \geq K_0, \quad 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $K_0 \leq k \leq n$, on a donc

$$0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{k}. \quad (*)$$

Le terme médian étant indépendant de k et l'entier k prenant un nombre fini de valeurs, on peut passer au minimum dans $(*)$:

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \min_{K_0 \leq k \leq n} \left(\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{k} \right).$$

• Une étude rapide montre que la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{x}$$

atteint son minimum en

$$x = x_0 = \sqrt{n\varepsilon} = \sqrt{n}\eta.$$

Cela nous suggère de poser

$$k = \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor.$$

Comme $0 < \eta < 1$ et $1 \leq \sqrt{n} \leq n$, il est clair que $\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \leq n$ et comme $\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \geq K_0.$$

On peut donc déduire de $(*)$ que

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq f(\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor) \leq \frac{\sqrt{n}\eta + 1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{n}\eta}$$

puisque, comme on sait, $\sqrt{n}\eta \leq \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \leq \sqrt{n}\eta + 1$. Il reste donc

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\eta.$$

Comme $1/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \eta$$

et par conséquent,

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1, N_2\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 3\eta.$$

Autrement dit : la suite de terme général $u_n/\sqrt{n}$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$

Soient E , un espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose que

$$u^3 = \frac{1}{3}(u^2 + u + I).$$

1. Démontrer que u est un automorphisme de E .
2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n est une combinaison linéaire de I , u et u^2 .
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

1. Le polynôme

$$P_0 = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

est un polynôme annulateur de u et 0 n'est pas une racine de P_0 . Donc 0 n'est pas une valeur propre de u et comme E est un espace de dimension finie, u est un automorphisme de E .

✎ Variante : puisque P_0 est un polynôme annulateur de u ,

$$u \circ (3u^2 - u - I) = (3u^2 - u - I) \circ u = I$$

donc l'endomorphisme u est inversible, d'inverse

$$3u^2 - u - I.$$

NB : Cette variante ne suppose pas que E soit un espace vectoriel de dimension finie !

2. Le degré du polynôme minimal de u est inférieur à $\deg P_0 = 3$, donc

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(I, u, u^2)$$

et en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n \in \text{Vect}(I, u, u^2).$$

✎ Il y a unicité de la décomposition de u^n si, et seulement si, la famille (I, u, u^2) est libre, c'est-à-dire si le polynôme minimal de u est le polynôme unitaire associé à P_0 .

3. Il est clair que 1 est une racine de P_0 . On trouve alors

$$P_0 = (X - 1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Le discriminant réduit de $3X^2 + 2X + 1$ est égal à -2 , donc ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et P_0 est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, mais n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

On distingue donc trois cas :

- si $u = I$, alors u est diagonalisable ;
- si $u \neq I$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors le polynôme minimal μ de u est un diviseur de P_0 (à coefficients réels) et n'est pas égal à $(X - 1)$, donc

$$\mu = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = (X - 1)\left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

et u n'est pas diagonalisable (car μ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$) ;

- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors le polynôme annulateur P_0 est scindé à racines simples (une racine réelle et deux racines complexes conjuguées) et u est donc diagonalisable.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées.

1. Justifier l'existence des réels

$$M_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f''(x)|.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que

$$\forall h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3. Justifier alors l'existence de

$$M_1(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$$

et démontrer que

$$M_1(f) \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}. \quad (\star)$$

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall 0 \leq x \leq 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2 - (2 - x)^{2+\varepsilon}$$

et

$$\forall x > 2, \quad f_\varepsilon(x) = 2.$$

Démontrer que f_ε , f'_ε et f''_ε sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les valeurs de $M_0(f_\varepsilon)$, de $M_1(f_\varepsilon)$ et de $M_2(f_\varepsilon)$.

5. En déduire que le facteur 2 est la meilleure constante possible dans l'inégalité $(\star)$.

1. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure réelle (Axiome de la borne supérieure). Comme f et f'' sont définies sur $\mathbb{R}_+$, les ensembles

$$\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{et} \quad \{|f''(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$$

ne sont pas vides. Comme f et f'' sont supposées bornées, ces deux ensembles sont également majorés. Par conséquent, les deux réels $M_0(f)$ et $M_2(f)$ sont bien définis.

2. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad |f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)| \leq \frac{(b - a)^2}{2} M_2(f).$$

En particulier, pour $a = x \in \mathbb{R}_+$ et $b = x + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2(f).$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$|hf'(x)| - |f(x + h) - f(x)| \leq \frac{h^2}{2} M_2(f)$$

et donc que

$$\begin{aligned} |hf'(x)| &\leq \frac{h^2}{2} M_2(f) + |f(x + h) - f(x)| \\ &\leq 2M_0(f) + \frac{h^2}{2} M_2(f) \end{aligned}$$

(à nouveau par inégalité triangulaire). Comme $h > 0$, on en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3. Dans l'encadrement précédent, le majorant est indépendant de x . Cela prouve que la dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et par conséquent que le réel $M_1(f)$ est bien défini (pour les raisons données plus haut).

Dans cet encadrement, le minorant est indépendant de $h > 0$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \inf_{h>0} \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

Une étude (rapide!) des variations de la fonction

$$\varphi = \left[h \mapsto \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2} \right]$$

montre que

$$\inf_{h>0} \varphi(h) = \varphi\left(\sqrt{\frac{4M_0(f)}{M_2(f)}}\right) = 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Le majorant est indépendant de la variable x , on peut cette fois passer à la borne supérieure et trouver :

$$M_1(f) \leq 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

4. Il est clair que f_ε est strictement croissante sur $[0, 2]$. Comme

$$f_\varepsilon(2) = 2, \quad f_\varepsilon(0) = 2 - 2^{2+\varepsilon} = 2 - 4 \cdot 2^\varepsilon < -2$$

et que $f_\varepsilon(x) = 2$ pour tout $x > 2$, on en déduit que

$$M_0(f_\varepsilon) = 4 \cdot 2^\varepsilon - 2.$$

• Pour tout $0 \leq x \leq 2$, on a

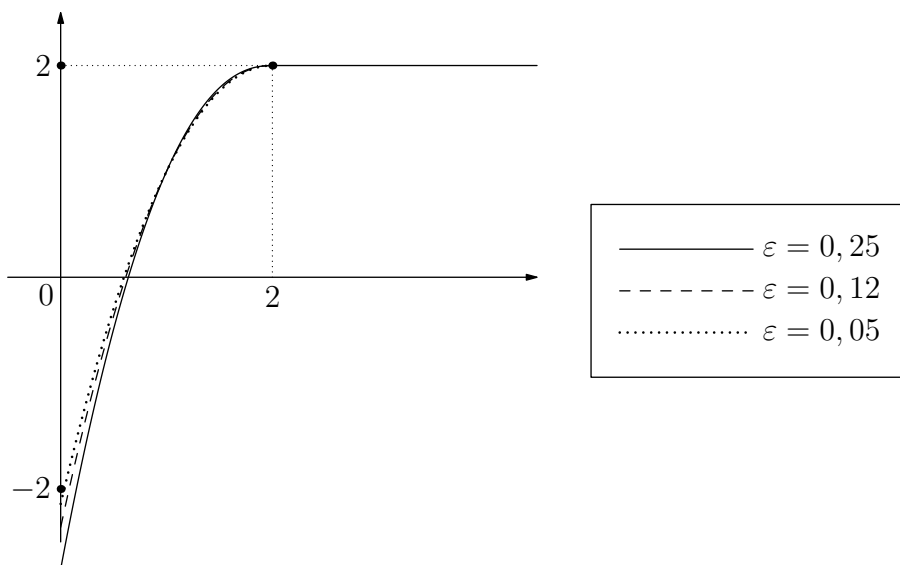
$$f'_\varepsilon(x) = (2 + \varepsilon)(2 - x)^{1+\varepsilon}.$$

Il est aussi clair que la dérivée f'_ε est décroissante sur $[0, 2]$ (et nulle sur $]2, +\infty[$!) avec

$$f'_\varepsilon(0) = 2^{1+\varepsilon}(2 + \varepsilon), \quad f'_\varepsilon(2) = 0.$$

Par conséquent,

$$M_1(f_\varepsilon) = 2 \cdot (2 + \varepsilon) \cdot 2^\varepsilon.$$



• Enfin, f''_ε est nulle sur $]2, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, 2], \quad f''_\varepsilon(x) = -(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)(2 - x)^\varepsilon.$$

La dérivée seconde est donc négative et croissante sur $[0, 2]$:

$$f''_{\varepsilon}(0) = -(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^{\varepsilon}, \quad f''_{\varepsilon}(2) = 0$$

d'où finalement

$$M_2(f_{\varepsilon}) = (2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^{\varepsilon}.$$

☞ Un détail à ne pas perdre de vue : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_{ε} est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

En effet,

- elle est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$;
- elle tend vers 2 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est continu);
- sa dérivée tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathcal{C}^1$);
- sa dérivée seconde tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathcal{C}^2$).

En revanche, la fonction f_0 définie par

$$\forall x \in [0, 2], \quad f_0(x) = 2 - (2 - x)^2 \quad \text{et} \quad \forall x > 2, \quad f_0(x) = 2$$

n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$: sa dérivée seconde est égale à -2 sur $[0, 2[$ et identiquement nulle sur $]2, +\infty[$.

Cette fonction ne peut donc pas servir de contre-exemple alors même que

$$M_1(f_0) = 2\sqrt{M_0(f_0)M_2(f_0)}.$$

5. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\alpha < 2$ tel que

$$\frac{M_1(f)}{\sqrt{M_0(f)M_2(f)}} \leq \alpha$$

pour toute fonction f bornée et de dérivée seconde bornée.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\frac{M_1(f_{\varepsilon})}{\sqrt{M_0(f_{\varepsilon})M_2(f_{\varepsilon})}} = \frac{2 \cdot (2 + \varepsilon) \cdot 2^{\varepsilon}}{\sqrt{[4 \cdot 2^{\varepsilon} - 2][(2 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)2^{\varepsilon}]}} \leq \alpha.$$

En faisant tendre ε tend vers 0, on obtiendrait alors

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{[4 - 2][2 \cdot 1 \cdot 1]}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \leq \alpha$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $\alpha < 2$.

Le facteur 2 est donc optimal (minimal).

Soient $a < b$, deux nombres réels, et f , une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, telle que

$$f(a) = f(b) = 0$$

et on considère le polynôme

$$P_0 = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

1. Trouver une relation simple entre les deux intégrales suivantes.

$$\int_a^b f(t) \, dt \quad \int_a^b f''(t) P_0(t) \, dt$$

2. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

1. Il est clair que les deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment).

La fonction f et la fonction polynomiale associée à P_0 sont de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui nous permet d'intégrer deux fois par parties après avoir remarqué que $P_0''(t) = 1$ pour tout $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \, dt &= \int_a^b f(t) P_0''(t) \, dt \\ &= [f(t) P_0'(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) P_0'(t) \, dt \\ &= - \int_a^b f'(t) P_0'(t) \, dt && (\text{car } f(a) = f(b) = 0) \\ &= -[f'(t) P_0(t)]_a^b + \int_a^b f''(t) P_0(t) \, dt \\ &= \int_a^b f''(t) P_0(t) \, dt && (\text{car } P_0(a) = P_0(b) = 0) \end{aligned}$$

2. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f''(t)| \leq \|f''\|_\infty.$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| &= \left| \int_a^b f''(t) P_0(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f''(t) P_0(t)| \, dt \leq \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} \, dt. \end{aligned}$$

▮ On doit immédiatement se rendre compte que la fonction associée à P_0 est négative sur le segment $[a, b]$ (signe d'un trinôme entre ses racines).

On effectue ensuite le changement de variable affine usuel pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ (cf le cours sur les fonctions convexes).

$$t = (1-u)a + ub \quad dt = (b-a) \, du$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} \, dt = \frac{(b-a)^3}{2} \int_0^1 u(1-u) \, du = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

▮ Il est plus efficace de changer de variable avant de développer la fonction intégrande : le facteur $(b-a)^3$ apparaît sous forme factorisée et le calcul de l'intégrale est alors immédiat.

Complément

On vient d'effectuer le calcul qui donne l'efficacité de la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale au moyen d'une somme de Riemann.

- Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, alors il existe une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = f(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b).$$

L'existence (et l'unicité) de φ découle du théorème sur l'interpolation de Lagrange et l'expression de φ présente peu d'intérêt. En effet, comme φ est affine, son intégrale sur le segment $[a, b]$ est l'aire d'un trapèze et donc

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \times (b - a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a).$$

- On peut alors appliquer ce qui précède à la fonction $g = f - \varphi$: il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^2$, on a fait ce qu'il fallait pour que $g(a) = g(b) = 0$ et de plus $g'' = f''$ (puisque la fonction φ est affine), si bien qu'on a en fait déjà démontré que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Il reste à découper le segment $[a, b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{b - a}{n}.$$

Chaque segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ étant contenu dans le segment $[a, b]$, on a

$$\sup_{t \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]} |f''(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)| = \|f''\|_\infty$$

et le duo habituel (relation de Chasles et inégalité triangulaire) nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b - a}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(\alpha_k) + f(\alpha_{k+1})] \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^3}{12} \cdot \|f''\|_\infty \\ &\leq n \cdot \frac{(b - a)^3}{12n^3} \cdot \|f''\|_\infty = \frac{K}{n^2}. \end{aligned}$$

- L'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la méthode des trapèzes avec une subdivision en n sous-intervalles est donc $\mathcal{O}(1/n^2)$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus précise que la méthode des rectangles.

• C'est d'autant plus remarquable que les expressions simplifiées des deux méthodes sont très semblables !

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \\ T_n &= \frac{b - a}{n} \left[\frac{f(\alpha_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) + \frac{f(\alpha_n)}{2} \right] \end{aligned}$$