RMS - Volume 135

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe un réel $\alpha$ tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

**1.** *Démontrer que les $u_n$ sont de signe constant à partir d'un certain rang.*

**2.** *On suppose que tous les $u_n$ sont strictement positifs et on considère*

$$w_n = \ell n \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$

*Démontrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. En déduire que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.*

**3.** *En déduire, sans utiliser l'équivalent de Stirling, la nature de la suite de terme général*

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}.$$

**1.** Par hypothèse, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite strictement positive (égale à 1 en fait). Donc, à partir d'un certain rang, ce quotient est strictement positif et les deux réels $u_n$ et $u_{n+1}$ sont donc de même signe.

✍ *Il n'est pas nécessaire de recourir aux $\varepsilon$ pour justifier le résultat si on pense à bien mettre l'accent sur la stricte positivité de la limite.*

*Pour ceux qui y tiennent quand même, les voici. La limite du quotient est égale à 1, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1+\varepsilon.$$

*En particulier pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $n_{1/2} \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall\, n \geqslant n_{1/2}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{2} > 0.$$

**2.** D'après la première question, comme les réels $u_n$ sont tous de même signe pour $n \geqslant n_{1/2}$,
— ou bien $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant n_{1/2}$,
— ou bien $u_n < 0$ pour tout $n \geqslant n_{1/2}$.

Puisqu'on s'intéresse uniquement au comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que *tous* les $u_n$ sont strictement positifs, quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant n_{1/2}}$ ou par la suite extraite $(-u_n)_{n\geqslant n_{1/2}}$ : cela sera sans conséquence sur les valeurs de $w_n$.

❧ On sait que $\ell n(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2)$ lorsque $u$ tend vers 0. Avec

$$u \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} u = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(u^2) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On en déduit que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} w_n &= \ell n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^\alpha + \ell n \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \alpha \cdot \Big[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] + \ell n\Big[1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] \\ &= \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \end{aligned}$$

Par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

❧ On peut aussi réécrire $w_n$ de la façon suivante :

$$w_n = \ell n\big[(n+1)^\alpha u_{n+1}\big] - \ell n\big[n^\alpha u_n\big],$$

ce qui exprime $\sum w_n$ comme une série télescopique.

Comme la série $\sum w_n$ est convergente, on en déduit que la suite de terme général $\ell n(n^\alpha u_n)$ est convergente et, par continuité de la fonction exp, la suite de terme général $n^\alpha u_n$ est convergente.

Plus précisément, si $\ell n(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $n^\alpha u_n$ tend vers $K = e^\ell > 0$ et par conséquent

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}.$$

**3.** Tous les $u_n$ sont strictement positifs et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!e^n}{(n+1)!e^{n+1}}\\ &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{n!e^n}{(n+1)e\cdot n!e^n}\\ &= \frac{1}{e}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.\end{aligned}$$

Lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= \exp\Big(n\Big[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]\Big)\\ &= e\cdot\exp\Big[\frac{-1}{2n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]\\ &= e\cdot\Big[1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On peut donc appliquer le résultat précédent avec $\alpha = 1/2$, ce qui prouve qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

En particulier, la série $\sum u_n$ est divergente (par comparaison avec une série de Riemann).

✍ *La règle de D'Alembert ne permet pas de déterminer la nature de la série $\sum u_n$, puisque le quotient $u_{n+1}/u_n$ tend vers 1.*

✍ *D'après l'équivalent de Stirling,*

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

*donc*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

*Soit* $E$*, un espace préhilbertien. On considère une famille* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de vecteurs non nuls de* $E$ *telle que*

$$\forall\, x\in E,\quad \langle\, x\,|\, x\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i\,|\, x\,\rangle^2$$

*et on note* $F = \mathrm{Vect}(e_i,\ 1\leqslant i\leqslant n)$.

**1.** *Identifier le sous-espace* $F^\perp$*. Qu'en déduire sur la famille* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *?*

**2.** *Soit* $v\in L(E)$*. Démontrer que*

$$\forall\, x\in E,\quad \langle\, v(x)\,|\, x\,\rangle = 0 \iff v^* = -v.$$

**3.** *On définit* $u\in L(E)$ *en posant*

$$\forall\, x\in E,\quad u(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i\,|\, x\,\rangle \cdot e_i.$$

*Démontrer que* $u$ *est auto-adjoint et que*

$$\forall\, x\in E,\quad \langle\, u(x)\,|\, x\,\rangle = 0.$$

*Qu'en déduire sur* $u$ *et sur la famille* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *?*

**4.** *On suppose que* $E$ *est de dimension finie. Démontrer que* $\dim E = n$ *et que la famille* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une base orthonormée de* $E$.

**1.** Si $x\in F^\perp$, alors en particulier

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \langle\, e_i\,|\, x\,\rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \langle\, x\,|\, x\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i\,|\, x\,\rangle = 0.$$

Autrement dit, $x = 0_E$.

Réciproquement, comme $F^\perp$ est un sous-espace de $E$, il contient nécessairement le vecteur nul. Donc $F^\perp = \{0_E\}$.

❧ Comme $F$ est un sous-espace de dimension finie, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

et on déduit de ce qui précède que

$$E = F = \mathrm{Vect}(e_i,\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

Autrement dit : la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $E$.

✍ *La relation* $E = F\oplus F^\perp$ *est vraie pour tout sous-espace* $F$ *lorsque* $E$ *est un espace euclidien (c'est-à-dire un espace de dimension finie).*

*En revanche, si la dimension de* $E$ *est infinie, il arrive que cette relation soit fausse et que seule soit vraie l'inclusion*

$$E \supset F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

*(Cf* Problème du supplémentaire orthogonal *dans le cours.)*

**2.** Comme $E$ est un espace vectoriel de <u>dimension finie</u>, tout endomorphisme $v\in L(E)$ admet un adjoint $v^*$.

✍ *Autre subtilité : le cours sur l'adjoint se borne au cas des espaces euclidiens.*

*Si* $v$ *est un endomorphisme d'un espace préhilbertien de dimension infinie, il admet* au plus un *adjoint (même démonstration que dans le cours), mais rien ne prouve en général l'existence d'un adjoint.*

*L'inégalité de Schwarz prouve que : si $v$ admet un adjoint, alors l'application linéaire $v$ est nécessairement continue. (Eh oui ! Si la dimension de $E$ est infinie, un endomorphisme de $E$ n'est pas nécessairement continu !)*

*Et même si l'endomorphisme $v$ est continu, on n'est pas sûr qu'il admette un adjoint.*

*Pour être sûr de l'existence d'un adjoint pour tout endomorphisme $v \in L(E)$, il suffit que $E$ soit un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace préhilbertien dans lequel toute série absolument convergente est en fait convergente. (Il s'agit donc d'un espace de dimension infinie qui ressemble beaucoup à un espace de dimension finie.)*

L'endomorphisme $v + v^*$ est alors un endomorphisme auto-adjoint :

$$(v + v^*)^* = v^* + (v^*)^* = v^* + v = v + v^*$$

et donc un endomorphisme diagonalisable (Théorème spectral).

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $(v + v^*)$, alors il existe un vecteur propre $x$ associé à $\lambda$ et

$$\begin{aligned}
\langle (v+v^*)(x) \,|\, x \rangle &= \langle v(x) \,|\, x \rangle + \langle v^*(x) \,|\, x \rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)}\\
&= \langle v(x) \,|\, x \rangle + \langle x \,|\, v(x) \rangle && \text{(définition de l'adjoint)}\\
&= 2\,\langle v(x) \,|\, x \rangle && \text{(symétrie du produit scalaire)}\\
&= 0 && \text{(hypothèse sur } v\text{)}\\
&= \langle \lambda x \,|\, x \rangle && \text{(vecteur propre associé à } \lambda\text{)}\\
&= \lambda \|x\|^2 && \text{(linéarité à gauche du p.s.)}
\end{aligned}$$

et comme $\|x\|^2 > 0$ (puisque $x$ est, par hypothèse, un vecteur propre), on en déduit que $\lambda = 0$.

Un endomorphisme diagonalisable n'admettant que $0$ pour valeur propre est l'endomorphisme nul, donc

$$v^* = -v.$$

**3.** Il est clair que $u$ est un endomorphisme de $E$.

✍ *Il faut penser à analyser l'expression de $u$, car elle doit évoquer des souvenirs !*

*Si la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ était une base orthonormée de $E$, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \cdot e_i$$

*serait le projeté orthogonal de $x$ sur le sous-espace $F$ engendré par la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $u(x)$ serait le projeté orthogonal de $x$ sur le sous-espace $F^\perp$.*

*La définition de $u$ est donc une indication qui ne dit pas son nom : si on est capable de mener cette analyse, on est aussi capable de traiter cet exercice sans avoir besoin de cette indication.*

Quels que soient les vecteurs $x$ et $y$ de $E$,

$$\begin{aligned}
\langle u(x) \,|\, y \rangle &= \langle x \,|\, y \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \langle e_i \,|\, y \rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)}\\
&= \langle y \,|\, x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, y \rangle \langle e_i \,|\, x \rangle && \text{(symétrie du p.s. et commutativité de } \times\text{)}\\
&= \Big\langle y - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, y \rangle \cdot e_i \,\Big|\, y \Big\rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)}\\
&= \langle u(y) \,|\, x \rangle = \langle x \,|\, u(y) \rangle && \text{(symétrie du p.s.)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'endomorphisme $u$ est auto-adjoint.

✍ *Le cours sur les espaces euclidiens nous assure que toute projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint (aussi bien la projection orthogonale sur $F$ que la projection orthogonale sur $F^\perp$) : on ne doit pas être surpris par le résultat de ce calcul.*

✍ *La propriété qu'on a établie :*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, u(y) \rangle$$

*prouve d'abord que l'endomorphisme $u$ admet un adjoint et ensuite que cet adjoint est égal à $u$ lui-même. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de supposer que la dimension de $E$ est finie ou que $E$ est un espace de Hilbert !*

❧ En développant (linéarité à gauche), on obtient

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, u(x) \,|\, x \,\rangle \;=\; \langle\, x \,|\, x \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle^2 = 0$$

par hypothèse sur la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

D'après la question précédente, $u^* = -u$ et comme $u$ est auto-adjoint, on a $u^* = u$. Ainsi, $u = -u$ et $u$ est l'endomorphisme nul. On a donc démontré que

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle \cdot e_i.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ On a démontré plus haut que la dimension de $E$ était finie, ce n'est donc pas une hypothèse !

❧ Par hypothèse, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{j \neq i} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2$$

et donc

$$\sum_{j \neq i} \underbrace{\langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2}_{\geqslant 0} = 0.$$

Lorsqu'une somme de termes positifs est nulle, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = 0.$$

La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc une famille orthogonale.

❧ D'après la question précédente, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle \cdot e_j = \|e_i\|^2 \cdot e_i + \sum_{j \neq i} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle \cdot e_j = \|e_i\|^2 \cdot e_i$$

puisque la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale.

Par homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \|e_i\| = \|e_i\|^3$$

et donc que $\|e_i\| = 1$ (puisqu'on a supposé que les vecteurs $e_i$ n'étaient pas nuls).

La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc une famille orthonormée.

✍ *Cet exercice est un grand classique qu'on a fait précéder de quelques questions de cours. J'ai donc utilisé les résultats précédents pour montrer que les vecteurs sont unitaires, mais c'est inutile : d'après l'hypothèse initiale,*

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j \neq i} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2$$

*et comme les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, on a $\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4$, d'où $\|e_i\| = 1$ (puisque cette norme n'est pas nulle).*

❧ Comme elle engendre $E$ (d'après la première question), c'est une base orthonormée de $E$.

*Pour tout $x > 0$, on pose*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt.$$

**1.** *Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.*
**2.** *Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.*
**3.** *Simplifier l'expression de $F'$.*
**4.** *En déduire une expression simplifiée de $F$.*

**1.** Pour tout $t > 0$ on pose $S(t) = \frac{\sin t}{t}$ et pour $t = 0$, on pose $S(0) = 1$. La fonction $S$ ainsi définie (*sinus cardinal*) est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. En revanche, elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Il s'agit d'un exercice très classique. Tous les détails sont sur le Cahier de prépa, cf le premier exercice de la composition* `cp2308`.

❧ Pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(t, x) = e^{-xt}S(t).$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et comme $S$ est bornée,

$$\varphi(t, x) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-xt}).$$

Comme $x > 0$, on sait que la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $F(x)$ est donc bien définie.

✍ *On sait que l'intégrale généralisée $F(0)$ est convergente, mais aussi que la fonction $[t \mapsto \varphi(t, 0)]$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.*

**2.** On applique le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ pour $x\,[a, +\infty[$ (où $a$ est un réel strictement positif fixé). La domination est justifiée par l'encadrement suivant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in [a, +\infty[,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leqslant e^{-at}.$$

La fonction $F$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ et donc sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = ]0, +\infty[$$

et

$$\forall\, x > 0,\quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt.$$

**3.** On reconnaît la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,dt = \frac{1}{x - i} = \frac{x + i}{1 + x^2},$$

donc

$$\forall\, x > 0,\quad F'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

**4.** Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x > 0,\quad F(x) = K - \operatorname{Arctan} x.$$

En particulier, $F(x)$ tend vers $K - \pi/2$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
❧ Soit $x_0 > 0$. Comme

$$\forall\, x \geqslant x_0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\quad \left|\varphi(t, x)\right| \leqslant e^{-x_0 t},$$

on peut appliquer le Théorème de convergence dominée au voisinage de $+\infty$, ce qui nous donne

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = 0.$$

❧ Par conséquent, $K = \pi/2$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

✍ *On en déduit en particulier que*

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \frac{\pi}{2}$$

*et on peut démontrer – ce n'est pas immédiat – que la fonction* $F$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *(et pas seulement sur* $\mathbb{R}_+^*$*). On connaît donc la valeur de l'intégrale de Dirichlet :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Soient $E$, un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$, un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim E$. On considère un vecteur $x_0 \in E$ tel que*

$$u^{n-1}(x_0) \neq 0_E.$$

**1.** *Démontrer que la famille $\mathscr{F} = \big(u^k(x_0)\big)_{0 \leqslant k < n}$ est une base de $E$.*

**2.** *Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, démontrer que*

$$\dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

**3.** *Démontrer que $\operatorname{Ker} u^k$ est le seul sous-espace de $E$ stable par $u$ dont la dimension soit égale à $k$.*

**1.**

✍ *Par définition de l'indice de nilpotence, $u^n$ est l'endomorphisme nul tandis que l'endomorphisme $u^{n-1}$ n'est pas identiquement nul. Il existe donc bien un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et, bien évidemment, ce vecteur $x_0$ n'est pas nul.*

Dans un espace de dimension $n$, une famille de $n$ vecteurs est une base si, et seulement si, cette famille est libre. Il suffit donc de vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

On considère donc une famille $(\alpha_k)_{0 \leqslant k < n}$ de scalaires tels que

$$\sum_{0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) = 0_E.$$

Si les scalaires $\alpha_k$ ne sont pas tous nuls, alors l'ensemble

$$\{0 \leqslant k < n \ : \ \alpha_k \neq 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet par conséquent un plus petit élément $k_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0_E &= \sum_{0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{0 \leqslant k < k_0} \underbrace{\alpha_k}_{=0} \cdot u^k(x_0) + \sum_{k_0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{k_0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant k_0 < n$, on a bien $(n-1) - k_0 \in \mathbb{N}$, donc on peut composer par l'application linéaire $u^{(n-1)-k_0}$ :

$$\begin{aligned} 0_E = u^{(n-1)-k_0}(0_E) = u^{n-1-k_0}\Big(\sum_{k_0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0)\Big) &= \sum_{k_0 \leqslant k < n} \alpha_k \cdot u^{n-1+(k-k_0)}(x_0) \\ &= \alpha_{k_0} u^{n-1}(x_0) && \text{(terme avec } k = k_0) \end{aligned}$$

puisque $u^n$ est l'endomorphisme nul et que $n - 1 + (k - k_0) \geqslant n$ pour tout $k > k_0$.

On est arrivé à une contradiction :

— par hypothèse sur $x_0$, le vecteur $u^{n-1}(x_0)$ n'est pas nul

— et, par hypothèse sur $k_0$, le scalaire $\alpha_{k_0}$ n'est pas nul

— alors que le produit $\alpha_{k_0} \cdot u^{n-1}(x_0)$ est nul.

Par conséquent, tous les scalaires $\alpha_k$ sont nuls et on a démontré que la famille $\mathscr{F}$ était une base de $E$.

**2.** Toute sous-famille d'une famille libre est elle aussi libre. D'après la question précédente, pour tout entier $0 \leqslant p < n$, la sous-famille

$$\mathscr{F}_p = \big(u^\ell(x_0)\big)_{p \leqslant \ell < n}$$

est libre.

Par ailleurs, comme $u^n$ est l'endomorphisme nul,

$$\forall\, p \geqslant n, \quad u^p(x_0) = 0_E.$$

❧ Considérons maintenant l'image par $u^k$ de la base $\mathscr{F}$ :

$$(u^k)_*(\mathscr{F}) = \big(u^{k+\ell}(x_0)\big)_{0\leqslant \ell<n} = \big(u^{\ell}(x_0)\big)_{k\leqslant \ell<n+k}.$$

✍ *Si on connaît une base d'un espace de dimension finie $E$, il faut s'en servir pour étudier les propriétés d'un endomorphisme de $E$ : c'est fait pour !*

La sous-famille

$$\big(u^{\ell}(x_0)\big)_{k\leqslant \ell<n}$$

est une famille libre de $(n-k)$ vecteurs contenue dans l'image de $u^k$, donc

$$\operatorname{rg} u^k \geqslant n-k.$$

D'autre part, $u^{\ell}(x_0) = 0_E$ pour $n \leqslant \ell < n+k$, donc la famille

$$\big(u^{\ell}(x_0)\big)_{n-k\leqslant \ell<n}$$

est une famille libre (en tant que sous-famille de $\mathscr{F}$) constituée de $k$ vecteurs appartenant au sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$. Cela prouve que

$$\dim \operatorname{Ker} u^k \geqslant k.$$

Comme $u^k$ est un endomorphisme de $E$, espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le Théorème du rang :

$$n = \dim E = \operatorname{rg} u^k + \dim \operatorname{Ker} u^k.$$

On peut alors déduire des inégalités précédentes que

$$\operatorname{rg} u^k = n-k \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

**3.** On a démontré que $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ et on sait que $\operatorname{Ker} u^k$ est stable par $u$ (en tant que noyau d'un polynôme en $u$).

❧ Soit $V_k$, un sous-espace de $E$ de dimension $k$, qu'on suppose stable par $u$. On peut donc considérer l'endomorphisme $u_k \in L(V_k)$ induit par restriction de $u$ à $V_k$. Par définition,

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k(x) = u(x)$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

L'endomorphisme $u_k$ est donc nilpotent.

D'une manière générale, l'indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace, donc l'indice de nilpotence de $u_k$ est inférieur à $k = \dim V_k$ et

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k^k(x) = u^k(x) = 0_E.$$

On a ainsi démontré que $V_k \subset \operatorname{Ker} u^k$.

Mais $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ (d'après la question précédente) et $\dim V_k = k$ (par hypothèse). Donc $V_k = \operatorname{Ker} u^k$ (inclusion et égalité des dimensions [finies]).

❧ On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker} u^k$ était le seul sous-espace stable par $u$ dont la dimension est égale à $k$.

*On munit l'espace vectoriel* $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ *de la norme uniforme :*

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \big|f(t)\big|$$

*et on définit* $\varphi\ :\ E \to \mathbb{R}$ *en posant*

$$\forall\, f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt.$$

*On admet que* $\varphi$ *est une forme linéaire sur* E.

**1.** *Démontrer que la forme linéaire* $\varphi$ *est continue.*

**2.** *Calculer la norme subordonnée* $|||\varphi|||$. *Cette norme est-elle atteinte ?*

**1.**

✍ *Les intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment), la linéarité de* $\varphi$ *en découle immédiatement.*

Soit $f \in E$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\big|\varphi(f)\big| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^0 f(t)\,dt\right| && (\star)\\
&\leqslant \int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt + \int_{-1}^0 \big|f(t)\big|\,dt && (\dagger)\\
&\leqslant \int_{-1}^1 \|f\|_\infty\,dt && (\ddagger)\\
&= 2\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Cette majoration prouve que la forme linéaire $\varphi$ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant 2$.

✍ *Une définition possible de la norme subordonnée est*

$$|||\varphi||| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \big|\varphi(f)\big|.$$

*Comme* E *est un espace de dimension infinie, la sphère unité de* E *n'est pas compacte (alors qu'elle est fermée et bornée) et cette borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum.*

*On a coutume de dire que la norme subordonnée est "atteinte" lorsque cette borne supérieure est en fait un maximum, c'est-à-dire lorsqu'il existe bien un vecteur unitaire* $f_0 \in E$ *tel que* $|\varphi(f_0)| = |||\varphi|||$ *ou, ce qui revient au même, lorsqu'il existe un vecteur* $g_0 \in E$ *non nul tel que* $|\varphi(g_0)| = |||\varphi|||\,\|g_0\|_\infty$.

*Je ne vois pas comment on peut calculer la norme subordonnée sans constater d'abord que cette borne supérieure n'est pas atteinte, donc je traite les questions dans l'ordre logique (à mon sens).*

**2.** L'inégalité $(\star)$ est une égalité si, et seulement si, les deux intégrales sont de même signe.

L'inégalité $(\dagger)$ est une égalité si, et seulement si, la fonction f est de signe constant sur $]0,1[$ et de signe constant sur $]-1,0[$.

L'inégalité $(\ddagger)$ est une égalité si, et seulement si, la fonction f est constante sur $]0,1[$ et constante sur $]-1,0[$.

Par conséquent, si f n'est pas nulle et si $\big|\varphi(f)\big| = 2\|f\|_\infty$, alors il faut que

$$\forall\, t \in\, ]-1,0[, \quad f(t) = \pm\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall\, t \in\, ]0,1[, \quad f(t) = \mp\|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que f est discontinue en $t = 0$ :

$$\lim_{t\to 0-} f(t) = -\lim_{t\to 0+} f(t) = \pm\|f\|_\infty \neq 0$$

et donc que $f \notin E$.

La norme subordonnée $|||\varphi|||$ n'est donc pas atteinte.

✍ *On a démontré à la question précédente que*

$$|||\varphi||| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\varphi(f)| \leqslant 2.$$

*Cette étude nous permet de deviner une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions appartenant à* $E$ *telles que*

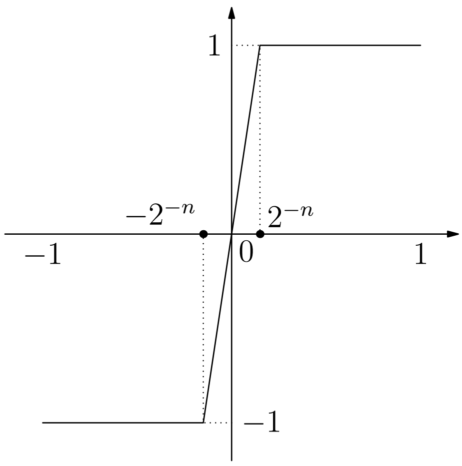
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} |\varphi(f_n)| = 2$$

*ce qui prouve que*

$$|||\varphi||| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\varphi(f)| = 2.$$

❧ Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n$ définie par :
— pour $-1 \leqslant t \leqslant -2^{-n}$, on prend $f_n(t) = -1$ ;
— pour $2^{-n} \leqslant t \leqslant 1$, on prend $f_n(t) = 1$ ;
— pour $-2^{-n} \leqslant t \leqslant 2^{-n}$, on prend $f_n(t) = 2^n t$.
La fonction $f_n$ est continue (donc c'est bien un vecteur de $E$), on a bien $\|f_n\|_\infty = 1$ et comme $f_n$ est impaire et affine par morceaux, on trouve facilement

$$\varphi(f_n) = 2 - 2^{-n}.$$




✍ *La meilleure façon de calculer* $\varphi(f_n)$ *est de raisonner géométriquement : par imparité,*

$$\varphi(f_n) = 2\int_0^1 f_n(t)\,dt$$

*et, au moyen d'une figure, on constate qu'on doit calculer l'aire d'un trapèze. Il suffit donc d'appliquer la formule bien connue.*

*On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos u_n$$

*Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Comme $u_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$u_1 = \cos u_0 \in [-1, 1] \subset [-\pi/2, \pi/2],$$

donc

$$u_2 = \cos u_1 \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$$

et, par récurrence,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n \in [0, 1].$$

❧ La fonction cos est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \cos'(x) = -\sin x \in [-\sin 1, 0].$$

En posant $0 \leqslant k = \sin 1 < 1$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que cos est $k$-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

❧ Pour tout $n \geqslant 2$, les termes $u_n$ et $u_{n+1}$ appartiennent au segment $[0, 1]$ et

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\cos u_{n+1} - \cos u_n| \leqslant k|u_{n+1} - u_n|.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^{n-2}|u_3 - u_2|.$$

Comme $0 < k < 1$, on en déduit que la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente (comparaison à une série géométrique convergente). Cette série est donc convergente et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✍ *Cette suite converge vers l'unique point fixe de la fonction* cos*, mais cela n'est pas demandé par l'énoncé. Il faut se tenir prêt à appliquer le Théorème de la bijection monotone à la fonction* $[x \mapsto x - \cos x]$.

*L'étude des variations de la suite n'est pas demandée non plus. Comme* cos *est décroissante sur* $[0, 1]$*, les deux suites extraites* $(u_{2n})$ *et* $(u_{2n+1})$ *sont monotones et varient en sens inverse. (Faire une figure pour en savoir plus !)*

*Soient $A$ et $B$, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{rg} B = 1$. Démontrer que*

$$\det(A+B) \times \det(A-B) \leqslant \det(A^2).$$

✍ *Soient $E$, un espace vectoriel de dimension $n$ et $g$, un endomorphisme de $E$ dont le rang est égal à $1$. D'après le Théorème du rang, le noyau de $g$ est un sous-espace de dimension $(n-1)$ et d'après le Théorème de la base incomplète, il existe une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $E$ telle que $(e_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.*

*La matrice de $g$ relative à cette base est alors de la forme*

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ Comme $\operatorname{rg} B = 1$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de $P^{-1}BP$ sera notée $C_1'$.

Notons également $C_1$, ..., $C_n$ les colonnes de la matrice $P^{-1}AP$.

❧ Deux matrices semblables ont même déterminant, donc

$$\det A = \det(C_1, \dots, C_n)$$

et

$$\begin{aligned}
\det(A+B)\det(A-B) &= \det(P^{-1}[A+B]P)\det(P^{-1}[A-B]P) \\
&= \det(P^{-1}AP + P^{-1}BP)\det(P^{-1}AP - P^{-1}BP) \\
&= \det(C_1 + C_1', C_2, \dots, C_n)\det(C_1 - C_1', C_2, \dots, C_n) \\
&= \big[\det A + \det(C_1', C_2, \dots, C_n)\big] \times \\
&\qquad \big[\det A - \det(C_1', C_2, \dots, C_n)\big] \\
&\qquad\qquad \text{(linéarité par rapport à la première colonne)} \\
&= (\det A)^2 - [\det(C_1', C_2, \dots, C_n)]^2 \qquad \text{(identité remarquable)} \\
&\leqslant \det(A^2). \qquad \text{(propriété de morphisme)}
\end{aligned}$$

# mt24-QT1

> *Résoudre le système différentiel suivant.*
>
> $$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Ce système différentiel (linéaire, à coefficients constants) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4I_2 - J$$

où J est la célèbre matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❧ On se souvient alors que

$$J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad J\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),$$

on a donc

$$Q^{-1}JQ = \mathrm{Diag}(2, 0)$$

et donc

$$Q^{-1}AQ = 4I_2 - Q^{-1}JQ = \mathrm{Diag}(2, 4).$$

❧ On pose alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}X(t)$$

et on obtient

$$Y'(t) = \mathrm{Diag}(2, 4)Y(t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}.$$

Ce système peut être résolu de tête : la fonction X est solution du système différentiel initial si, et seulement si, il existe deux constantes $a$ et $b$ réelles telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} - be^{4t} \end{pmatrix}.$$

*Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent.*

**1.** $u_n = \operatorname{Arccos}\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}}$ *avec* $\alpha > 0$

*(Indication :* $\cos^2 u_n + \sin^2 u_n = 1$*)*

**2.**

$$v_n = \cos\Big(n^2\pi\,\ell n\,\frac{n-1}{n}\Big)$$

**1.** Comme $\alpha > 0$, il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n^\alpha} = 1,$$

donc $u_n$ tend vers $0$ (par composition de limites) par valeurs positives (puisque la fonction Arccos prend des valeurs comprises entre $0$ et $\pi$). Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin u_n \sim \sqrt{\sin^2 u_n}.$$

Par définition de la fonction Arccos,

$$\cos^2 u_n = \Big[\cos\operatorname{Arccos}\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}}\Big]^2 = 1-\frac{1}{n^\alpha}.$$

On a donc

$$\sin^2 u_n = 1-\cos^2 u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

et finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

D'après le Théorème de comparaison par équivalence (cas des séries de terme général positif), la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2$.

✍ *La fonction Arccos est continue en $x = 1$, mais elle n'est pas dérivable en $x = 1$. Par conséquent, elle admet un développement limité à l'ordre $0$, mais pas à l'ordre $1$, en $x = 1$.*

*Pour trouver un ordre de grandeur sans recourir à l'astuce suggérée par l'énoncé, il faut passer par le Théorème fondamental :*

$$\operatorname{Arccos} 1 - \operatorname{Arccos} x = \int_x^1 \frac{-\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

*et par conséquent*

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x\to1}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

*Ici,*

$$1-x = 1-\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^\alpha}$$

*et donc*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

**2.** Lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$\ell n\,\frac{n-1}{n} = \ell n\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Par conséquent,

$$n^2\pi\,\ell n\,\frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} -n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\Big[\frac{-\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Toute série dont le terme général est dominé par $1/n^2$ est absolument convergente (Théorème de comparaison à une série de Riemann). Par somme, la série $\sum v_n$ est convergente.

✍ *La série $\sum v_n$ est semi-convergente car*

$$|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3n}$$

*et la série (harmonique) $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif.*

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout polynôme*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E,$$

*on pose*

$$\|P\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

*On admet que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$.*
*Soit $b \in \mathbb{C}$. On considère l'application $f : E \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = P(b).$$

*Démontrer que $f$ est une forme linéaire continue sur $E$ et calculer $|||f|||$.*

✍ *Cf RMS 134, exercices 1461 et 1462.*

Il est clair que $f$ est une forme linéaire sur $E$ :

$$\forall\, P, Q \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad (\lambda P + Q)(b) = \lambda P(b) + Q(b).$$

Comme $E$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute forme linéaire sur $E$ est continue (indépendamment de la norme choisie sur $E$).

❧ Si $b = 0$, alors

$$\forall\, P \in E, \quad \big|f(P)\big| = |a_0| \leqslant |||P|||$$

et il y a égalité pour tous les polynômes constants $P$. Dans ce cas, la forme linéaire $f$ est continue et $|||f||| = 1$.

❧ On considère dorénavant le cas général : $b \neq 0$.
Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, P \in E, \quad \big|f(P)\big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b|^k \qquad (\star)$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} |b|^k\Big).\|P\|, \qquad (\dagger)$$

donc la forme linéaire $f$ est continue sur $E$ et

$$|||f||| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |b|^k.$$

✍ *Considérée comme une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$ (qui n'est pas un espace vectoriel de dimension finie), l'application $f$ ne serait pas continue pour tout $b \in \mathbb{C}$.*
*En effet, si $|b| > 1$,*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|X^k\| = 1 \quad \textit{alors que} \quad \lim_{k \to +\infty} \big|f(X^k)\big| = +\infty$$

*donc $f$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $\mathbb{C}[X]$.*

❧ Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire $(\star)$ si, et seulement si, tous les termes de la somme ont même argument (modulo $2\pi$) et il y a égalité dans la majoration $(\dagger)$ si, et seulement si, tous les termes sont égaux. Comme $b \neq 0$, en considérant le polynôme

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{b^k}}{|b|^k} X^K,$$

on a d'une part

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad |a_k| = \left|\frac{\overline{b^k}}{|b|^k}\right| = 1$$

donc $\|P_0\| = 1$ et d'autre part

$$f(P_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{b^k} b^k}{|b|^k} = \sum_{k=0}^{n} |b|^k,$$

si bien que

$$\left|f(P_0)\right| = \left(\sum_{k=0}^{n} |b|^k\right) \|P_0\|$$

pour un polynôme $P_0$ non nul.

Cela prouve que

$$|||f||| = \sum_{k=0}^{n} |b|^k.$$

✍ *On pourrait considérer l'application* $[P \mapsto P(b)]$ *avec* $b \in \mathbb{C}$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$ *: cette application linéaire serait continue (dimension finie) mais le calcul explicite de la norme subordonnée serait sensiblement plus compliqué. (À vrai dire, je ne vois pas trop comment m'y prendre !)*

*Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que*

$$A^2 + A + 4I_n = 0_n.$$

**1.** *Démontrer que $A$ n'a pas de valeur propre réelle.*

**2.** *Démontrer que l'entier $n$ est pair. Calculer le déterminant et la trace de $A$ en fonction de $n$.*

**1.**

✍ *Cf RMS 134, exercices 1414, 1415, 1416, 1417.*

Par hypothèse, le polynôme $P_0 = X^2 + X + 4$ est un polynôme annulateur de $A$. On sait que les valeurs propres de $P_0$ sont nécessairement des racines d'un tel polynôme. Or le discriminant de $P_0$ est égal à $-15$, donc $P_0$ n'a pas de racines réelles. Par conséquent, la matrice $A$ n'a pas de valeur propre réelle.

**2.** On peut considérer $A$ comme une matrice à coefficients complexes : $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\overline{A} = A$. Dans ces conditions, le polynôme $P_0$ est un polynôme annulateur de $A$ qui est scindé à racines (complexes) simples, donc la matrice $A$ est diagonalisable (en tant que matrice à coefficients complexes) : il existe donc une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = \Delta$$

où $\Delta$ est une matrice diagonale à coefficients complexes.

❧ Les coefficients diagonaux de $\Delta$ sont les valeurs propres (complexes) de $A$, donc ce sont des racines de $P_0$. Il n'y a que deux possibilités :

$$\lambda_1 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$$

puisque $P_0$ n'a que deux racines complexes.

❧ Comme $\overline{A} = A$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \overline{(A - \lambda I_n)X} = (\overline{A} - \overline{\lambda} I_n)(\overline{X}) = (A - \overline{\lambda} I_n)(\overline{X})$$

ce qui prouve que les sous-espaces vectoriels (complexes) $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $\operatorname{Ker}(A - \overline{\lambda} I_n)$ ont même dimension.

Par conséquent, quitte à permuter les colonnes de la matrice de passage $Q$, on a démontré que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m}, \underbrace{\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_1}}_{m}),$$

ce qui prouve d'une part que la dimension de $E$ est paire :

$$\dim E = n = 2m$$

et donne d'autre part :

$$\operatorname{tr} A = m\lambda_1 + m\overline{\lambda_1}, \quad \det A = \lambda_1^m \cdot \overline{\lambda_1}^m.$$

❧ Comme $\lambda_1$ et $\overline{\lambda_1}$ sont les racines du polynôme unitaire $P_0$, on sait que

$$\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = -1 \quad \text{et que} \quad \lambda_1\overline{\lambda_1} = 4$$

donc

$$\operatorname{tr} A = -m = \frac{-n}{2} \quad \text{et} \quad \det A = 4^m = 2^{2m} = 2^n.$$

✍ *Il faut connaître les formules donnant la somme et le produit des racines d'un polynôme, il est ici inutile d'expliciter $\lambda_1$ et $\lambda_2$ !*

> *Quel est le nombre d'applications*
> $$f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$$
> *telles que* $f \circ f = f$ *?*

- **Analyse.**

L'ensemble $\operatorname{Im} f$ est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$, donc il y a $2^n - 1$ choix possibles pour $\operatorname{Im} f$.

Pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $u \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = f(u)$, on doit avoir

$$f(x) = (f \circ f)(u) = f(u) = x$$

(et donc *un seul* choix possible pour $f(x)$).

Pour $x \notin \operatorname{Im} f$, on doit avoir $f(x) \in \operatorname{Im} f$ (et donc $r$ choix possibles si $\#(\operatorname{Im} f) = r$).

- **Synthèse.**

On construit $f$ en commençant par choisir une partie non vide $F$ de $[\![1, n]\!]$ et on pose $f(x) = x$ pour tout $x \in F$, de telle sorte que $F \subset \operatorname{Im} f$.

Pour $x \in [\![1, n]\!] \setminus F$, on choisit $f(x) \in F$ arbitrairement, si bien que $F = \operatorname{Im} f$.

Quels que soient les choix opérés, on obtient ainsi une fonction $f$ telle que $f \circ f = f$.

Pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, il y a $\binom{n}{r}$ choix possibles pour une partie $F$ de cardinal $r$ et, pour les $(n - r)$ éléments $x$ qui n'appartiennent pas à $F$, il y a $r^{n-r}$ choix.

Il y a donc

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} r^{n-r}$$

applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

‖ *Factoriser* $X^8 + X^4 + 1$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

Il faut évidemment chercher les racines du polynôme pour le factoriser.

✍ *Quelle que soit la méthode employée, il faut se rappeler que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées (avec la même multiplicité).*

*Il faut également se rappeler que*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}) = X^2 - (2\cos\alpha)X + 1$$

*pour ne pas perdre de temps à redécouvrir la Lune.*

❧ **Première version.**

Comme $z^8 + z^4 + 1 = (z^4)^2 + (z^4) + 1$ et que les racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont les racines cubiques $j$ et $j^2 = \bar{j}$ de l'unité, il s'agit de résoudre les équations $z^4 = j$ et $z^4 = j^2$.

Pour tout réel $\alpha$, le nombre complexe $z_0 = e^{i\alpha/4}$ est une solution de $z^4 = e^{i\alpha}$ et comme les racines quatrièmes de l'unité sont $\pm 1$ et $\pm i$, les solutions de l'équation $z^4 = e^{i\alpha}$ sont $\pm z_0$ et $\pm i z_0$.

Les racines complexes de $X^8 + X^4 + 1$ sont donc

$$\pm e^{\pm i\pi/6} = \pm\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \pm i e^{\pm i\pi/6} = \pm \exp\Big[i\pi\Big(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\Big)\Big] = \pm e^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad \pm e^{i2\pi/3} = \pm j \quad \text{ou} \quad \pm\bar{j}.$$

On a trouvé huit racines distinctes pour un polynôme de degré huit, donc ce sont toutes des racines simples. De plus, le polynôme à factoriser est unitaire, donc

$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= \big[(X - e^{i\pi/6})(X - e^{-i\pi/6})\big]\big[(X + e^{i\pi/6})(X + e^{-i\pi/6})\big]\big[(X - j)(X - \bar{j})\big]\big[(X + j)(X + \bar{j})\big] \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1). \end{aligned}$$

❧ **Deuxième version.**

On reconnaît une somme géométrique : $X^{12} - 1 = (X^4 - 1)(X^8 + X^4 + 1)$, donc les racines de $X^8 + X^4 + 1$ sont des racines douzièmes de l'unité. En particulier, ce sont des nombres complexes de module 1 et comme il est clair que notre polynôme n'a pas de racine réelle, sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est donc de la forme

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)(X^2 + cX + 1)(X^2 + dX + 1).$$

Ce polynôme est pair, donc

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 - aX + 1)(X^2 - bX + 1)(X^2 - cX + 1)(X^2 - dX + 1)$$

et, par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, on peut donc se contenter de chercher deux réels $a$ et $b$ tels que

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 - aX + 1)(X^2 + aX + 1)(X^2 - bX + 1)(X^2 + bX + 1).$$

En développant le second membre et en identifiant terme à terme au premier membre, on obtient

$$(2 - a^2) + (2 - b^2) = 0 \qquad \text{et} \qquad 2 + (2 - a^2)(2 - b^2) = 1$$

c'est-à-dire $a^2 = 1$ et $b^2 = 3$ (ou l'inverse !).

*Soient $a_0, \dots, a_n$, des réels deux à deux distincts.*

**1.** *Soient $b_0, \dots, b_n$, des réels (quelconques). Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P(a_k) = b_k.$$

**2.** *Expliciter le polynôme, noté $L_k$, qui répond au problème précédent lorsque $b_i = 1$ pour $i = k$ et $b_i = 0$ pour les autres valeurs de $i$.*

**3.** *Démontrer que*

$$\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad X^p = \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k.$$

**1.** Cours sur les polynômes interpolateurs de Lagrange.

**2.**

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

**3.** Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Le monôme $X^p$ et le polynôme $S_p = a_0^p L_0 + \dots + a_n^p L_n$ sont tous les deux des polynômes dont le degré est inférieur à $n$. De plus,

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant n, \quad S_p(a_\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k(a_\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k^p \delta_{k,\ell} = \alpha_\ell^p.$$

La différence $X^p - S_p$ est donc un polynôme de degré inférieur à $n$ qui admet au moins $(n+1)$ racines distinctes, donc c'est le polynôme nul.

On a donc démontré que

$$\forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad X^p = \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k.$$

❧ Plus généralement, on peut poser la division euclidienne de $X^p$ par le polynôme (non nul !)

$$P_0 = (X - a_0)(X - a_1) \cdots (X - a_n) = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k).$$

Comme $\deg P_0 = n + 1$, il existe donc un polynôme $Q_p$ et un polynôme $R_p \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$X^p = Q_p P_0 + R_p.$$

Bien entendu, si $p \leqslant n$, on a $Q_p = 0$ et $R_p = X^p$ !

Comme les réels $a_0, \dots, a_n$ sont racines de $P_0$, on a

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant n, \qquad a_\ell^p = Q_p(a_\ell) P_0(a_\ell) + R_p(a_\ell) = R_p(a_\ell)$$

et, comme précédemment, la différence $R_p - S_p$ est un polynôme de degré inférieur à $n$ qui admet au moins $(n+1)$ racines distinctes (les $a_\ell$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant n$). Donc, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, le polynôme interpolateur $S_p$ est en fait le reste de la division euclidienne de $X^p$ par $P_0$.

✍ *Lorsque le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ est scindé à racines simples (et lorsque ces racines sont connues !), il peut donc être utile d'utiliser l'interpolation de Lagrange pour calculer les puissances de la matrice $A$.*

‖ *Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec les matrices de rang 1.*

Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ commutent avec toutes les matrices de rang 1, alors $M$ commute en particulier avec les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

❧ On doit se rappeler que

$$M = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \cdot E_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \cdot E_k.E_\ell^\top.$$

On en déduit que

$$ME_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \cdot E_k.E_\ell^\top.E_i.E_j^\top = \sum_{k=1}^{n} [M]_{k,i} \cdot E_{k,j}.$$

Le produit $ME_{i,j}$ est donc la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j$-ème colonne qui est égale à la $i$-ème colonne de $M$.

De même,

$$E_{i,j}M = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \cdot E_i.E_j^\top.E_k.E_\ell^\top = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{j,\ell} \cdot E_{i,\ell}.$$

Le produit $E_{i,j}M$ est donc la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la $i$-ème ligne qui est égale à la $j$-ème ligne de $M$.

❧ Puisque $ME_{i,j} = E_{i,j}M$, alors les coefficients situés à l'intersection de la $j$-ème colonne et de la $i$-ème ligne sont égaux :

$$[M]_{i,i} = [M]_{j,j}.$$

Les autres coefficients de la $j$-ème colonne de $ME_{i,j}$ sont nuls (puisque ceux de $E_{i,j}M$ sont nuls) :

$$\forall\, k \neq i, \qquad [M]_{k,i} = 0$$

et, de même, les autres coefficients de la $i$-ème ligne de $E_{i,j}M$ sont nuls (puisque ceux de $ME_{i,j}$ sont nuls) :

$$\forall\, \ell \neq j, \qquad [M]_{j,\ell} = 0.$$

❧ Il existe donc un scalaire $\lambda$ tel que $[M]_{i,i} = \lambda$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et on a démontré que, nécessairement, la matrice $M$ est égale à $\lambda I_n$.

Réciproquement, quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda I_n$ commute à toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (et pas seulement aux matrices de rang 1).

❧ **Variante géométrique.**

Considérons un endomorphisme $f$ de $E$ qui commute à tous les endomorphismes de rang 1.

Pour tout vecteur $x \neq 0_E$, on note $\pi_x$, une projection sur la droite $\mathbb{K} \cdot x$.

✍ *Il y a autant de projections sur la droite $\mathbb{K} \cdot x$ qu'il y a de sous-espaces vectoriels $G$ de $E$ tels que $E = \mathbb{K} \cdot x \oplus G$. Comme $E$ est un espace de dimension finie, le Théorème de la base incomplète nous assure qu'il existe au moins une projection sur $\mathbb{K} \cdot x$.*

Le rang d'une projection est la dimension du sous-espace fixe, donc $\operatorname{rg} \pi_x = 1$. Par hypothèse sur $f$,

$$(f \circ \pi_x)(x) = (\pi_x \circ f)(x).$$

Or $\pi_x(x) = x$ (puisque $x$ appartient à l'image du projecteur $\pi_x$) et $(\pi_x \circ f)(x) \in \operatorname{Im} \pi_x$ (par définition de l'image). Par conséquent,

$$f(x) \in \mathbb{K} \cdot x$$

et, comme le vecteur $x$ n'est pas nul, on en déduit que $x$ est un vecteur propre de $f$.

On a donc démontré que tout vecteur non nul de $E$ est un vecteur propre de $f$.

✍ *La suite est un exercice archi-classique.*

❧ Si $x$ et $y$ sont des vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$, alors le couple $(x, y)$ est une famille libre et

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y.$$

Comme $(x, y)$ est libre, la somme $x + y$ n'est pas nulle, donc c'est aussi un vecteur propre de $f$ : il existe un scalaire $\alpha$ tel que
$$f(x+y) = \alpha \cdot (x+y).$$
On en déduit que
$$(\lambda - \alpha) \cdot x + (\mu - \alpha) \cdot y = 0_E$$
et donc que $\lambda = \alpha = \mu$ (famille libre !), ce qui est contradictoire.

On a ainsi démontré que tous les vecteurs non nuls de $E$ sont des vecteurs propres de $f$ associés à une même valeur propre. Autrement dit, $f$ est une homothétie.

> *Soit $n \geqslant 2$, un entier.*
> *On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients*
> $$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad a_{i,j} = \sin(i+j).$$
> *Calculer le rang de $A$, puis le déterminant de $A$.*

Considérons les colonnes $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par

$$X^\top = \begin{pmatrix}\cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y^\top = \begin{pmatrix}\sin 1 & \sin 2 & \cdots & \sin n\end{pmatrix}.$$

Comme $a_{i,j} = \sin i \cos j + \cos i \sin j$, la $j$-colonne de $A$ est égale à $\sin j \cdot X + \cos j \cdot Y$ et toutes les colonnes de $A$ sont donc des combinaisons linéaires de $X$ et $Y$. Par conséquent, le rang de $A$ est inférieur à 2.

❧ Le déterminant de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix}\sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4\end{pmatrix}$$

est égal à $\sin 2 \sin 4 - \sin 3 \sin 3 = \frac{(\cos 2 - \cos 6) - (1 - \cos 6)}{2} = \frac{\cos 2 - 1}{2} \neq 0$, donc le rang de $A_2$ est égal à 2 et le rang de $A$ est supérieur à 2.

✍ *Le rang d'une matrice est supérieur ou égal à $r$ si, et seulement si, il existe au moins un mineur d'ordre $r$ non nul.*

*Le déterminant de la matrice $A_2$ est un mineur principal d'ordre 2, non nul, de $A$.*

❧ On a ainsi démontré que $\operatorname{rg} A = 2$ pour tout entier $n \geqslant 2$ ; que $\det A = \frac{\cos 2 - 1}{2}$ pour $n = 2$ et $\det A = 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

> *Soient* $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ *et* $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *telles que*
> $$\operatorname{rg}(f \circ g) = 2.$$
> *Calculer* $\operatorname{rg} f$ *et* $\operatorname{rg} g$.

Pour y voir plus clair :

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow[g]{} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}^3$$

❧ D'une part, $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$, donc $2 \leqslant \operatorname{rg} f$ et d'autre part, $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2$, donc $\operatorname{rg} f = 2$.

✍ *Le rang d'une application linéaire de* $E$ *dans* $F$ *est majoré à la fois par la dimension de* $E$ *et par la dimension de* $F$.

*De même, le rang d'une matrice est majoré à la fois par le nombre de ligne et par le nombre de colonnes de la matrice.*

❧ D'une part, $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{rg} g \leqslant 2$ et d'autre part, $2 = \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} g$, donc $\operatorname{rg} g = 2$.

✍ *Considérons plus généralement deux applications linéaires* $\varphi : E \to F$ *et* $\psi : F \to G$.

*Si le rang de* $\psi \circ \varphi$ *est égal à* $r$, *alors il existe une famille* $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ *de vecteurs de* $E$ *telle que* $\big((\psi \circ \varphi)(e_1), \dots, (\psi \circ \varphi)(e_r)\big)$ *soit une base de* $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi)$. *Comme cette famille est libre, on en déduit que les deux familles* $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ *et* $\big(\varphi(e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ *sont libres elle aussi. Par conséquent, l'image de* $\varphi$ *contient une famille libre de cardinal* $r$ *et le rang de* $\varphi$ *est au moins égal à* $r$.

*Plus précisément, le rang de* $\varphi$ *est égal à* $r$ *si, et seulement si, la restriction de* $\psi$ *à* $\operatorname{Im} \varphi$ *est injective.*

# rms135-1407

*Soient $E$, un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{K}$ et $u \in L(E)$.*

**1.** *On suppose que $u$ est nilpotent. Démontrer que $u^n$ est l'endomorphisme nul.*

**2.** *On suppose plus précisément que l'indice de nilpotence de $u$ est égal à $n$. Démontrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est la matrice $A$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** *Résoudre l'équation $X^2 = A$ avec $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

**1.** Cf. Cours.
Deux possibilités :
- Considérer le polynôme minimal, en déduire le polynôme caractéristique et conclure avec le Théorème de Cayley-Hamilton.
- Considérer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u^k$ et vérifier que $\dim \operatorname{Ker} u^k < \dim \operatorname{Ker} u^{k+1}$ tant que $\operatorname{Ker} u^k \neq E$.

**2.** Cf. Cours.
Il existe un vecteur $x_0$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. La famille

$$\mathscr{B} = \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$$

est alors une base de $E$ et la matrice de $u$ relative à $\mathscr{B}$ est la matrice $A$.

**3.** Si $X^2 = A$, alors $X^{2n} = A^n = 0_n$, donc $X^n = 0_n$ (d'après la première question).

❧ Discutons sur la parité de l'entier $n$.
- Si $n = 2p$, alors $p < n$ et
$$A^p = X^{2p} = X^n = 0_n.$$
L'indice de nilpotence de $A$ serait donc inférieur à $p$, ce qui contredit le fait que cet indice de nilpotence soit égal à $n$.
- Si $n = 2p + 1$ avec $n \geqslant 3$, alors $p \geqslant 1$ et donc $p + 1 < n$. On en déduit que
$$A^{p+1} = X^{2p+2} = X^{n+1} = X^n.X = 0_n.$$
Ainsi l'indice de nilpotence de $A$ serait inférieur à $p + 1$ et donc strictement inférieur à $n$ : nouvelle contradiction.

❧ Quel que soit $n \geqslant 2$, l'équation $X^2 = A$ n'a donc aucune solution.

*Soit* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*. Démontrer que*

$$\det(I_n + X.X^\top) = 1 + X^\top.X.$$

Si X est la colonne, l'égalité est évidente. Nous supposerons donc que $X \neq 0$ dans la suite.

❧ Munissons l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

✍ *Autrement dit : la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *est supposé être une base orthonormée.*

On note $x \in E$, le vecteur (non nul) représenté par la colonne X dans la base canonique.

La matrice carrée $X.X^\top$ est la matrice relative à la base canonique de l'application $\|x\| \cdot p$ (où p est la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot x$).

✍ *La projection orthogonale* p *sur la droite* $D = \mathbb{R} \cdot x$ *engendrée par ce vecteur* x *est donc définie par*

$$\forall\, y \in E, \quad p(y) = \frac{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

*d'où*

$$\forall\, y \in E, \quad \|x\|^2 \cdot p(y) = \langle\, x \,|\, y \,\rangle \cdot x.$$

*Notons* A*, la matrice canoniquement associée à la projection* p*. Comme la base canonique est orthonormée, l'égalité vectorielle précédente se traduit matriciellement par*

$$\forall\, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.X \cdot A.Y = X^\top.Y \cdot X = X \cdot X^\top.Y$$

*et comme cette égalité est vraie pour toutes les colonnes* Y*, on en déduit que*

$$X^\top.X \cdot A = X.X^\top.$$

Comme x est un vecteur non nul, le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{x}{\|x\|}$ est bien défini, c'est un vecteur unitaire. D'après le Théorème de la base orthonormée incomplète, il existe une base orthonormée de E de la forme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Dans cette base, la projection orthogonale p est représentée par la matrice $E_{1,1}$. Par conséquent, les matrices $X^\top.X$ et $\|x\|^2 \cdot E_{1,1} = (X^\top.X) \cdot E_{1,1}$ sont semblables.

✍ *Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes (qu'elles soient, ou non, orthonormées), sont semblables.*

Les matrices $I_n + X^\top.X$ et

$$I_n + X^\top.X \cdot E_{1,1} = \mathrm{Diag}(1 + \|x\|^2, 1, \dots, 1)$$

sont donc semblables et, en particulier, elles ont même déterminant.

Donc $\det(I_n + X^\top.X) = 1 + \|x\|^2 = 1 + X^\top.X.$

*On pose*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** *Expliciter une matrice inversible* $P$ *et une matrice diagonale* $D$ *telles que* $A = PDP^{-1}$.

**2.** *Soit* $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que*

$$X^2 + X = A.$$

*On pose* $\Delta = P^{-1}XP$.

**2. a.** *Calculer* $\Delta^2 + \Delta$.

**2. b.** *Démontrer que* $D$ *et* $\Delta$ *commutent. En déduire que* $\Delta$ *est diagonale.*

**3.** *Résoudre l'équation* $X^2 + X = A$ *pour* $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

**1.** On reconnaît une matrice bien connue et on en déduit que les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifient $P^{-1}AP = D$.

**2. a.** Sans surprise,

$$\Delta^2 + \Delta = P^{-1}(X^2 + X)P = P^{-1}AP = D.$$

**2. b.** D'après la question précédente, $D$ est un polynôme en $\Delta$, donc $D$ et $\Delta$ commutent.

❧ Restons élémentaires et posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{ce qui donne} \quad D\Delta = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $D$ et $\Delta$ commutent si, et seulement si, $b = c = 0$ (les réels $a$ et $d$ étant quelconques), c'est-à-dire si, et seulement si, $\Delta$ est diagonale.

✍ *On a travaillé matriciellement pour que le raisonnement soit aussi bref que possible. Mais il faut être conscient qu'il s'agit ici d'un cas particulier simple d'un résultat plus général : si* $M$ *est une matrice diagonale avec* $n$ *coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors les matrices qui commutent à* $M$ *sont les matrices diagonales.*

*Cette propriété peut se démontrer par un calcul matriciel direct (assez fastidieux) ou vectoriellement en introduisant un endomorphisme diagonalisable dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (plus élégant).*

**3.** Sachant que $\Delta = \text{Diag}(a, d)$, l'équation $\Delta^2 + \Delta = D$ se traduit par $a^2 + a = 2$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -2$, et par $d^2 + d = 0$, c'est-à-dire $d = 0$ ou $d = -1$. Il y a donc quatre solutions pour $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui donnent quatre solutions pour $X = P\Delta P^{-1}$. Sachant que

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

on en déduit que les quatre solutions pour $X$ sont :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}A, \quad P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = A - I_2, \quad P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = -A, \quad P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{-1}{2}A - I_2. \tag{$\star$}$$

✍ *L'énoncé nous poussait à diagonaliser la matrice* $A$*, mais on peut s'en passer, il suffit de connaître un polynôme annulateur de* $A$ *pour expliciter les solutions de l'équation.*

❧ **Variante avec le polynôme minimal**

Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas une homothétie, son polynôme minimal est de degré 2, donc la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en $A$ est égale à 2 et par conséquent $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_1[A]$. Comme $A^2 = 2A$, le polynôme minimal de $A$ est donc égal à $X^2 - 2X = X(X-2)$.

De même, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la sous-algèbre $\mathbb{R}[M]$ est égale à $\mathbb{R}_1[M]$ (puisque le degré du polynôme minimal de $M$ est inférieur à 2) et si $M^2 + M = A$, alors $A \in \mathbb{R}_1[M]$. Comme $\mathbb{R}_1[M]$ est une sous-algèbre, elle contient donc la sous-algèbre $\mathbb{R}_1[A]$ engendrée par $A$ et, par égalité des dimensions, on a donc : $\mathbb{R}_1[M] = \mathbb{R}_1[A]$. En particulier, $M \in \mathbb{R}_1[A]$ et il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $M = \alpha I + \beta A$.

On en déduit que

$$M^2 = \alpha^2 A^2 + 2\alpha\beta A + \beta^2 I = 2\alpha(\alpha+\beta)A + \beta^2 I$$

puisque $A^2 = 2A$. L'équation $X^2 + X = A$ devient alors

$$\alpha(2\alpha + 2\beta + 1)A + \beta(\beta+1)I = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I.$$

Comme $A$ n'est pas une homothétie, le couple $(A, I)$ est une famille libre et l'équation $X^2 + X = A$ est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \alpha(2\alpha + 2\beta + 1) = 1 \\ \beta(\beta + 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne $\beta = 0$ et $\alpha(2\alpha + 1) = 1$ d'une part et $\beta = -1$ et $\alpha(2\alpha - 1) = 1$ d'autre part. On a ainsi retrouvé les quatre solutions présentées plus haut $(\star)$.

> *Soient $E$, un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Démontrer que $f$ est un projecteur si, et seulement si,*
> $$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - I_E) = \dim E.$$

Si $p$ est un projecteur, alors on sait que

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(I - p) = \operatorname{Ker}(p - I).$$

✍ *Quels que soient l'application linéaire $f$ et le scalaire non nul $\lambda$, le noyau de $\lambda \cdot f$ est égal au noyau de $f$ et l'image de $\lambda \cdot f$ est égale à l'image de $f$. (On doit savoir poser sans hésitation les calculs qui justifient ces deux égalités.)*

En particulier,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Ker}(p - I) = \big[\dim E - \operatorname{rg} p\big] + \big[\dim E - \operatorname{rg}(p - id)\big]$$

d'après le Théorème du rang et donc : $\dim E = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - I)$.

❧ Réciproquement, les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - I)$ sont en somme directe, donc

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - I) \subset E.$$

✍ *Les différents sous-espaces propres d'un endomorphisme sont toujours en somme directe (même s'ils ne sont pas tout à fait propres : cela vaut aussi, de façon évidente, pour $\operatorname{Ker}(f - \lambda I) = \{0_E\}$).*

*Plus généralement, si deux polynômes $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, alors l'intersection des sous-espaces $\operatorname{Ker} P(f)$ et $\operatorname{Ker} Q(f)$ est réduite au vecteur nul. (Penser au Théorème de Bézout, évidemment !)*

En raisonnant comme plus haut (avec le Théorème du rang), l'hypothèse $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - I) = \dim E$ se traduit par

$$\dim\big(\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - I)\big) = \dim E \quad \text{et donc par} \quad \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - I) = E.$$

On distingue donc deux cas :

— si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_E$ et donc $(f \circ f)(x) = 0_E = f(x)$ par linéarité de $f$ ;

— si $x \in \operatorname{Ker}(f - I)$, alors $f(x) = x$ et donc $(f \circ f)(x) = x = f(x)$.

Dans les deux cas, on a obtenu $(f \circ f)(x) = f(x)$. Comme les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $E$, on peut en déduire que $(f \circ f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

✍ ***Attention, danger !*** *L'espace $E$ n'est pas l'union des deux noyaux et pourtant il suffit de vérifier la propriété sur ces deux noyaux pour pouvoir affirmer que la propriété est vraie sur $E$.*

❧ *On sait bien qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base : quelle que soit la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de $E$, quels que soient les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ de $F$, il existe une, et une seule, application linéaire $f$ telle que $f(e_k) = u_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.*

❧ *On doit savoir de même qu'une application linéaire est caractérisée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$ ou, plus généralement, par ses restrictions aux sous-espaces vectoriels d'une décomposition de $E$ en somme directe : quelle que soit la décomposition en somme directe*

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r,$$

*quelles que soient les applications linéaires $f_k : E_k \to F$, il existe une, et une seule, application linéaire $f \in L(E, F)$ telle que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r,\ \forall\, x \in E_k, \quad f(x) = f_k(x).$$

*C'est la propriété d'unicité énoncée par ce théorème qui nous permet ici de conclure (et on a pris soin de rappeler que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - I)$ étaient supplémentaires dans $E$ avant de conclure, ce qui est une manière de citer ce théorème de caractérisation).*

*Soient $E$, un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in L(E)$, un endomorphisme tel que*

$$u^3 + u = \omega_E$$

*(où $\omega_E$ est l'endomorphisme nul de $E$).*

**1.** *Soit $x \in \operatorname{Im} u$. Calculer $u^2(x)$.*

**2.** *On note $v$, l'endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par restriction de $u$.*

**2. a.** *Justifier l'existence de $v$.*

**2. b.** *Démontrer que $v$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u$.*

**3.** *Démontrer que l'entier $\operatorname{rg} u$ est pair.*

**1.** Comme $x \in \operatorname{Im} u$, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $x = u(x_0)$ et d'après la relation de liaison

$$u^2(x) = u^3(x_0) = -u(x_0) = -x.$$

**2. a.** Le sous-espace $\operatorname{Im} u$ est stable par $u$, donc il existe bien un endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par restriction de $u$.

✍ *Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas d'autre raison à avancer que la stabilité du sous-espace.*

**2. b.** Par définition, $v : \operatorname{Im} u \to \operatorname{Im} u$ et $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u$. D'après la première question, $(v \circ v)(x) = u^2(x) = -x$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u$. Autrement dit, $v \circ v = -I_{\operatorname{Im} u}$, ce qui prouve que $v$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u$ et que $v^{-1} = -v$.

**3.** Par définition, si l'entier $\operatorname{rg} u$ est impair, alors la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} u$ est impaire et le polynôme caractéristique de $v \in L(\operatorname{Im} u)$ est un polynôme à coefficients réels dont le degré est impair.

Un tel polynôme admet nécessairement une racine, donc $v$ possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

✍ *L'existence d'une racine provient du Théorème des valeurs intermédiaires.*

On a remarqué que $X^2 + 1$ était un polynôme annulateur de $v$ et on sait que toute valeur propre de $v$ est nécessaire une racine de tout polynôme annulateur de $v$.

Or $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, c'est donc absurde.

Le rang de $v$ est donc pair.

❧ **Variante avec des matrices complexes**

Par hypothèse, $X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}[X]$ !) pour la matrice $A$ canoniquement associée à l'endomorphisme $u$. Il existe donc une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ (à coefficients **complexes**) et une matrice diagonale à coefficients complexes

$$D = \operatorname{Diag}(0, \dots, 0, i, \dots, i, -i, \dots, -i) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

telles que $P^{-1}AP = D$.

En particulier, $A$ et $D$ ont même polynôme caractéristique (ce sont deux matrices *semblables*) et comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de son polynôme caractéristique sont des nombres **réels**.

On en déduit que les multiplicités de $\pm i$, racines complexes conjuguées du polynôme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, sont égales et cela prouve qu'il y a autant de coefficients diagonaux de $D$ égaux à $+i$ que de coefficients diagonaux de $D$ égaux à $-i$.

Le nombre de coefficients diagonaux non nuls est donc pair et il s'agit du rang de $D$, c'est-à-dire du rang de $A$ (deux matrices semblables ont même rang).

## rms135-1413

*Soient $u$ et $v$, deux endomorphismes nilpotents et non nuls de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $u$ et $v$ commutent.*

**1.** *On note $w$, l'endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par restriction de $v$.*

**1. a.** *Démontrer que $w$ est bien défini.*

**1. b.** *En déduire que $\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg}(u)$.*

**2.** *Soient $A_1, \dots, A_n$, des matrices nilpotentes d'ordre $n$ qui commutent deux à deux. Démontrer que le produit*

$$A_1 A_2 \cdots A_n$$

*est égal à la matrice nulle.*

**1. a.** Comme les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, le sous-espace $\operatorname{Im} u$ est stable par $v$. Par conséquent, il existe bien un endomorphisme $w$ de $\operatorname{Im} u$ tel que

$$\forall\, x \in \operatorname{Im} u, \qquad w(x) = v(x).$$

**1. b.** Comme $v$ est nilpotent, le polynôme $X^n$ est un polynôme annulateur de $v$ et donc aussi un polynôme annulateur de $w$.

✍ *Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ est un polynôme annulateur de $v$, alors*

$$\forall\, x \in E, \quad P(v)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k v^k(x) = 0_E$$

*et en particulier*

$$\forall\, x \in \operatorname{Im} u, \quad P(w)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k w^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k v^k(x) = 0_E,$$

*donc $P$ est aussi un polynôme annulateur de $w$.*
*Entre $v$ et $w$, seul le quantificateur change !*

En particulier, $w$ n'est pas injectif.

✍ *Une composée d'applications injectives est injective. Par contraposition, si une puissance de $w$ est identiquement nulle, $w$ ne peut être injective.*

D'après le Théorème du rang (appliqué à $w \in L(\operatorname{Im} u)$), l'endomorphisme $w$ n'est pas surjectif et donc $\operatorname{rg} w < \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg} u$.

Or, par définition de $w$,

$$\begin{aligned} \forall\, y \in E, \qquad y \in \operatorname{Im} w &\iff \exists\, x \in \operatorname{Im} u, \quad y = v(x) \\ &\iff \exists\, x_0 \in E, \quad y = v\big(u(x_0)\big) \\ &\iff y \in \operatorname{Im}(v \circ u) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(v \circ u)$. Finalement,

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} w < \operatorname{rg} u.$$

**2.** Notons $u_k$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A_k$ et posons

$$v_1 = u_1 \qquad \text{ainsi que} \qquad \forall\, 1 \leqslant k < n, \quad v_{k+1} = v_k \circ u_{k+1}.$$

Comme les $u_k$ sont nilpotents et commutent deux à deux, les endomorphismes $v_k$ commutent deux à deux (par récurrence finie) et sont donc nilpotents :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad v_{k+1}^n = v_k^n \circ u_{k+1}^n = \omega_E \circ \omega_E = \omega_E.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad \operatorname{rg} v_{k+1} < \operatorname{rg} v_k \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{rg} v_{k+1} \leqslant (\operatorname{rg} v_k) - 1$$

(puisqu'il s'agit d'**inégalité entre nombres entiers**).

Une nouvelle récurrence finie permet d'en déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{rg} v_k \leqslant n - k$$

et en particulier que $\operatorname{rg} v_n \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$v_n = u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = \omega_E.$$

*Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

**1.** *La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.*

**2.** *La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?*

**1.** La matrice $A$ est triangulaire, donc elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de $0$.

La matrice $A$ est donc inversible si, et seulement si, $a \neq 0$.

✍ *Si la matrice $A$ représente l'endomorphisme $f$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors $e_1$ (resp. $e_2$) est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $1$ (resp. $2$). Par conséquent, si $A$ est inversible, alors $f^{-1}(e_1) = e_1$ et $f^{-1}(e_2) = \frac{1}{2} \cdot e_2$.*

❧ Si $a \neq 0$, l'inverse de $A$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/2 & \beta \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

et le produit

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/2 & \beta \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nous donne $\alpha = -1$ et $\beta = 0$.

**2.** Comme $A$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, a\}$.

On a remarqué plus que les colonnes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres 1 et 2.

✍ *Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, pour chaque valeur propre $\lambda$, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre (en tant que racine du polynôme caractéristique).*

*Par ailleurs, on sait que, pour toute valeur propre simple, la dimension du sous-espace propre est nécessairement égale à $1$. Il suffit donc de poser les calculs pour les éventuelles valeurs propres de multiplicité supérieure à $2$.*

— Si $a \notin \{1, 2\}$, alors $A$ est diagonalisable (comme toutes les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ qui ont trois valeurs propres distinctes) et comme

$$A - aI_3 = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{la colonne} \qquad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} \neq 0$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre $a$.

— Si $a = 1$, alors $1$ est une valeur propre double et le rang de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est strictement inférieure à la multiplicité de cette valeur propre et $A$ n'est pas diagonalisable.

— Si $a = 2$, alors $2$ est une valeur propre et le rang de la matrice

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est égale à la multiplicité de cette valeur propre. L'autre valeur propre, égale à 1, est une valeur propre simple. Donc la matrice $A$ est diagonalisable.

En conclusion, la matrice $A$ est diagonalisable si, et seulement si, $a \neq 1$. Plus précisément, on a démontré que, pour tout $a \neq 1$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \qquad \text{donne} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.** *La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?*
**2.** *La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.*

**1.** La matrice $A$ est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

**2.** Si $x = 0$, alors la première et la troisième colonnes de $A$ sont proportionnelles, donc $A$ n'est pas inversible.

Si $x \neq 0$, alors les colonnes $C_1$ et $C_3$ ne sont pas proportionnelles, donc le couple $(C_1, C_3)$ est une famille libre. De plus, la colonne $C_2$ n'est pas engendrée par $(C_1, C_3)$ (considérer la dernière ligne), donc la famille $(C_1, C_3, C_2)$ est libre.

✍ *À propos de l'**augmentation d'une famille libre** :*
*si $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre, alors la famille augmentée $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$ est libre si, et seulement si,*

$$e_{r+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

*Attention ! Si la famille $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$ est liée, l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres mais, en général, rien ne prouve que le dernier vecteur de la liste soit une combinaison linéaire des $r$ premiers vecteurs !*

✍ *De manière analogue (**diminution d'une famille génératrice**) :*
*si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$, alors la sous-famille $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ si, et seulement si,*

$$e_{r+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

*Même remarque ! Si la famille $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$ est liée, en retirant un vecteur convenable de cette famille, on obtient une famille diminuée qui engendre le même sous-espace vectoriel mais, en général, rien ne prouve qu'on puisse se passer du dernier vecteur de la famille. Ici aussi, il faut connaître une relation de liaison entre les $e_k$ pour savoir de quel vecteur on peut se passer.*

En conclusion, la matrice $A$ est inversible si, et seulement si, $x \neq 0$.

✍ *On peut aussi calculer $\det A = -x$ pour conclure.*

❧ La forme de la matrice $A$ incite, *pour une fois*, à calculer la comatrice pour obtenir l'inverse de $A$ :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x \\ -1 & x & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad A^{-1} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x \\ 1 & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

> *Soient* $E$*, un espace vectoriel de dimension* $3$ *et* $f \in L(E)$*, un endomorphisme non nul tel que* $f^2 = \omega_E$.
>
> **1.** *Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de* $f$.
>
> **2.** *Démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* $E$ *telle que*
>
> $$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
>
> **3.** *Soient* $M_1$ *et* $M_2$*, deux matrices non nulles de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*
>
> $$M_1^2 = M_2^2 = 0_3.$$
>
> *Démontrer que* $M_1$ *et* $M_2$ *sont semblables.*
>
> **4.** *Démontrer que deux matrices carrées semblables (de taille quelconque) ont même rang.*
>
> **5.** *Soient* $M_1$ *et* $M_2$*, deux matrices non nulles de* $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ *telles que* $M_1^2 = M_2^2 = 0_4$*. Les matrices* $M_1$ *et* $M_2$ *sont-elles nécessairement semblables ?*

**1.** Par hypothèse, $X^2$ est un polynôme annulateur unitaire de $f$. De plus, $f \neq \omega_E$, donc $X$ n'est pas un polynôme annulateur de $f$.

Le polynôme minimal de $f$ est un polynôme unitaire annulateur de $f$ qui divise tous les polynômes annulateurs de $f$. Donc c'est un diviseur de $X^2$ et ce n'est pas $X$. Le polynôme minimal de $f$ est donc $X^2$.

❧ D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est divisible par le polynôme minimale et comme $\dim E = 3$, le degré du polynôme caractéristique est égal à 3. Le polynôme caractéristique de $f$ est donc de la forme $X^2(X - \lambda)$.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de $f$ et toute valeur propre de $f$ est aussi racine du polynôme minimal, donc $\lambda = 0$. Ainsi, le polynôme caractéristique de $f$ est égal à $X^3$.

❧ Comme $f \circ f = \omega_E$, on sait que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$. Par ailleurs, $\operatorname{rg} f \geqslant 1$ (puisque $f \neq \omega_E$) et $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E = 3$ (Théorème du rang), donc $\operatorname{rg} f = 1$.

**2.** On sait que

$$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Ker} f^2 = \mathbb{R}^3 \qquad \text{avec} \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension finie, et il existe au moins un vecteur $e_3$ tel que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{R} \cdot e_3. \qquad (\star)$$

✍ *Comme on sait, en fait, n'importe quel vecteur* $e_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} f$ *dirige une droite supplémentaire de l'hyperplan* $\operatorname{Ker} f$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Comme $e_3 \notin \operatorname{Ker} f$, alors le vecteur $e_1 = f(e_3)$ n'est pas nul. Mais $f(e_1) = f^2(e_3) = 0_E$, donc $e_1$ est un vecteur non nul du plan $\operatorname{Ker} f$. Il existe donc un vecteur $e_2$ tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

D'après $(\star)$, la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et comme

$$f(e_1) = f(e_2) = 0_E \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1, \qquad \text{on a} \qquad \mathfrak{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = N \qquad \text{où} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.** D'après ce qui précède, les deux matrices $M_1$ et $M_2$ sont semblables à la matrice $N$, donc elles sont semblables entre elles (relation d'équivalence).

**4.** Considérons deux matrices semblables $A$ et $B$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $B = P^{-1}AP$, alors $BX = P^{-1}APX$ pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'application

$$\left[Y \mapsto P^{-1}Y\right]$$

est un automorphisme de $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (dont la réciproque est $[Y \mapsto PY]$) et

$$\forall\, Y \in \operatorname{Im} A,\ \exists\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad P^{-1}Y = P^{-1}(AX) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = B(\dots) \in \operatorname{Im} B$$
$$\forall\, Y \in \operatorname{Im} B,\ \exists\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad PY = P(BX) = (PBP^{-1})(PX) = A(\dots) \in \operatorname{Im} A.$$

Ces calculs montrent que l'application $\left[Y \mapsto P^{-1}Y\right]$ induit (par restriction) un isomorphisme de $\operatorname{Im} A$ sur $\operatorname{Im} B$. En particulier, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

**5.** Les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont deux matrices non nulles telles que $M^2 = 0_4$, mais elles n'ont pas même rang ($\operatorname{rg} M_1 = 2$, $\operatorname{rg} M_2 = 1$), donc elles ne sont pas semblables.

## rms135-1417

*Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**1.** *Calculer $AU$. Que peut-on en déduire ?*
**2.** *Calculer le polynôme caractéristique de $A$.*
**3.** *La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ?*

**1.** On constate que $AU = 2U$, donc $U$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 2.
**2.** Le calcul précédent doit inciter à effectuer l'opération $C_3 \leftarrow C_2 - C_3$ afin d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On finit par trouver :

$$\chi_A = (X-2)\big((X-1)^2 + 2a\big).$$

**3.** Si $a > 0$, le polynôme caractéristique de $A$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc la matrice $A$ n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable).
❧ Si $a \leqslant 0$, le polynôme caractéristique de $A$ admet trois racines réelles :

$$2, \quad 1 \pm \sqrt{-2a}.$$

Si ces trois racines sont deux à deux distinctes, alors la matrice $A$ est diagonalisable mais si l'une des racines est double, le cas est douteux.

Comme $1 - \sqrt{-2a} \leqslant 1$, il n'y a que deux cas douteux : $1 + \sqrt{-2a} = 1 - \sqrt{-2a}$ et $1 + \sqrt{-2a} = 2$.
❧ Si $a = 0$, le polynôme caractéristique de $A$ admet une racine double : $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$ et, dans ce cas, le rang de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc le sous-espace propre associé à 1 est une droite vectorielle (Théorème du rang). La matrice $A$ n'est donc pas diagonalisable dans ce cas.
❧ Si $a = -1/2$, le polynôme caractéristique de $A$ admet une racine double : $\chi_A = X(X-2)^2$ et, dans ce cas, le rang de la matrice

$$A - 2I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et la matrice $A$ n'est pas diagonalisable (pour les mêmes raisons que dans le cas $a = 0$).
❧ En conclusion, la matrice $A$ est diagonalisable si, et seulement si, $a \in \left]-\infty, -1/2\right[ \cup \left]-1/2, 0\right[$.

*Soient $a$, $b$, $c$ et $d$, des nombres complexes et*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

*On suppose que $a^2 + b^2 \neq 0$.*

$\boxed{1.}$ *Calculer le produit $M.M^\top$. En déduire la valeur de* $\det M$.

$\boxed{2.\ a.}$ *On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Démontrer que* $\operatorname{rg} M = 4$.

$\boxed{2.\ b.}$ *On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Démontrer que* $\operatorname{rg} M = 2$.

$\boxed{3.}$ *Étudier la diagonalisabilité de $M$.*

On va simplifier les calculs en remarquant que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse $\det A = a^2 + b^2 \neq 0$ signifie que le bloc $A$ est inversible. Les quatre matrices $A$, $B$, $A^\top$ et $B^\top$ commutent deux à deux car elles appartiennent toutes à la sous-algèbre $\mathbb{K}[U]$ engendrée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$A = aI_2 + bU, \quad A^\top = aI_2 - bU, \quad B = cI_2 + dU, \quad B^\top = cI_2 - dU.$$

En remarquant que $U^2 = -I_2$, on peut considérer que $A^\top$ et $B^\top$ sont en quelque sorte les conjuguées de $A$ et $B$. On ne sera donc pas surpris de constater que

$$A^\top.A = A.A^\top = (a^2 + b^2)I_2 \qquad \text{et que} \qquad B^\top.B = B.B^\top = (c^2 + d^2)I_2.$$

On en déduit immédiatement que

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A^\top \qquad \text{et que} \qquad (A^\top)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A.$$

$\boxed{1.}$ D'après les règles du produit par blocs,

$$M.M^\top = \begin{pmatrix} A.A^\top + B.B^\top & -AB + BA \\ -B^\top.A^\top + A^\top.B^\top & A^\top.A + B^\top.B \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$

❧ On en déduit que

$$(\det M)^2 = \det M . \det M^\top = \det(M.M^\top) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

et donc que $\det M = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Il est clair que $\det M$ est une fonction polynomiale de $a$, $b$, $c$ et $d$, donc le signe en facteur est indépendant de $a$, $b$, $c$ et $d$. Il est tout aussi clair que, si $b = c = d = 0$, alors $\det M = +a^4$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, donc

$$\forall\, (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \qquad \det M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

$\boxed{2.\ a.}$ D'après la question précédente, si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, alors $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ est inversible et donc $\operatorname{rg} M = 4$.

✍ *Comme $a$, $b$, $c$ et $d$ sont complexes, la condition $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ ne signifie pas que les quatre scalaires sont nuls !*

$\boxed{2.\ b.}$ Cette fois, $\det M = 0$ et nous allons caractériser les vecteurs du noyau de $M$ pour calculer le rang de la matrice.

La colonne $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ appartient au noyau de M si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = MX = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme le bloc $A$ est inversible, le bloc $A^\top$ est aussi inversible et

$$\begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}B(A^\top)^{-1}B^\top X_1 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases}.$$

D'après les calculs menés en préambule,

$$A^{-1}B(A^\top)^{-1}B^\top = \frac{1}{(a^2+b^2)^2} A^\top.A.B.B^\top = \frac{c^2+d^2}{a^2+b^2} I_2 = -I_2$$

puisque $c^2 + d^2 = -(a^2+b^2)$ ! La colonne $X$ appartient donc au noyau de $M$ si, et seulement si, $X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1$, la colonne $X_1 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ étant quelconque.

Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker} M = \dim \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C}) = 2$ et, d'après le Théorème du rang, $\operatorname{rg} M = 4 - \dim \operatorname{Ker} M = 2$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ D'après la première question, quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(M - \lambda I_4) = \big((a-\lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2.$$

✍ *On passe en effet de $M$ à $(M - \lambda I_4)$ en remplaçant $a$ par $(a - \lambda)$ !*

❧ Si $b^2 + c^2 + d^2 = 0$, alors le polynôme caractéristique de $M$ admet $a$ comme seule racine (de multiplicité 4). Dans ces conditions,

— ou bien $b = c = d = 0$ et $M = aI_4$ est diagonale ;

— ou bien $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$ et $M \neq aI_4$, donc $M$ n'est pas diagonalisable.

✍ *On doit savoir que la seule matrice semblable à $aI_4$ est la matrice $aI_4$ elle-même !*
*Et on doit se souvenir que les coefficients $b$, $c$ et $d$ sont complexes : de ce fait, la condition $b^2+c^2+d^2 = 0$ n'implique aucunement que $b = c = d = 0$.*

❧ Si $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, alors l'équation $z^2 = b^2 + c^2 + d^2$ admet deux solutions complexes distinctes $\pm\omega$ et $\operatorname{Sp}(M) = \{a \pm \omega\}$.

Comme on l'a démontré plus haut, pour chacune des deux valeurs propres, la dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_4)$ est égale à 2.

✍ *À nouveau, on doit prendre conscience que la matrice $(M - \lambda I_4)$ se déduit de la matrice $M$ en remplaçant $a$ par $(a - \lambda)$.*
*Lorsque $\lambda$ est une valeur propre de $M$, alors $(M - \lambda I_4)$ n'est pas inversible et on est ainsi ramené au* ***2.b.***

La somme des dimensions des sous-espaces propres (2 + 2) est égale à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel la matrice $M$ opère ($\dim \mathbb{C}^4 = 4$), donc la matrice $M$ est diagonalisable.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ *Soient $E$, un espace euclidien et $F$, un sous-espace de $E$. On suppose connue une base orthonormée de $F$. Rappeler l'expression du projeté orthogonal sur $F$ d'un vecteur $u \in E$.*

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite $D$ représentée par*

$$6x = 4y = z.$$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Si $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base **orthonormée** du sous-espace $F$, alors le projeté orthogonal $\pi(u)$ sur $F$ du vecteur $u \in E$ est

$$\sum_{k=1}^{r} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u \,\rangle \cdot \varepsilon_k.$$

✍ *Si $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base **orthogonale** de $F$, alors $(e_k/\|e_k\|)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée et par linéarité à droite du produit scalaire,*

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle\, e_k \,|\, u \,\rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Le sous-espace $F$ représenté par le système $6x = 4y = z$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $e_1 = (2, 3, 12)$.

✍ *La représentation $6x = 4y = z$ est une manière abrégée d'écrire le système*

$$\begin{cases} 6x \phantom{{}+4y} - z = 0 \\ \phantom{6x+{}} 4y - z = 0 \end{cases}.$$

*En résolvant ce système, on exprime $x$, $y$ et $z$ en fonction d'un seul paramètre $t$ et on constate que les solutions sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont proportionnels au vecteur $(2, 3, 12)$.*

D'après la formule du cours (avec $r = 1$), avec $u = (x, y, z)$,

$$\pi(u) = \frac{\langle\, e_1 \,|\, u \,\rangle}{\|e_1\|^2} \cdot e_1 = \frac{2x + 3y + 12z}{4 + 9 + 144} \cdot (2, 3, 12)$$

et on en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\pi) = \frac{1}{157} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 24 \\ 6 & 9 & 36 \\ 24 & 36 & 144 \end{pmatrix}.$$

✍ *La trace est égale à $1$ et le rang est égal à $1$, ce qui est normal puisqu'on projette sur un sous-espace de dimension $1$.*

*Pour la structure euclidienne canonique, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée. Il est donc normal que la matrice de la projection orthogonale soit une matrice symétrique.*

*Soit $E$, l'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f$ et $g$ dans $E$, on pose*

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

**1.** *Démontrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.*

**2.** *On considère les vecteurs*

$$f = \left[x \mapsto \sin^2 x\right], \quad g_1 = [x \mapsto \cos x] \quad \textit{et} \quad g_2 = [x \mapsto \cos 2x].$$

*Déterminer le projeté orthogonal de $f$ sur le sous-espace $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$.*

**1.** L'intégrale est bien définie quelles que soient les fonctions $f$ et $g$ dans $E$ (fonction continue sur un segment) ; de ce fait, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est clairement une forme bilinéaire et symétrique sur $E \times E$. Cette forme est positive (pour $f = g$, on intègre bornes croissantes une fonction positive).

En fait, cette forme est définie positive : si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ de la fonction <u>continue</u> et positive $f^2$ est nulle et comme $0 < 2\pi$, on peut en déduire que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (Théorème de nullité de l'intégrale). Or $f \in E$ est, par hypothèse, $2\pi$-périodique, donc en fait $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$ et $f = 0_E$.

Donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $E$.

**2.** Nous allons calculer le projeté orthogonal de $f$ de deux manières.

❧ **Version naïve**

Comme $\pi(f) \in G$, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\pi(f) = ag_1 + bg_2$ et la contrainte $f - \pi(f) \in G^\perp$ se traduit par

$$\langle f - ag_1 - bg_2 \mid g_1 \rangle = \langle f - ag_1 - bg_2 \mid g_2 \rangle = 0$$

c'est-à-dire par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\langle g_1 \mid g_1 \rangle + b\langle g_1 \mid g_2 \rangle & = & \langle f \mid g_1 \rangle \\ a\langle g_1 \mid g_2 \rangle + b\langle g_2 \mid g_2 \rangle & = & \langle f \mid g_2 \rangle. \end{array}\right.$$

✍ *La matrice de ce système est la* ***matrice de Gram*** *de la base $(g_1, g_2)$ de $G$.*

On calcule une nouvelle fois ces cinq intégrales très célèbres.

$$\begin{aligned}
\langle f \mid g_1 \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos x\,dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \\
\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 px\,dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2px}{2}\,dx = \pi \\
\langle g_1 \mid g_1 \rangle &= \langle g_2 \mid g_2 \rangle = \pi \\
\langle f \mid g_2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{-1}{2}\langle g_2 \mid g_2 \rangle = \frac{-\pi}{2} \\
\langle g_1 \mid g_2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x + \cos x}{2}\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Le système posé devient donc $\{\pi a = 0,\ \pi b = {-\pi}/2\}$, donc $\pi(f) = {-g_2}/2$.

❧ **Version sioux (pour ceux qui connaissent vraiment la trigonométrie)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}g_2(x)$$

et on sait (théorie des séries de Fourier) que la famille $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire considéré ici, donc

$$f = \underbrace{\frac{1}{2}g_0}_{\in G^\perp} + \underbrace{\frac{-1}{2}g_2}_{\in G}$$

ce qui nous donne $\pi(f) = {-g_2}/2$.

✍ *La théorie des séries de Fourier n'est pas au programme, mais elle est une composante essentielle de la culture mathématique.*

*On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.*

**1.** *Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.*

**2.** *Soit $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de $M$ au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de $M$.*

**1.** On sait que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists\, S = \frac{M + M^\top}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists\, A = \frac{M - M^\top}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\quad M = S + A \tag{$\star$}$$

et donc que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Cette décomposition doit être connue (c'est la même pour <u>toutes</u> les symétries, elle n'est pas spécifique à la transposition).*

*En cas de malheur, on peut retrouver cette décomposition en raisonnant par analyse et synthèse : s'il existe une matrice symétrique $S$ et une matrice antisymétrique $A$ telles que $M = S + A$, alors $M^\top = S - A$ (par linéarité de la transposition). En résolvant le système ainsi obtenu (d'inconnues $S$ et $A$), on retrouve cette décomposition et on prouve par la même occasion que cette décomposition est* unique *— et donc que les deux sous-espaces vectoriels sont en fait* ***supplémentaires*** *dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (sans qu'il soit nécessaire de discuter sur les dimensions des trois espaces).*

✍ *Le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par*

$$\langle\, M \,|\, N \,\rangle = \operatorname{tr}(M^\top . N).$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle\, M \,|\, N \,\rangle = \langle\, N \,|\, M \,\rangle \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{tr}(M^\top.N) = \operatorname{tr}(N^\top.M).$$

Par conséquent, si $M^\top = M$ et $N^\top = -N$, on a

$$\langle\, M \,|\, N \,\rangle = \operatorname{tr}(M.N) = \operatorname{tr}(-N.M) \overset{(\dagger)}{=} -\operatorname{tr}(M.N) = -\langle\, M \,|\, N \,\rangle$$

et donc $\langle\, M \,|\, N \,\rangle = 0$.

✍ *On a utilisé ($\dagger$) la propriété célèbre $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ et la linéarité de la trace.*

On a ainsi démontré que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ étaient orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires orthogonaux :

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

**2.**

✍ *Dans un espace euclidien, la distance d'un vecteur $M$ à un sous-espace $F$ est égale à $\|M - \pi(M)\|$ où $\pi(M)$ est le projeté orthogonal du vecteur $M$ sur le sous-espace $F$.*

*Elle est aussi égale à $\|\pi'(M)\|$ où $\pi'(M)$ est le projeté orthogonal du vecteur $M$ sur le sous-espace $F^\perp$.*

D'après la décomposition ($\star$), le projeté orthogonal de la matrice $M$ sur le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = [\mathcal{S}_n(\mathbb{R})]^\perp$ est

$$\pi'(M) = \frac{M - M^\top}{2}$$

donc

$$d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{1}{2}\|M - M^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2}.$$

✍ *On peut aussi écrire cette expression sous la forme suivante :*

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2}$$

*mais ce n'est pas spécialement plus simple.*

> *L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et la base canonique est notée $(e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la matrice de la rotation $r$ dont l'axe est la droite $D$ représentée par*
>
> $$x - y + z = x + y + z = 0$$
>
> *et telle que*
>
> $$r(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 + e_3).$$

En deux opérations de pivot (lesquelles ?),

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases}$$

donc la droite $D$ est dirigée par le vecteur $(1, 0, -1)$.

Pour la suite, il est commode de considérer le vecteur unitaire

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, -1) = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}.$$

❧ Le vecteur

$$w = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1)$$

est unitaire lui aussi et il est clairement orthogonal au vecteur $u$. Ce vecteur $w$ est donc orthogonal à l'axe de la rotation. Par conséquent, le vecteur $v$ défini par $r(v) = w$ est un vecteur unitaire et orthogonal à l'axe de la rotation.

✍ *Une rotation est un automorphisme, donc l'égalité $r(v) = w$ équivaut à $v = r^{-1}(w)$, c'est pourquoi le vecteur $v$ est bien caractérisé par l'égalité $r(v) = w$.*

*Une rotation est aussi une isométrie, donc l'égalité $r(v) = w$ implique en particulier $\|v\| = \|w\|$. Et comme une isométrie conserve les produits scalaires et que $r(u) = u$ (puisque $u$ est sur l'axe de la rotation),*

$$0 = \langle u \mid w \rangle = \langle r(u) \mid r(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle,$$

*donc $v$ est bien orthogonal à $u$.*

Le choix $v = e_2$ est donc cohérent avec les propriétés des rotations.

❧ Il est facile de vérifier que la famille $(u, v, w)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la rotation $r$ dans cette base est donc une matrice orthogonale de déterminant $+1$. Comme $r(u) = u$ et que $r(v) = w$, cette matrice est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

La troisième est orthogonale aux deux premières, c'est aussi un vecteur unitaire et le déterminant de la matrice est égal à $+1$, donc il n'y a qu'une seule possibilité :

$$\mathfrak{Mat}_{(u,v,w)}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *L'énoncé n'a pas précisé dans quelle base il fallait donner la matrice de $r$... Pourquoi ne pas choisir la base la plus simple ?*

❧ Les calculs précédents montrent que $r(w) = -v$. Comme $(u, v, w)$ est une base orthonormée, on sait que

$$\forall\, X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad X = \langle u \mid X \rangle \cdot u + \langle v \mid X \rangle \cdot v + \langle w \mid X \rangle \cdot w$$

et donc, par linéarité de $r$,

$$\begin{aligned} \forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) &= \langle u \mid X \rangle \cdot r(u) + \langle v \mid X \rangle \cdot r(v) + \langle w \mid X \rangle \cdot r(w) \\ &= \langle u \mid X \rangle \cdot u + \langle v \mid X \rangle \cdot w - \langle w \mid X \rangle \cdot v. \end{aligned}$$

Comme la base canonique est aussi une base orthonormée,

$$\langle u \,|\, X \rangle = \frac{x-z}{\sqrt{2}}, \qquad \langle v \,|\, X \rangle = y, \qquad \langle w \,|\, X \rangle = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$$

et par conséquent

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) = \frac{x-z}{2} \cdot (1,0,-1) + \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1) - \frac{x+z}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,0).$$

La matrice de la rotation $r$ relative à la base canonique est donc

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Si on refuse de faire un peu de géométrie, il faut être prêt à faire du calcul matriciel. On a obtenu facilement la matrice de $r$ relative à la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ et on cherche à en déduire la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.*

*On connaît la matrice de passage :*

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Comme on passe d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, cette matrice de passage est orthogonale et par conséquent $P^{-1} = P^\top$.*

*La formule du changement de base nous donne la matrice $R$ relative à la base $\mathscr{B}_0$ de $r$ en fonction de la matrice $R'$ relative à la base $\mathscr{B}$ :*

$$R' = P^{-1}RP = P^\top.R.P \qquad \textit{d'où} \qquad R = P.R'.P^\top.$$

*Soient $\mathsf{E}$, un espace euclidien et $\mathsf{F}$, un sous-espace de $\mathsf{E}$. On considère un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$ et on note $p$, la projection orthogonale sur $\mathsf{F}$.*
*Démontrer que $p \circ u$ est auto-adjoint si, et seulement si, le sous-espace $\mathsf{F}$ est stable par $u$.*

Remarquons pour commencer que

$$\begin{aligned} (p \circ u)^* = (p \circ u) &\iff u^* \circ p^* = p \circ u && \text{(adjoint d'une composée)} \\ &\iff u \circ p = p \circ u \end{aligned}$$

car l'endomorphisme $u$ est auto-adjoint ($u^* = u$) par hypothèse et on sait que toute projection orthogonale est en particulier un endomorphisme auto-adjoint, donc $p^* = p$.

❧ Supposons que $(p \circ u)$ soit auto-adjoint.
Comme $p$ est une projection sur $F$, on sait que l'égalité $p(y) = y$ équivaut à $y \in F$.

✍ *Pour toute projection (orthogonale ou non),*

$$\forall\, y \in E, \qquad p(y) = y \iff y \in \operatorname{Im} p. \tag{$\star$}$$

Pour tout $x \in F$, on a donc

$$\begin{aligned} (u \circ p)(x) = u\big(p(x)\big) &= u(x) && \text{(car } x \in F) \\ &= p\big(u(x)\big) && \text{(puisque } p \circ u = u \circ p) \end{aligned}$$

et puisque $u(x) = p(u(x))$, on a démontré que $u(x) \in \operatorname{Im} p = F$. Le sous-espace $F$ est donc stable par $u$.

❧ Réciproquement, supposons que le sous-espace $F$ soit stable par $u$.
D'une part,

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in F, \quad p(x) = x && \text{donc} && (u \circ p)(x) = u\big(p(x)\big) = u(x), \\ &\forall\, x \in F, \quad u(x) \in F && \text{donc} && (p \circ u)(x) = p\big(u(x)\big) \overset{(\star)}{=} u(x). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $F$ est stable par $u$ et que l'endomorphisme $u$ est auto-adjoint, le sous-espace $F^\perp$ est aussi stable par $u$. De ce fait,

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in F^\perp, \quad p(x) = 0_E && \text{donc} && (u \circ p)(x) = u(0_E) = 0_E, \\ &\forall\, x \in F^\perp, \quad u(x) \in F^\perp && \text{donc} && (p \circ u)(x) = p\big(u(x)\big) = 0_E. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $p \circ u = u \circ p$ sur $F$ et sur $F^\perp$. Comme $E$ est un espace euclidien, on sait que $E = F \oplus F^\perp$ et on en déduit que

$$\forall\, x \in E, \qquad (p \circ u)(x) = (u \circ p)(x)$$

et donc (cf préambule) que $p \circ u$ est auto-adjoint.

✍ *Si on connaît une décomposition en somme directe*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$$

*(que les sous-espaces vectoriels $F_k$ soient deux à deux orthogonaux ou non), une application linéaire $f : E \to V$ est caractérisée par ses valeurs sur chaque sous-espace $F_k$.*

*Par conséquent, pour démontrer que deux endomorphismes $f$ et $g$ sont égaux sur $E$, il suffit de vérifier qu'ils sont égaux sur chaque sous-espace $F_k$.*

# rms135-1437

*Soient* $E$*, un espace euclidien et* $f$*, une isométrie de* $E$*. On pose* $g = I_E - f$ *et on note* $h$*, la projection orthogonale sur* $\operatorname{Ker} g$*.*

**1.** *Démontrer que*

$$(\operatorname{Im} g)^{\perp} = \operatorname{Ker} g.$$

**2.** *Soit* $x \in E$*. Démontrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = h(x).$$

**1.**

**2.**

**1.** *Démontrer que l'application*

$$\big[(M, N) \mapsto \operatorname{tr}(M^\top.n)\big]$$

*est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**2.** *Démontrer que*

$$\forall\, M, N \in O_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(M^\top.N) \leqslant n.$$

**3.** *Soient* $A$ *et* $B$*, deux matrices symétriques réelles.*

**3. a.** *Démontrer que*

$$\operatorname{tr}[(AB)^2] \leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2).$$

**3. b.** *En déduire que*

$$\operatorname{tr}\big[(AB+BA)^2\big] \leqslant 4\sqrt{\operatorname{tr}(A^4)}\sqrt{\operatorname{tr}(B^4)}.$$

**1.**

**2.**

**3. a.**

**3. b.**

## rms135-1439

*Soit* $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *une matrice telle que*

$$X.X^\top.X = -I_n.$$

**1.** *Démontrer que* $X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**2.** *Déterminer* $X$.

**1.**

**2.**

## rms135-1440

*Soit* $(\mathsf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$*, un espace euclidien.*

**1.** *Déterminer les éléments de* $\mathcal{S}^+(\mathsf{E}) \cap \mathsf{O}(\mathsf{E})$.

**2.** *Démontrer que* $\mathcal{S}^+(\mathsf{E})$ *est stable par addition. Cet ensemble est-il un espace vectoriel ?*

**3.** *Soit* $u \in \mathcal{S}^+(\mathsf{E})$. *Démontrer qu'il existe* $v \in \mathcal{S}^+(\mathsf{E})$ *tel que* $u = v^2$.

**4.** *En déduire que*

$$\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v,$$

*quels que soient les endomorphismes* $u$ *et* $v$ *dans* $\mathcal{S}^+(\mathsf{E})$.

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

## rms135-1441

*Soit* $(E, \|\cdot\|)$, *un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère une suite* $u$ *d'éléments de* $E$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *la suite réelle de terme général* $\|u_n - x\|$ *converge.*

**1.** *Démontrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une valeur d'adhérence.*

**2.** *Démontrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

**1.**

**2.**

## rms135-1442

*Soit* $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Pour toute fonction* $f \in E$, *on pose*

$$N_1(f) = \int_0^1 \left|f(t)\right| dt.$$

*On dit qu'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $E$ *vérifie le* ***critère de Cauchy*** *pour la norme* $N_1$ *lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \geqslant N, \quad \|f_p - f_q\| \leqslant \varepsilon.$$

**1.** *Vérifier que* $N_1$ *est une norme sur* $E$.

**2.** *Démontrer que toute suite convergente pour la norme* $N_1$ *vérifie aussi le critère de Cauchy pour cette norme.*

**3.** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

**3. a.** *Démontrer que la suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *vérifie le critère de Cauchy pour* $N_1$.

**3. b.** *Cette suite est-elle convergente pour la norme* $N_1$ *?*

**1.**

**2.**

**3. a.**

**3. b.**

*Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $f$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice $A$ dans une base*

$$\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n).$$

*Pour tout $t > 0$, on considère la base*

$$\mathscr{B}_t = \Big(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\Big).$$

**1.** *Exprimer $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_t}(f)$ en fonction de $A$ et de $t$.*

**2.** *On note $S(A)$, la **classe de similitude** de $A$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables à $A$). Démontrer que la matrice $A$ est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de $S(A)$.*

**1.** Pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$f\Big(\frac{e_j}{t^j}\Big) = \frac{1}{t^j}\cdot f(e_j) = \frac{1}{t^j}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,j}t^i}{t^j}\cdot\frac{e_i}{t^i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}t^{i-j}\cdot\frac{e_i}{t^i}$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_t}(f) = \big(a_{i,j}t^{i-j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

✍ *On est simplement revenu à la définition même de la matrice d'une application linéaire : on calcule les images des vecteurs de la base de départ et on décompose ces images dans la base d'arrivée.*

**2.** Supposons que la matrice $A$ ne soit pas nilpotente et considérons une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices semblables à $A$ qui converge vers la matrice nulle.

Comme $A$ n'est pas nilpotente, son polynôme minimal n'est pas de la forme $X^d$, donc il existe un polynôme irréductible $Q$ qui divise $\mu_A$ et qui est premier à $X$ :

$$Q = \sum_{k=0}^{q} \beta_k X^k$$

avec $\beta_0 \neq 0$.

✍ *Deux polynômes irréductibles sont ou bien associés, ou bien premiers entre eux !*
*Un polynôme est premier à $X$ si, et seulement si, son terme constant n'est pas nul.*

Comme $Q$ est un diviseur non constant du polynôme minimal de $A$, la matrice $Q(A)$ n'est pas inversible et $\det Q(A) = 0$. Comme toutes les matrices $A_p$ sont semblables à $A$, alors $\det Q(A_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et, par continuité, $\det Q(0_n) = 0$.

✍ *Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre associative unitaire de dimension finie, toute application polynomiale $Q : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et l'application $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (c'est une fonction polynomiale des coefficients).*

D'après l'expression développée de $Q$, on a $Q(0_n) = \beta_0 I_n$ et comme $\beta_0 \neq 0$, alors $Q(0_n)$ est inversible, ce qui contredit la propriété précédente.

❧ Réciproquement, supposons que $A$ soit nilpotente. Alors $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et donc à la matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2}t^{-1} & \cdots & b_{1,n}t^{1-n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1,n}t^{-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout réel $t > 0$ (d'après la première question).

Toutes les puissances de $t$ sont strictement négatives, donc cette matrice tend vers la matrice nulle lorsque $t$ tend vers $+\infty$. On a ainsi démontré qu'il existait une suite de matrices semblables à $A$ qui convergeait vers la matrice nulle.

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation*
> $$x^n + x - 1 = 0 \tag{$E_n$}$$
> **1.** *Démontrer que l'équation $(E_n)$ admet une, et une seule, solution dans $\mathbb{R}_+$. Cette solution sera notée $x_n$ dans la suite.*
> **2.** *Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?*
> **3. a.** *Écrire un code python qui calcule par dichotomie une valeur approchée à $10^{-4}$ près de $x_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.*
> **3. b.** *Représenter graphiquement les 100 premières valeurs de $x_n$ et conjecturer la limite de la suite.*
> **4.** *Démontrer cette conjecture.*

**1.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction
$$f_n = [x \mapsto x^n + x - 1].$$
Il est clair que $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (polynomiale !) et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ :
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \qquad f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0.$$
Comme $f_n(0) = -1$ et que $f_n$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. En particulier, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Quand il s'agit de prouver qu'une équation admet une, et une seule, solution dans un intervalle donné, il faut systématiquement penser à appliquer une version du Théorème de la bijection monotone.*

*On dit que la suite $(x_n)$ est **définie implicitement** : on ne connaît pas la valeur de $x_n$ (on sait la calculer pour $n = 1$ et pour $n = 2$), mais on a caractérisé le réel $x_n$ comme l'unique solution d'une équation sur un intervalle donné.*

*Par conséquent, on va déduire les propriétés de la suite $(x_n)$ de l'étude de l'équation $(E_n)$, c'est-à-dire des fonctions $f_n$.*

**2.** Comme $f_n(1) = 1$, on peut préciser la réponse précédente : la fonction $f_n$ réalise une bijection du segment $[0, 1]$ sur le segment $[f(0), f(1)] = [-1, 1]$ et par conséquent l'unique solution $x_n$ de l'équation $(E_n)$ appartient en fait au segment $[0, 1]$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc bornée.

✍ *En fait, $x_n$ appartient à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ puisque $f_n(0) \neq 0$ et que $f_n(1) \neq 0$.*

❧ Par hypothèse,
$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n).$$
On sait que $0 < x_n, x_{n+1} < 1$ et que
$$\forall\, u \in\, ]0, 1[, \qquad 0 < u^{n+1} < u^n.$$
Par conséquent,
$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 > x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n).$$
Comme $f_n$ est strictement croissante sur $[0, 1]$ et que $0 \leqslant x_n, x_{n+1} \leqslant 1$, on en déduit que
$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad x_{n+1} > x_n.$$
Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est (strictement) croissante.

❧ En tant que suite croissante et majorée, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge — et de plus sa limite $\ell$ appartient au segment $[x_1, 1] = [1/2, 1]$.

**3. a.** Le code de l'algorithme dichotomique doit être connu !

```
def resolution(fn, a, b, eps):
  fa, delta = fn(a), (b-a)
  while delta>eps:
    m = (a+b)/2
```

```
        fm = fn(m)
        if fa*fm>0:
          a, fa = m, fm
        else:
          b = m
        delta /= 2
    return (a+b)/2
```

Compte-tenu de l'analyse qui précède, on pourra choisir $a = 0$ et $b = 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, la longueur de l'intervalle résiduel sera inférieure à $10^{-4}$ au terme de la 14-ième itération et on aurait pu remplacer la traditionnelle boucle while par une boucle for.

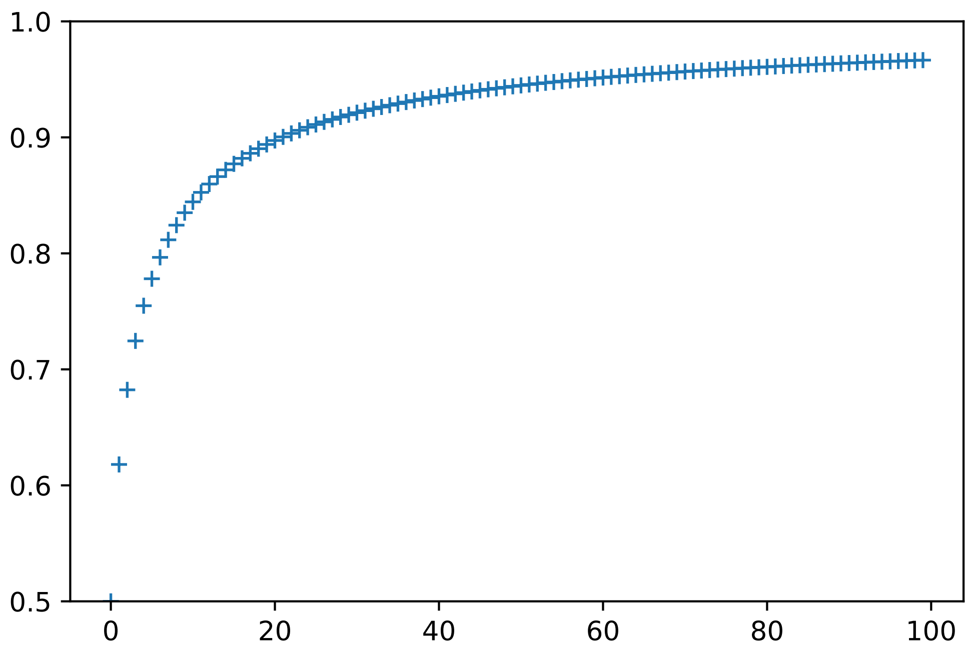
**3. b.** La fonction qui détermine l'équation dépend de $n$, elle doit donc être définie à l'intérieur de la boucle for. Le reste de la résolution ne devrait poser aucune difficulté.

```
def f(n, x):
    return x**n+x-1

a, b, eps, N = 0, 1, 1e-4, 100
liste_x = []
for n in range(1, N+1):
    fn = lambda x: f(n, x)
    liste_x.append(resolution(fn, a, b, eps))

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(liste_x, '+')
plt.ylim(0.5, 1)
```

On obtient alors la figure suivante, qui suggère que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 1.




**4.** On sait que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\ell \in [0, 1]$ et qu'elle est croissante.
Procédons par l'absurde.
Si $\ell < 1$, alors $0 \leqslant x_n \leqslant \ell$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$$

et, par encadrement ($0 \leqslant \ell < 1$ !), $x_n^n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

✍ *Si $\ell = 1$, alors le terme $x_n^n$ est une forme indéterminée en $1^\infty$. L'hypothèse $\ell < 1$ permet de calculer en éliminant cette indétermination.*

On en déduit alors que

$$0 = f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + \ell - 1 < 0,$$

ce qui est absurde : la suite identiquement nulle ne peut tendre vers une limite strictement négative !

On a ainsi démontré que $\ell = 1$.

✍ *Ce qui précède permet d'écrire $x_n = 1 - \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n$ est un réel strictement positif qui tend vers $0$. On déduit de l'équation $(E_n)$ que*

$$\varepsilon_n = 1 - x_n = x_n^n = \exp\big[n\,\ell n(1-\varepsilon_n)\big] \underset{n\to+\infty}{=} \exp\big(-n\varepsilon_n[1+o(1)]\big)$$

*et donc que $n\varepsilon_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Ainsi, l'infiniment petit $\varepsilon_n$ est infiniment grand par rapport à $1/n$.*

> *Soit $n$, un entier supérieur à 3. On considère l'équation*
> $$e^x = nx \tag{$E_n$}$$
> *d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*
> **1.** *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $(E_n)$ admet exactement deux solutions $\alpha_n$ et $\beta_n$ telles que $0 < \alpha_n < \beta_n$.*
> **2.** *Étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
> **3.** *Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis un équivalent simple.*
> **4.** *Donner un développement asymptotique à deux termes de $\alpha_n$.*

**1.** Pour tout entier $n \geqslant 3$, la fonction $f_n = [x \mapsto e^x - nx]$ est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = e^x - n.$$
Par conséquent, la fonction $f_n$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \ell n\, n]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ell n\, n, +\infty[$.

Il est clair que $f_n$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ ; que $f_n(0) = 1 > 0$ et que le minimum de $f_n$ est strictement négatif :
$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \min_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(\ell n\, n) = n - n\,\ell n\, n = n(1 - \ell n\, n) < 0.$$
En appliquant le théorème de la bijection monotone, on en déduit que l'équation $(E_n)$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0]$ (la fonction $f_n$ est strictement positive) ; qu'elle admet exactement une solution sur $]0, \ell n\, n[$ et exactement une solution sur $]\ell n\, n, +\infty[$.

L'équation $(E_n)$ admet donc exactement deux solutions réelles $\alpha_n$ et $\beta_n$ qui vérifient :
$$\forall\, n \geqslant 3, \qquad 0 < \alpha_n < \ell n\, n < \beta_n.$$

✍ *On aurait pu étudier les variations de la fonction $\varphi = [x \mapsto xe^{-x}]$ en transformant l'équation $(E_n)$ en $\varphi(x) = {}^1\!/_n$ mais cela n'aurait pas été plus simple.*

**2.**

✍ *Comme d'habitude, quand une suite est définie implicitement, il faut comparer les fonctions qui définissent $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$ pour comparer les réels $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$.*

Pour tout entier $n \geqslant 3$, par construction,
$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) - \alpha_n = -\alpha_n < 0$$
puisque $\alpha_n > 0$. Donc
$$\forall\, n \geqslant 3, \qquad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 > f_{n+1}(\alpha_n).$$
Mais on a démontré plus haut que $f_{n+1}$ était strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \ell n(n+1)]$ qui contient l'intervalle $[0, \ell n\, n]$. Par conséquent, $f_{n+1}$ est strictement décroissante sur un intervalle qui contient à la fois $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$.

On a ainsi démontré que $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \ell n\, n$ pour tout $n \geqslant 3$ : la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est donc (strictement) décroissante.

**3.** On a démontré que la suite $(\alpha_n)$ était (strictement) décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente et sa limite $\ell$ est positive.

❧ Si la suite $(\alpha_n)$ converge vers un réel $\ell > 0$, alors $e^{\alpha_n}$ tend vers $e^\ell$ alors que $n\alpha_n$ tend vers $+\infty$. Par conséquent,
$$0 = f_n(\alpha_n) = e^{\alpha_n} - n\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$
ce qui est absurde. La suite $(\alpha_n)$ converge donc vers 0.

❧ En déduit que $e^{\alpha_n}$ tend vers 1 et, puisque $f_n(\alpha_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $n\alpha_n = e^{\alpha_n}$ tend vers 1. Autrement dit,
$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ D'après la question précédente, il existe une suite $(\varepsilon_n)$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \geqslant 3, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Comme $f_n(\alpha_n) = 0$, on a donc $e^{\alpha_n} = n\alpha_n = 1 + \varepsilon_n$ et par conséquent

$$1 + \varepsilon_n = \exp\Big(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\Big) = 1 + \frac{1+\varepsilon_n}{n} + o(1/n) = 1 + 1/n + o(1/n).$$

Par unicité du développement asymptotique, on en déduit que $\varepsilon_n \sim 1/n$ et par conséquent

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(1/n^2).$$

✍ *Quant à la suite $(\beta_n)$, il est clair qu'elle tend vers $+\infty$ (puisque $\ln n < \beta_n$).*

> *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose*
> $$I_n = [2n\pi, 2n\pi + \pi/2].$$
> **1.** *Démontrer que l'équation $\sin x = e^{-x}$ admet une, et une seule, solution dans le segment $I_n$. Cette solution sera notée $x_n$.*
> **2.** *Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
> **3.** *Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $x_n$.*

**1.** La fonction $f = [x \mapsto \sin x - e^{-x}]$ est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I_n, \qquad f'(x) = \underbrace{\cos x}_{\geqslant 0} + e^{-x} > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $I_n$ et réalise donc une bijection du segment $I_n$ sur le segment

$$[f(2n\pi), f(2n\pi + \pi/2)] = [-e^{-2n\pi}, 1 - e^{-2n\pi-\pi/2}].$$

Comme $0 < e^{-u}$ pour tout $u \geqslant 0$ et que $e^{-u} < 1$ pour tout $u > 0$, on en déduit que $0 \in f_*(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une, et une seule, solution sur chaque segment $I_n$.

**2.** Par construction,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 2n\pi \leqslant x_n \leqslant 2n\pi + \pi/2$$

donc $x_n \sim 2n\pi$ et en particulier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

**3.** Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, $e^{-x_n}$ tend vers 0 et donc (par construction des $x_n$ et par périodicité de sin)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad e^{-x_n} = \sin x_n = \sin(x_n - 2n\pi).$$

On a démontré que $0 \leqslant x_n - 2n\pi \leqslant \pi/2$, c'est-à-dire $x_n - 2n\pi \in I_0$. Or on sait que sin réalise une bijection de $I_0$ sur $[0, 1]$ et que la réciproque de cette bijection est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent,

$$x_n - 2n\pi = \operatorname{Arcsin}\big[\sin(x_n - 2n\pi)\big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $x_n = 2n\pi + o(1)$ et donc que

$$x_n - 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(x_n - 2n\pi) = \sin x_n = e^{-x_n} \underset{n\to+\infty}{=} e^{[-2n\pi + o(1)]} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n\pi}.$$

Ainsi,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n\pi + e^{-2n\pi} + o(e^{-2n\pi}).$$

## rms135-1447

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite de réels positifs qui converge vers* $0$*. Démontrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.*

> *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose*
> $$g_n(t) = \ell n\, t - \operatorname{Arctan} t - n\pi.$$
> $\boxed{\mathbf{1.}}$ *Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(x_n) = 0$.*
> $\boxed{\mathbf{2.}}$ *Démontrer que $e^{n\pi} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la série $\sum {}^1\!/\!_{x_n}$.*

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad g(t) = \ell n\, t - \operatorname{Arctan} t.$$

Il est clair que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qu'elle tend vers $-\infty$ au voisinage de $0$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

✍ *La fonction* Arctan *est bornée sur $\mathbb{R}$, c'est donc la fonction $\ell n$ qui impose les limites de $g$.*

De plus,

$$\forall\, t > 0, \qquad g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t(1+t^2)} > 0.$$

✍ *Le discriminant du numérateur est strictement négatif (égal à $-3$), donc le numérateur est de signe constant et il est strictement positif pour $t = 1$.*

Par conséquent, la fonction $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on déduit du Théorème de la bijection monotone que $g$ réalise une bijection (strictement croissante) de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$\Big]\lim_{t \to 0} g(t), \lim_{t \to +\infty} g(t)\Big[ = ]-\infty, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(x_n) = n\pi$.

✍ *En définissant les fonctions $g_n$, l'énoncé offre une fausse piste : il n'y a ici qu'une seule fonction à étudier !*

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad g(e^{n\pi}) = n\pi - \operatorname{Arctan}(n\pi) < n\pi = g(x_n).$$

Comme la fonction $g$ est croissante, on en déduit que $e^{n\pi} < x_n$.

❧ Comme $e^{n\pi} > 0$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{e^{n\pi}} = (e^{-\pi})^n.$$

Comme $-\pi < 0$, on a donc $0 < e^{-\pi} < 1$, ce qui prouve que la série géométrique $\sum (e^{-\pi})^n$ est convergente et, par comparaison de série de termes généraux positifs, la série $\sum {}^1\!/\!_{x_n}$ est (absolument) convergente.

# rms135-1450

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite réelle ou complexe. On suppose que la série* $\sum u_n$ *est convergente. Démontrer que la série*

$$\sum \frac{u_n}{n}$$

*est convergente.*

*On considère la suite $u$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

**1.** *Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ ?*
**2.** *Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$ ?*

**1.** Il est clair que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (on ne connaît pas le signe de $u_0$). On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$. Par conséquent, $u_{n+1} \sim 1/n$ et comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, la série $\sum u_n$ est divergente.

**2.** En reprenant la relation de récurrence, lorsque $n$ tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} &= \frac{1 - u_n + o(u_n)}{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\Big)\Big(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\Big) \\ &= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(-1)^n u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(1/n^2).$$

❧ La série harmonique alternée $\sum {}^{(-1)^n}/n$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, toute série dont le terme général est $\mathcal{O}(1/n^2)$ est elle-même (absolument) convergente.

Ainsi, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente (comme somme de deux séries convergentes).

*Soient $a < b$, deux réels ; $f$ et $g$, deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est strictement positive.*

**1.** *On suppose que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b f(t) + xg(t)\, dt \geqslant \int_a^b f(t)\, dt.$$

*Déterminer la valeur de l'intégrale de $g$.*

**2.** *On suppose que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \big|f(t) + xg(t)\big|\, dt \geqslant \int_a^b f(t)\, dt.$$

**2. a.** *Déterminer la valeur de l'intégrale de $g$.*

**2. b.** *Ce résultat est-il encore vraie si on suppose seulement que $f$ est positive ?*

**1.** Les fonctions $f$ et $g$ sont continues sur le segment $[a, b]$, donc les intégrales sont bien définie et, par linéarité, on suppose en fait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x \int_a^b g(t)\, dt \geqslant 0.$$

Comme le facteur $x$ est de signe quelconque, on en déduit que

$$\int_a^b g(t)\, dt = 0.$$

**2. a.** Comme $f$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint un minimum $\varphi$ et comme $f$ est strictement positive, ce minimum est strictement positif.

$$\forall\, t \in [a, b], \qquad f(t) \geqslant \varphi > 0.$$

❧ La fonction $g$ est elle aussi continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée et si elle n'est pas identiquement nulle, alors $\|g\|_\infty > 0$.

✍ *Si $g$ est identiquement nulle, l'exercice est terminé !*

En posant

$$\alpha = \frac{\varphi}{\|g\|_\infty},$$

on obtient

$$\forall\, x \in [-\alpha, \alpha],\ \forall\, t \in [a, b], \quad f(t) + xg(t) \geqslant \varphi - \alpha\|g\|_\infty \geqslant 0$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in [-\alpha, \alpha], \quad \int_a^b \big|f(t) + xg(t)\big|\, dt = \int_a^b f(t) + xg(t)\, dt.$$

On est alors ramené à la question précédente : puisque

$$\forall\, x \in [-\alpha, \alpha], \quad x \int_a^b g(t)\, dt \geqslant 0,$$

l'intégrale de $g$ est nulle.

✍ *Pour conclure, il n'est pas nécessaire que la propriété soit vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit qu'elle soit vérifiée pour deux réels $x$ non nuls, de signes opposés.*

**2. b.** Si on suppose que $f$ est positive sans être strictement positive, il se peut que $f$ soit l'application identiquement nulle ! Dans ce cas,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \big|f(t) + xg(t)\big|\, dt = |x| \int_a^b \big|g(t)\big|\, dt \geqslant 0 = \int_a^b f(t)\, dt$$

même si l'intégrale de $g$ n'est pas nulle.

# rms135-1455

*On pose*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

**1.** *Déterminer l'ensemble de définition* $D \subset \mathbb{R}$ *de* $S$.

**2.** *Calculer* $S(x)$ *pour* $x \in D$.

**3.** *Quelles sont les limites de* $S$ *aux bornes de* $D$ *?*

**4.** *La fonction* $S$ *est-elle intégrable sur* $]0, +\infty[$ *?*

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

# rms135-1456

*On considère la fonction* $g$ *définie par*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

**1.** *Démontrer que* $g$ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

**2.** *Calculer* $g''(x)$. *En déduire une équation différentielle vérifiée par* $g$.

**3.** *Déterminer la limite de* $g$ *au voisinage de* $+\infty$.

**1.**

**2.**

**3.**

## rms135-1459

*On pose*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}.$$

**1.** *Déterminer le domaine de définition* $D$ *de* $f$.

**2.** *Démontrer que* $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $D$.

**3.** *Déterminer un équivalent simple de* $f$ *au voisinage de* $0$.

**1.**

**2.**

**3.**

# rms135-1464

**1.** *Pour quelles valeurs de* $x \in \mathbb{R}$ *la série* $\sum e^{-nx}$ *converge-t-elle ?*

**2.** *Démontrer que, pour tout entier* $n \geqslant 1$, *la fonction*

$$u_n = \big[x \mapsto xe^{-nx}\big]$$

*est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.

**3.** *Démontrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

**4.** *Plus généralement, démontrer que*

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

*pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$.

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

## rms135-1467

**1.** *Déterminer les réels $x$ pour lesquels la somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln n x^n$$

*est définie.*

**2.** *Démontrer que*

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

*pour tout $x \in ]-1, 1[$.*

**3.** *Démontrer que*

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

**4.** *Expliciter cette limite à l'aide de la* ***Formule de Wallis*** *:*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

# rms135-1478

*Pour* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, *on pose*

$$a_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p x \, dx.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Justifier l'existence des* $a_{n,p}$ *et calculer leur valeur.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Justifier l'existence de la somme double*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$$

*et calculer sa valeur.*

$\boxed{\textbf{3.}}$ *La famille*

$$\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$$

*est-elle sommable ?*

$\boxed{\textbf{1.}}$

$\boxed{\textbf{2.}}$

$\boxed{\textbf{3.}}$

# rms135-1486a

*Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *On considère une fonction*

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

*continue et bornée. Démontrer que l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad x'(t) - ax(t) = h(t)$$

*a une, et une seule, solution bornée.*

# rms135-1486b

*Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle*

$$4tx''(t) + 6x'(t) + y(t) = 0.$$

# rms135-1486c

*On considère l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x^{(3)}(t) + 2x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0. \tag{E}$$

*On note* $G$*, l'ensemble des solutions de classe* $\mathscr{C}^3$ *de* $(E)$ *et* $\Delta$*, l'endomorphisme de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \qquad \Delta(f) = f'.$$

**1.** *Démontrer que* $G$ *est un sous-espace de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$*.*

**2.** *Déterminer un polynôme* $P$ *tel que*

$$G = \operatorname{Ker} P(\Delta).$$

**3.** *Démontrer que*

$$G = \operatorname{Ker}(\Delta^2 - I) \oplus \operatorname{Ker}(\Delta + 2I).$$

**4.** *Résoudre l'équation* $(E)$*.*

**1.**

**2.**

**3.**

**4.**

## rms135-1489a

*On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Pour quelles valeurs de* $a$ *la suite* $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle vers une limite non nulle ?*

## rms135-1489b

*Soit* $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$*, une matrice non nulle telle que* $A^2 = 0_3$*. Calculer la dimension du commutant de* $A$*.*

## rms135-1489c

*On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** *Démontrer (sans calcul) que* $A$ *est diagonalisable.*

**2.** *Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de* $A$*.*

**3.** *Résoudre le système différentiel*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t). \tag{S}$$

**1.**

**2.**

**3.**

> *Dans une urne contenant $n$ boules numérotées de $1$ à $n$, on tire trois boules simultanément et on note $X$, le plus petit numéro tiré.*
> *Quelles sont les valeurs possibles pour $X$ ? Proposer un modèle probabiliste raisonnable et calculer $\mathbf{P}(X=1)$, $\mathbf{P}(X=2)$ et $\mathbf{P}(X=n)$ en fonction de ce modèle.*

Chaque tirage nous donne trois entiers $i$, $j$ et $k$ tels que

$$1 \leqslant i < j < k \leqslant n.$$

✍ *Un tirage simultané de trois boules revient à tirer trois boules successivement et* sans remise. *Les numéros des boules tirées sont donc deux à deux distincts.*

En particulier, puisque $i$, $j$ et $k$ sont des entiers, on a $k \leqslant n$, donc $j \leqslant k-1 \leqslant n-1$ et $i \leqslant j-1 \leqslant n-2$. A priori, la valeur de $X$ est majorée par $n-2$.

Réciproquement, le tirage $(i, i+1, i+2)$ est possible pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n-2$, donc les valeurs possibles de $X$ sont exactement les entiers $i \in [\![1, n-2]\!]$.

❧ Notons $E$, l'ensemble des parties de trois éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. C'est un ensemble fini dont le cardinal est, par définition, égal à $\binom{n}{3}$.

✍ *Tirer trois boules simultanément parmi $n$ boules numérotées de $1$ à $n$ revient à considérer une partie de trois éléments dans $[\![1, n]\!]$.*

Dans l'énoncé, rien ne s'oppose à ce qu'on considère la mesure de probabilité uniforme sur $E$. Il existe donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète $T$ définie sur cet espace tels que

$$\forall\, A \in E, \qquad \mathbf{P}(T = A) = \frac{1}{\binom{n}{3}}.$$

Selon ce modèle, $X = \min(T)$ est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[\![1, n-2]\!]$.

✍ *Si $T$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble $E$, alors $f(T)$ est une variable aléatoire discrète, quelle que soit la fonction $f : E \to F$.*

❧ Puisque la variable aléatoire $T$ suit par hypothèse la loi uniforme sur $E$,

$$\forall\, B \in \mathfrak{P}(E), \quad \mathbf{P}(T \in B) = \frac{\#(B)}{\#(E)} = \frac{\#(B)}{\binom{n}{3}}.$$

La loi de $X$ est caractérisée par la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n-2}$$

et nous allons la déterminer comme d'habitude en exprimant l'évènement $[X = i]$ au moyen du système complet d'évènements $([T = A])_{A \in E}$.

❧ Par construction, $X(\omega) = 1$ si, et seulement si, la partie $T(\omega)$ contient 1. Les parties $A \in E$ qui contiennent 1 sont constituées de 1 (évidemment !) et de deux autres entiers choisis parmi $2, \dots, n$. Il y a donc $\binom{n-1}{2}$ parties $A \in E$ qui contiennent 1 et par conséquent

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

❧ De même, par construction, $X(\omega) = 2$ si, et seulement si, la partie $T(\omega)$ contient 2 et ne contient pas 1. Les parties $A \in E$ qui contiennent 2 sans contenir 1 sont constituées de 2 (bien sûr !) et de deux autres entiers choisis parmi $3, \dots, n$ (c'est-à-dire parmi les autres entiers différents de 1). Il y a donc $\binom{n-2}{2}$ parties $A \in E$ qui contiennent 2 mais pas 1 et par conséquent

$$\mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

❧ Comme on l'a vu, l'évènement $[X = n]$ est impossible, donc $\mathbf{P}(X = n) = 0$.

✍ *En continuant le même raisonnement, on trouve que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n-2, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

*En particulier, on a ainsi démontré que*

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{3},$$

*ce qui est une variante de la formule du triangle de Pascal.*

*Les clients $A_1$, $A_2$ et $A_3$ arrivent à deux guichets à $t = 0$ : les clients $A_1$ et $A_2$ sont servis pendant que le client $A_3$ patiente.*
*On modélise cette situation par trois variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces trois variables aléatoires sont indépendantes et suivent toutes la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (avec $0 < p < 1$).*
**1.** *On note $Y$, l'instant auquel le client $A_3$ accède à l'un des deux guichets. Exprimer $Y$ en fonction de $X_1$ et de $X_2$. En déduire la loi de $Y$.*
**2.** *On note $Z$, l'instant auquel le client $A_3$ quitte le guichet. Exprimer $Z$ en fonction de $X_1$, $X_2$ et $X_3$. Déterminer la loi de $Z$.*
**3.** *Calculer l'espérance de $Z$.*

**1.** Le client $A_3$ peut accéder à un guichet dès que l'un des deux autres clients, $A_1$ ou $A_2$, est servi. Par conséquent, la durée d'attente $Y$ pour $A_3$ est égale à $\min\{X_1, X_2\}$. Ainsi,

$$Y = \min\{X_1, X_2\}$$

est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

✍ *Comme $X_1$ et $X_2$ sont des variables aléatoires discrètes, toute fonction de $X_1$ et de $X_2$ est encore une variable aléatoire discrète.*

❧ Comme $X_1$ et $X_2$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il est clair que $Y$ est aussi une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le minimum $Y(\omega)$ est supérieur à $k$ si, et seulement si, les deux valeurs $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ sont elles aussi supérieures à $k$. Autrement dit,

$$[Y \geqslant k] = [X_1 \geqslant k] \cap [X_2 \geqslant k].$$

✍ ***Méthode à connaître !*** *Lorsqu'on cherche la loi du maximum (ou, comme ici, la loi du minimum) d'un nombre fini de variables aléatoires, il faut travailler avec la fonction de répartition.*
*Pour $Z = \max\{X_1, X_2\}$, on s'intéressera donc à l'évènement $[Z \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k]$.*

Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Y \geqslant k) = \left[\mathfrak{P}(X_1 \geqslant k)\right]^2 = [q^{k-1}]^2.$$

✍ *On doit savoir que $\mathbf{P}(Y \geqslant k) = q^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
*Il est facile de se souvenir de cette formule : la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ sert à modéliser l'instant du premier succès dans un schéma de Bernoulli. L'évènement $[Y \geqslant k]$ signifie dans ce cadre que le premier succès arrive après la $k$-ième tentative, c'est-à-dire après (au moins) $(k-1)$ échecs.*

On sait que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad [X \geqslant k] = [X = k] \sqcup [X \geqslant k+1]$$

et on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y \geqslant k) - \mathbf{P}(Y \geqslant k+1) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = (1-q^2)(q^2)^{k-1}.$$

Autrement dit, la loi de $Y$ est la loi géométrique $\mathscr{G}(1-q^2)$.

**2.** Avant de quitter le guichet, le client $A_3$ a patienté dans la file d'attente (durée $Y$), puis a pris le temps d'être servi au guichet (durée $X_3$). Par conséquent,

$$Z = Y + X_3$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

✍ *On peut en déduire immédiatement l'espérance de $Z$, sans avoir à calculer sa loi. Voir plus bas.*

❧ Comme $X_1$, $X_2$, $X_3$ sont des variables aléatoires indépendantes, les variables aléatoires $Y = \min\{X_1, X_2\}$ et $X_3$ sont indépendantes (lemme des coalitions).

On décompose l'évènement $[Z = n]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire $X_3$ :

$$[Z = n] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_3 = k, Z = n] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_3 = k, Y = n - k].$$

Par $\sigma$-additivité et indépendance, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = k)\,\mathbf{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_3 = k)\,\mathbf{P}(Y = n - k)$$

puisque les valeurs de $Y$ sont supérieures à 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} \cdot (1 - q^2)(q^2)^{(n-k)-1} = p(1 - q^2) \sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k-3} \\ &= p(1 + q)q^{n-2}(1 - q^{n-1}).\end{aligned}$$

$\boxed{3.}$ Comme $Z = Y + X_3$ et que $Y$ et $X_3$ suivent des lois géométriques, la variable aléatoire $Z$ est la somme de deux variables aléatoires d'espérance finie et, par linéarité,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X_3) = \frac{1}{1 - q^2} + \frac{1}{p} = \frac{2 + q}{p(1 + q)} = \frac{3 - p}{p(2 - p)}.$$

✍ *On peut vérifier par le calcul que*

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(Z = n), \quad \textit{soit} \quad \frac{2 + q}{p(1 + q)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p(1 + q)q^{n-2}(1 - q^{n-1}).$$

*C'est un peu long, mais c'est un calcul qu'on doit savoir faire en se rappelant que*

$$\forall\, x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

*Soient $X_1$ et $X_2$, deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi. On pose*

$$U = X_1 + X_2, \quad T = X_1 - X_2, \quad Y_1 = \frac{X_1}{U}, \quad Y_2 \frac{X_2}{U}.$$

**1.** *Démontrer que $Y_1$ et $Y_2$ suivent la même loi.*
**2.** *Démontrer que $Y_1$ et $Y_2$ admettent des moments de tout ordre. Calculer en particulier l'espérance de ces deux variables aléatoires.*
**3.** *Démontrer que $T/U$ admet des moments de tout ordre. Calculer son espérance.*
**4.** *Exprimer $\mathbf{V}(T/U)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y_1)$.*

**1.** Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et de même loi, les couples $(X_1, X_2)$ et $(X_2, X_1)$ ont même loi.

✍ *Supposons que $X_1$ et $X_2$ soient des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable E. Alors les lois des couples $(X_1, X_2)$ et $(X_2, X_1)$ sont caractérisées respectivement par les deux familles*

$$\big(\mathbf{P}(X_1 = u, X_2 = v)\big)_{(u,v)\in E\times E} \quad \text{et} \quad \big(\mathbf{P}(X_2 = u, X_1 = v)\big)_{(u,v)\in E\times E}.$$

*Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et suivent la même loi, alors*

$$\forall\,(u,v) \in E \times E, \quad \mathbf{P}(X_1 = u, X_2 = v) = \mathbf{P}(X = u)\,\mathbf{P}(X = v) = \mathbf{P}(X_2 = u, X_1 = v)$$

*donc les deux couples $(X_1, X_2)$ et $(X_2, X_1)$ ont même loi.*
❧ *Il faut adapter la démonstration pour des variables aléatoires qui ne sont pas discrètes, mais le résultat est encore vrai.*
❧ *Plus généralement, si $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors les vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ont même loi, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*

On en déduit que $Y_1$ et $Y_2$ ont même loi, puisque la somme $X_1(\omega) + X_2(\omega)$ ne s'annule pour aucune valeur de $\omega \in \Omega$ (elle est strictement positive par hypothèse) et que

$$Y_1 = f(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad Y_2 = f(X_2, X_1) \qquad \text{avec} \qquad f = \left[(u,v) \mapsto \frac{u}{u+v}\right].$$

✍ *Si X et X′ sont deux variables aléatoires de même loi à valeurs dans un espace E, alors $f(X)$ et $f(X')$ sont deux variables aléatoires de même loi, quelle que soit la fonction $f : E \to F$.*
*Dans le cas d'une loi discrète :*

$$\forall\, v \in F, \quad \mathbf{P}\big(f(X) = v\big) = \mathbf{P}\big(X \in f^*(\{v\})\big) = \mathbf{P}\big(X' \in f^*(\{v\})\big) = \mathbf{P}\big(f(X') = v\big).$$

*Le résultat est encore vrai dans le cas où la loi de probabilité n'est plus discrète.*

**2.** Comme $X_1$ et $X_2$ sont des variables aléatoires strictement positives, il est clair que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad 0 < \frac{X_1(\omega)}{X_1(\omega) + X_2(\omega)} = Y_1(\omega) < 1.$$

La variable aléatoire $Y_1$ est donc bornée (et pas seulement p.s. bornée), elle admet donc des moments de tout ordre.
❧ Comme $Y_2$ a même loi que $Y_1$, la variable aléatoire $Y_2$ admet aussi des moments de tout ordre et, en particulier, les espérances $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$ existent toutes les deux et sont égales : $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2)$.
Il est clair que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y_1(\omega) + Y_2(\omega) = \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega)}{X_1(\omega) + X_2(\omega)} = 1.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$1 = \mathbf{E}(1) = \mathbf{E}(Y_1) + \mathbf{E}(Y_2) = 2\,\mathbf{E}(Y_1).$$

Ainsi, $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2) = 1/2$.

**3.** En développant la fraction, on obtient $T/U = Y_1 - Y_2$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on sait que $Y_1$ et $Y_2$ admettent un moment d'ordre $p$ et on sait que l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui admettent un moment d'ordre $p$ est un espace vectoriel. Par conséquent, $T/U$ admet des moments de tout ordre.

En particulier, par linéarité de l'espérance et symétrie,

$$\mathbf{E}\Big(\frac{T}{U}\Big) = \mathbf{E}(Y_1) - \mathbf{E}(Y_2) = 0.$$

**4.** Comme $Y_1$ et $Y_2$ admettent un moment d'ordre deux, leur différence $T/U$ admet un moment d'ordre deux et d'après la formule de bien connue

$$\mathbf{V}(T/U) = \mathbf{V}(Y_1) + \mathbf{V}(Y_2) - 2\,\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Comme $Y_1$ et $Y_2$ ont même loi et admettent un moment d'ordre deux, alors $\mathbf{V}(Y_1) = \mathbf{V}(Y_2)$ et comme $Y_2$ est une fonction affine de $Y_1$ :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y_2(\omega) = 1 - Y_1(\omega),$$

on en déduit que

$$\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathbf{Cov}(Y_1, 1) - \mathbf{Cov}(Y_1, Y_1) = 0 - \mathbf{V}(Y_1).$$

✍ *La somme $Y_1 + Y_2$ étant constante, si l'une des deux variables aléatoires croît, l'autre doit décroître. Il est donc normal que la covariance soit négative.*

Par conséquent,

$$\mathbf{V}(T/U) = 4\,\mathbf{V}(Y_1).$$

> *Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. Déterminer la probabilité pour que la matrice*
> $$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$
> *soit diagonalisable.*

La matrice $A(\omega)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent,

— si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, elle est diagonalisable ;
— si $X(\omega) = Y(\omega)$, alors elle n'admet qu'une seule valeur propre et n'est pas une homothétie, donc elle n'est pas diagonalisable.

✍ *D'une part, toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admettant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable.*

*D'autre part, une matrice diagonalisable qui n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda$ doit être semblable à l'homothétie $\lambda I_n$ et donc en fait* égale *à l'homothétie $\lambda I_n$.*

Ainsi, la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable si, et seulement si, $X(\omega) \neq Y(\omega)$, ce qui prouve que "*A est diagonalisable*" est bien un évènement :

$$[X \neq Y] = [X = Y]^c = \Big(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k] \cap [Y = k]\Big)^c \in \mathcal{A}.$$

❧ Comme X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, on déduit de la décomposition précédente que

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (q^{k-1})^2 = p^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} (q^2)^\ell = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1+q}$$

et donc que

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y) = \frac{2q}{1+q}.$$

*Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles suivent la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ et on pose*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}.$$

**1.** *Démontrer que $Z \leqslant X$, puis que Z admet une espérance et une variance.*
**2.** *Calculer $\mathbf{E}(Z)$.*
**3.** *Déterminer la loi de Z.*

**1.** Une variable aléatoire de loi géométrique ne prend que des valeurs supérieures à 1, en particulier non nulles, donc Z est bien définie sur $\Omega$.

De plus, le numérateur $X(\omega)$ est strictement positif et le dénominateur $Y(\omega)$ supérieur à 1 donc

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad 0 < Z(\omega) \leqslant \frac{X(\omega)}{1} = X(\omega).$$

✍ *Ce n'est pas seulement un encadrement* presque sûr, *c'est un encadrement* certain.

❧ En particulier, la variable aléatoire Z est bornée, donc elle admet des moments de tout ordre. Elle admet en particulier une espérance et une variance.

**2.** Comme X suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, on sait que X admet une espérance et que cette espérance est égale à $1/p$.

Comme $1/Y$ est une variable aléatoire bornée (elle prend ses valeurs dans $]0,1]$), elle est d'espérance finie.

Par hypothèse, X et Y sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X et $1/Y$ sont indépendantes. En tant que produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie, la variable aléatoire Z est d'espérance finie (ce qu'on a déjà démontré) et de plus

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big).$$

❧ Puisque $1/Y$ est d'espérance finie, on peut appliquer la formule de transfert pour calculer son espérance.

$$\mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot pq^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k}.$$

Comme $0 < p < 1$, alors $0 < q = 1 - p < 1$ et on peut appliquer la formule bien connue des séries entières :

$$\forall\, x \in ]-1, 1[, \qquad -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

On obtient ainsi

$$\mathbf{E}\Big(\frac{1}{Y}\Big) = \frac{-p\ln(1-q)}{q} = \frac{-p\ln p}{q}.$$

✍ *Comme $0 < p < 1$, cette expression est strictement positive, ce qui est cohérent avec le fait que $1/Y$ soit une variable aléatoire strictement positive.*

**3.** Puisque X et Y prennent des valeurs entières strictement positives, le quotient Z prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$.

✍ *L'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable*
— *en tant que partie infinie de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ ;*
— *en tant qu'image de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par l'application $[(x, y) \mapsto x/y]$.*

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe donc deux entiers naturels $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, *premiers entre eux*, tels que $r = {}^m/_n$. Puisque le quotient ${}^m/_n$ est supposé irréductible,

$$Z(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{m}{n} \iff \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \big(X(\omega), Y(\omega)\big) = (km, kn).$$

Autrement dit,

$$[Z = r] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = km] \cap [Y = kn].$$

Par σ-additivité de **P** et indépendance des variables aléatoires X et Y,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = r) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = km)\, \mathbf{P}(Y = kn) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{km-1} \cdot pq^{kn-1} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^{m+n})^k = \frac{p^2 q^{m+n-2}}{1 - q^{m+n}}. \end{aligned}$$

✍ *Puisqu'on a calculé l'espérance de $Z$, on peut déduire l'égalité suivante de la formule de transfert.*

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ m \wedge n = 1}} \frac{m}{n} \cdot \frac{p^2 q^{m+n-2}}{1 - q^{m+n}} = \frac{-p \ln p}{q}$$

*Comme chacun sait, c'est bien plus beau lorsque c'est inutile.*

✍ *L'exercice suivant ressemble à 135-1493 (nous ferons usage de la fonction de répartition), mais il y a une différence majeure : ici, les trois variables aléatoires sont supposées indépendantes.*

*Soient* $X_1$, $X_2$ *et* $X_3$, *trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *On suppose que ces trois variables aléatoires suivent la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$. *Déterminer la loi de la variable aléatoire*

$$Z = \min(X_1, X_2, X_3).$$

L'entier $Z(\omega) = \min\bigl(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\bigr)$ est supérieur à $n$ si, et seulement si, les trois entiers $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ et $X_3(\omega)$ sont supérieurs à $n$. Autrement dit,

$$[Z \geqslant n] = [X_1 \geqslant n] \cap [X_2 \geqslant n] \cap [X_3 \geqslant n] \in \mathcal{A}$$

et comme les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{P}(Z \geqslant n) = [\mathbf{P}(X_1 \geqslant n)]^3 = q^{3n-3}.$$

✍ *On doit savoir (cf 135-1493) que, si* $X$ *suit la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$, *alors*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X \geqslant n) = q^{n-1}.$$

Comme $Z$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}^*$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad [Z \geqslant n] = [Z = n] \sqcup [Z \geqslant n+1]$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad [Z = n] = [Z \geqslant n] \cap [Z \geqslant n+1]^c \in \mathcal{A}.$$

✍ *Comme* $Z$ *est une fonction des variables aléatoires discrètes* $X_1$, $X_2$ *et* $X_3$, *on sait d'emblée que* $Z$ *est une variable aléatoire discrète.*

*Le raisonnement qu'on vient de détailler prouve à nouveau que* $Z$ *est une variable aléatoire discrète, ce qui n'était pas nécessaire, mais ce raisonnement a l'avantage de nous donner en plus la loi de* $Z$.

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(Z \geqslant n) - \mathbf{P}(Z \geqslant n+1) = q^{3n-3} - q^{3n} = (1 - q^3)(q^3)^{n-1}.$$

La variable aléatoire $Z$ suit donc la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - q^3$.

✍ *La méthode est la même avec un nombre fini quelconque de variables aléatoires indépendantes et de même loi. (On peut aussi étudier le maximum d'un tel échantillon.)*

*En particulier, le minimum d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi géométrique suit lui aussi une loi géométrique. (À ma connaissance, la loi du maximum n'a rien de remarquable.)*

*On pose*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}\, t^n.$$

**1.** *Calculer le rayon de convergence de cette série entière.*

**2.** *Expliciter* $S(t)$ *pour* $t \in \,]-R, R[$.

**3.** *Soit* $X$*, une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

**3. a.** *Que vaut* $\lambda$ *?*

**3. b.** *Calculer* $\mathbf{P}(X = n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

**3. c.** *Calculer l'espérance et la variance de* $X$.

**1.** Par croissances comparées, il est clair que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} \cdot t^n = 0.$$

Puisque le terme général de la série entière reste borné quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière est infini.

**2.** Remarquons que $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{n!} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t.\end{aligned}$$

✍ *Ce n'est pas une astuce, c'est une méthode !*

*La présence de la factorielle au dénominateur doit nous conduire à interpréter la série entière comme une série de Taylor et donc à penser en termes de dérivée.*

*Il faut donc raisonner, non pas sur la base canonique* $(1, X, X^2, \dots)$ *de* $\mathbb{R}[X]$*, mais sur la base de Newton*

$$\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3), \dots\big)$$

*qui nous a rendu de grands services dans l'étude des séries génératrices.*

✍ *Il est bon de retenir que, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$*, il existe un polynôme* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)t^n}{n!} = Q(t)e^t.$$

*La réciproque est vraie : quel que soit le polynôme* $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$*, il existe une suite* $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P(t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

*et (formule du produit de Cauchy)*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

*donc*

$$\forall\, n \geqslant d, \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

*Cette formule est encore vraie pour $0 \leqslant n < d$ (les derniers termes de la somme sont nuls puisqu'un facteur est nul) et on reconnaît ici une expression de la forme $P(n)/n!$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ (donné par sa décomposition dans la base de Newton).*

**3. a.** Par définition, $G_X(1) = 1$, donc $\lambda S(1) = 4\lambda e = 1$. On a donc nécessairement $\lambda = {}^1\!/_{4e}$.

**3. b.** Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda(n^2+n+1)}{n!} \cdot t^n.$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on peut identifier terme à terme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n^2+n+1}{4n!e}.$$

**3. c.** Puisque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, la fonction génératrice $G_X$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert qui contient le segment $[-1, 1]$ et la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre.

❧ En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = G_X'(1) = 8\lambda e = 2$$

puisque $S'(t) = (t^2 + 4t + 3)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même,

$$\mathbf{E}\big(X(X-1)\big) = G_X''(1) = 14\lambda e = {}^7\!/_2$$

puisque $S''(t) = (t^2 + 6t + 7)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbf{E}(X) - \big[\mathbf{E}(X)\big]^2 = {}^3\!/_2.$$

*Soient $X_1, \ldots, X_n$, des variables aléatoires réelles admettant une variance. On considère alors la matrice*

$$S = \big(\mathbf{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

*et l'application*

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

*définie par*

$$\forall\, U = (u_1, \ldots, u_n), \quad f(U) = \frac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\Big).$$

*(Il s'agit ici de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.)*

**1.** *Démontrer que la matrice $S$ est diagonalisable.*

**2.** *Démontrer que*

$$\forall\, U = (u_1, \ldots, u_n), \quad U^\top.S.U = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\Big).$$

**3.** *On ordonne les valeurs propres de $S$ dans l'ordre décroissant :*

$$\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$$

*et on considère un vecteur $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

**3. a.** *Démontrer que $U^\top.S.U \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.*

**3. b.** *En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, $U$ est un vecteur propre de $S$ associé à la valeur propre $\lambda_1$.*

**4.** *Soient $0 < a < 1$ et*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

**4. a.** *Donner les valeurs propres de $S$.*

**4. b.** *En déduire la valeur de*

$$\max_{U \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} f(U)$$

*et préciser les vecteurs $U \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels ce maximum est atteint.*

**1.** Par symétrie de la covariance, la matrice $S$ est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).

**2.** Par définition du double produit matriciel et par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} U^\top.S.U &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} u_i \,\mathbf{Cov}(X_i, X_j) u_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathbf{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) \\ &= \mathbf{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i, \sum_{j=1}^{n} u_j X_j\Big) = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\Big). \end{aligned}$$

**3. a.** Le Théorème spectral nous dit que la matrice $S$ est diagonalisable mais aussi qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres : il existe donc une base formée de colonnes $V_1, \ldots, V_n$ telles que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad V_i^\top.V_i = 1, \qquad \forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \quad V_i^\top.V_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad SV_i = \lambda_i \cdot V_i.$$

✍ *Comme de coutume, nous allons identifier les matrices colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

Soit $U \in \mathbb{R}^n$. Il existe donc des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot V_i \tag{$\star$}$$

et comme la base $(V_1, \dots, V_n)$ est une base **orthonormée**,

$$\|U\| = U^\top.U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

✍ *Puisque la base est orthonormée, on sait que $\alpha_i = U^\top.V_i$ — mais c'est sans importance ici.*

Par linéarité, on déduit de $(\star)$ que

$$SU = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot SV_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i\lambda_i) \cdot V_i$$

donc (puisque la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est **orthonormée**)

$$U^\top.S.U = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i) \cdot (\alpha_i\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i^2.$$

**3. b.** Comme les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$, on a donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \lambda_i\alpha_i^2 \leqslant \lambda_1\alpha_i^2 \qquad \text{et donc} \qquad U^\top.S.U \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_1\|U\|^2.$$

En divisant par $\|U\|^2 > 0$ (puisque $U \neq 0$), on en déduit que $f(U) \leqslant \lambda_1$ pour toute colonne $U \neq 0$.
❧ Si $U$ est un vecteur propre de $S$ associé à la valeur propre $\lambda_1$, alors

$$U^\top.S.U = U^\top.(\lambda_1 \cdot U) = \lambda_1 \|U\|^2$$

donc $f(U) = \lambda_1$.

Réciproquement, si $f(U) = \lambda_1$, alors $U^\top.S.U = \lambda_1\|U\|^2$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_i)}_{\geqslant 0}\underbrace{\alpha_i^2}_{\geqslant 0} = 0,$$

ce qui prouve que tous les termes sont nuls et donc que $\alpha_i = 0$ pour tout $i$ tel que $\lambda_1 > \lambda_i$. Par conséquent,

$$U = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}} \alpha_i \cdot V_i \qquad \text{et donc} \qquad SU = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}} \alpha_i \cdot SV_i = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}} \alpha_i\lambda_1 \cdot V_i = \lambda_1 \cdot U$$

et comme $U \neq 0$ par hypothèse, c'est bien un vecteur propre de $S$ associé à $\lambda_1$.

**4. a.** Il est clair que

$$S = (1-a)I_3 + aJ_3 \qquad \text{où} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait bien que les valeurs propres de $J_3$ sont $0$ (associée au plan d'équation $x + y + z = 0$) et $3$ (associée à la droite dirigée par $(1,1,1)$). Donc les valeurs propres de $S$ sont $(1-a)\times 1 + a \times 0 = 1 - a$ et $(1-a) \times 1 + a \times 3 = 1 + 2a$. Comme $0 < a < 1$, on a $1 - a < 1 < 1 + 2a$, donc $\lambda_1 = 1 + 2a$ est la plus grande valeur propre de $S$ et le sous-espace propre associé est la droite dirigée par $(1,1,1)$.

✍ *On a exprimé la matrice $S$ comme un polynôme en $J_3$, ce qui nous a permis d'exprimer les valeurs propres de $S$ en fonction des valeurs propres de $J_3$ (et de ce polynôme $P$).*

*Comme la restriction de l'application polynomiale $P$ au spectre de $J_3$ est injective, les sous-espaces propres de $S$ et de $J_3$ sont les mêmes.*

**4. b.** On en déduit que le maximum étudié est égal à $1 + 2a$ et que ce maximum est atteint exactement pour les colonnes $U$ de la forme $(x, x, x)$ avec $x \neq 0$.

*On considère l'équation différentielle suivante.*

$$\forall\, t \in\ I = ]0, +\infty[, \quad t^2x''(t) + tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \qquad (E)$$

**1.** *Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation* $(E)$ *?*

**2.** *Soient* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *et* $g = [x \mapsto f(e^x)]$*. Démontrer que* $f$ *est solution de* $(E)$ *sur* $I$ *si, et seulement si,* $g$ *est solution sur* $\mathbb{R}$ *d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).*

**3.** *Résoudre l'équation* $(E)$*.*

**1.** Sur l'intervalle $I$, l'équation $(E)$ peut être mise sous la forme canonique

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (C)$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$$

où les deux applications $A : I \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^2$ sont continues car $0 \notin I$.

Par conséquent, pour toute condition initiale $\big(t_0, (x_0, v_0)\big) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $F$ de $(C)$ sur $I$ telle que $F(t_0) = (x_0, v_0)$.

Comme $x \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de $(E)$ si, et seulement si, $X = (x, x') \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ est solution de $(C)$, on en déduit que, pour tout triplet $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une, et une seule, solution $f$ de $(E)$ sur $I$ telle que $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

**2.** Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ et que

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x & \longmapsto & g(x) = f(e^x) \end{array}$$

l'application $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x).$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) = (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $t = e^x$ appartient à l'intervalle $I$ et comme $f$ est une solution de $(E)$, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x) = \frac{1}{e^x} + e^x = 2\operatorname{ch} x.$$

La fonction $g$ est donc une solution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}. \qquad (E_0)$$

✍ *On a raisonné par condition nécessaire ("si* $f$ *est solution de* $(E)$*, alors* $g$ *est solution de* $(E_0)$*"), il faudra étudier la réciproque à un moment ou un autre. Il n'est pas utile d'attendre !*

*Le changement de variable* $t = e^x$ *peut aussi s'écrire* $x = \ell n\, t$*, c'est donc aussi une bijection de classe* $\mathscr{C}^2$ *de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$*. De ce fait, en reprenant les calculs qui viennent d'être faits : si* $g(x)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *qui vérifie l'équation* $(E_0)$ *sur* $\mathbb{R}$*, alors* $f(t) = g(\ell n\, t)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *qui vérifie l'équation* $(E)$ *sur* $I$*.*

**3.** On reconnaît l'équation du pendule harmonique. Donc une fonction $y_0 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation homogène associée à $(E_0)$ si, et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = a\cos x + b\sin x.$$

L'équation $y''(x) + y(x) = e^x$ admet une solution particulière de la forme $y_1(x) = be^x$. Après substitution et simplification, on trouve que $b = 1/2$.

De même, l'équation $y''(x) + y(x) = e^{-x}$ admet une solution particulière de la forme $y_2(x) = ce^{-x}$. On trouve que $c = 1/2$.

Finalement, une fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de $(E_0)$ si, et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a\cos x + b\sin x + \operatorname{ch} x.$$

❧ On a justifié plus haut qu'on pouvait en déduire les solutions de $(E)$ : une fonction $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de $(E)$ si, et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = a\cos \ln t + b\sin \ln t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}.$$

**1.** *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Démontrer que* $A$ *est diagonalisable en explicitant une matrice inversible* $P$ *et une matrice diagonale* $D$ *telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

**2.** *On considère le système différentiel suivant.*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \tag{$S_1$}$$

*Démontrer que* $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ *est une solution de* $(S_1)$ *si, et seulement si,* $U = P^{-1}X$ *est une solution du système différentiel*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = DY(t). \tag{$\Delta_1$}$$

*En déduire les solutions de* $(S_1)$*.*

**3.** *On considère le système différentiel suivant.*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X''(t) = AX(t) \tag{$S_2$}$$

**3. a.** *Résoudre le système* $(S_2)$*.*

**3. b.** *Soit* $E$*, l'ensemble des solutions bornées sur* $\mathbb{R}$ *de* $(S_2)$*. Démontrer que* $E$ *est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

**1.** On vérifie facilement que le polynôme caractéristique de $A$ est $(X+1)(X-2)(X-3)$.

✍ *Il faut manifestement développer par la troisième colonne !*

Une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admettant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A + I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 3I_3)$$

et les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Par conséquent, il suffit de trouver un vecteur non nul dans chacun de ces trois droites pour en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres.

✍ *Si on connaît une décomposition en somme directe* $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$*, alors il suffit de connaître une base de chaque sous-espace* $V_k$ *pour en déduire par concaténation une base de* $E$*.*

On écrit les trois matrices

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (4, -2, -1), \quad \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, -1), \quad \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1).$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible et $P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(-1, 2, 3)$.

**2.** Comme la matrice $P$ est inversible et constante (indépendante de $t$), le produit $U = P^{-1}X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, la fonction $X = PU$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U'(t) = P^{-1}X'(t).$$

✍ *Comme la matrice $P^{-1}$ est constante, les composantes de la colonne $U(t)$ sont en fait des combinaisons linéaires des composantes de la colonne $X(t)$ (et réciproquement). On applique donc la règle pour calculer la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables.*

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) && \text{(multiplication à gauche par } P^{-1}\text{)} \\ &\iff U'(t) = P^{-1}AP \cdot P^{-1}X(t) && \text{(astuce taupinale)} \\ &\iff U'(t) = D.U(t). \end{aligned}$$

❧ Comme la matrice D est diagonale, le système $(\Delta_1)$ revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u'(t) = -u(t), \qquad v'(t) = 2v(t), \qquad w'(t) = 3w(t).$$

Donc U est solution de $(\Delta_1)$ si, et seulement si, il existe trois constantes $K_1$, $K_2$ et $K_3$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) = \left(K_1 e^{-t},\ K_2 e^{2t},\ K_3 e^{3t}\right)$$

et finalement une fonction $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est solution de $(S_1)$ si, et seulement si, il existe $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✍ *Je ne suis pas convaincu de la nécessité d'effectuer ce produit matriciel, car je ne vois pas en quoi l'expression développée*

$$F(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t} \\ -2K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-t} \\ -K_1 e^{-t} - K_2 e^{2t} + K_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

*est plus claire ou plus utile que l'expression factorisée ci-dessus.*

*J'irais même jusqu'à préférer une expression complètement factorisée (en notant $\Lambda = (K_1, K_2, K_3)$) :*

$$F(t) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = P \cdot \exp(tD) \cdot \Lambda$$

*afin de faire apparaître $\exp(tA)$ :*

$$F(t) = P \cdot \exp\left[t(P^{-1}AP)\right] \cdot \Lambda = P \cdot \left[P^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot P\right] \cdot \Lambda = \exp(tA) \cdot P\Lambda.$$

*On comprend ici que $P\Lambda = F(0)$.*

✍ *Si on choisit une autre base de vecteurs propres (et pourquoi pas ?), on obtiendra une expression analogue de $X(t)$, mais les constantes d'intégration $K_i$ seront différentes :*

$$F(t) = \exp(tA) \cdot P_1\Lambda_1 = \exp(tA) \cdot P_2\Lambda_2.$$

*Cela dit, si on impose une condition initiale $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on doit trouver la même solution, quelle que soit la base de vecteurs propres choisie ! En effet, la condition initiale $F(t_0) = X_0$ se traduit par*

$$P_1 \cdot \Lambda_1 = P_2 \cdot \Lambda_2 = \exp(-t_0 A)X_0.$$

*Ce n'est donc pas $P$, ni $\Lambda$ qui compte, mais uniquement le produit $P\Lambda$.*

**3. a.** Comme plus haut, on résout $(S_2)$ en se ramenant au système découplé

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U''(t) = DU(t) \tag{$\Delta_2$}$$

qui revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u''(t) + u(t) = 0, \qquad v''(t) - 2v(t) = 0, \qquad w''(t) - 3w(t) = 0.$$

Par conséquent, une fonction $U \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de $(\Delta_2)$ si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

et, comme précédemment, une fonction $F \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de $(S_2)$ si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

**3. b.** Considérons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^3$ et la norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur l'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

✍ *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc la norme choisie importe peu.*

*En particulier, la norme choisie est équivalente à la norme produit pour laquelle une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ est bornée si, et seulement si, ses trois composantes sont bornées.*

Le système différentiel $(S_2)$ est un système différentiel linéaire et homogène du second ordre, donc l'ensemble $\mathcal{S}_2$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

L'ensemble $E$ est l'intersection du sous-espace $\mathcal{S}_2$ avec l'ensemble $\mathscr{C}^2_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ des applications bornées de classe $\mathscr{C}^2$, qui est un sous-espace "bien connu" de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Donc $E$ est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

❧ Par définition, $U(t) = P^{-1}X(t)$ et donc $X(t) = PU(t)$. Comme la norme subordonnée est sous-multiplicative,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|U(t)\| \leqslant |||P^{-1}|||\, \|X(t)\| \quad \text{et} \quad \|X(t)\| \leqslant |||P|||\, \|U(t)\|.$$

Comme $|||P^{-1}|||$ et $|||P|||$ sont des facteurs indépendants de $t$, on en déduit que la fonction $X$ est bornée si, et seulement si, la fonction $U$ est bornée.

Comme $e^{\alpha t}$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\alpha > 0$ (resp. au voisinage de $-\infty$ lorsque $\alpha < 0$), la fonction $U$ est bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les constantes $A_2$, $A_3$, $B_2$ et $B_3$ sont nulles.

Ainsi, une fonction $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est une solution de $(S_2)$ qui reste bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe deux réels $A_1$ et $B_1$ tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = P \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la dimension du sous-espace $E$ des solutions bornées sur $\mathbb{R}$ est égale à 2.

*Soit X, une variable aléatoire telle que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

**1.** *Vérifier que l'énoncé a un sens.*
**2.** *Calculer la fonction génératrice de X.*
**3.** *Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.*

**1.**

✍ ***Rappel.*** *Il existe un espace probabilise $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, la série $\sum p_k$ est une série convergente de terme général positif dont la somme est égale à 1.*

On sait que

$$\forall\, x \in\, ]-1, 1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{$\star$}$$

✍ *On obtient ce résultat en dérivant terme à terme la série entière $\sum x^n$.*

Comme $x = 1/2 \in\, ]-1, 1[$ et que

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot (k-1) \cdot (1/2)^{k-2},$$

la série $\sum (k-1)2^{-k}$ est une série convergente de terme général positif et sa somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(1/2)^{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1/2)^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - 1/2)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 4,$$

ce qui prouve qu'il existe bien une variable aléatoire X telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

**2.** D'après $(\star)$,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) t^k = \frac{t^2}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(t/2)^{k-1} = \frac{t^2}{(2-t)^2}.$$

**3.** Le rayon de convergence de la série entière $\sum k(t/2)^{k-1}$ est égal à 2, donc la fonction génératrice est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-2, 2[$.

✍ *Le terme général tend vers 0 pour $|t| < 2$ et vers $+\infty$ pour $t = 2$, donc le rayon de convergence est égal à 2.*

En particulier, la fonction génératrice G est deux fois dérivable en $t = 1$, donc

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = 4 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}\big(X(X-1)\big) = G''(1) = 16$$

car

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad G'(t) = \frac{4t}{(2-t)^3} \qquad \text{et} \qquad G''(t) = \frac{8(1+t)}{(2-t)^3}.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 4.$$

# rms135-1580

*Soient $a$ et $n$, deux entiers naturels non nuls. On répartit $N = an$ boules dans $n$ urnes. On pose alors $T_i = 1$ si l'urne $i$ est vide et $T_i = 0$ sinon. On note $Y_n$, le nombre d'urnes vides et*

$$S_n = \frac{Y_n}{n}.$$

**1.** *Proposer un modèle probabiliste pour lequel les $T_1, \dots, T_n$, $Y_n$ et $S_n$ sont des variables aléatoires.*

**2.** *Déduire de ce modèle la loi, l'espérance et la variance de $T_i$.*

**3.** *Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.*

**1.** On considère une famille $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

✍ *On modélise ainsi la répartition des $N$ boules parmi les $n$ urnes : l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé lorsque la boule $k$ arrive dans l'urne $i$.*

On définit alors des variables aléatoires de Bernoulli $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ en posant

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad [T_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \neq i]$$

et la variable aléatoire $T_i$ est bien égale à 1 si, et seulement si, l'urne $i$ est vide (= toutes les boules sont rangées dans une autre urne).

✍ *Une fonction $T : \Omega \to [\![0, 1]\!]$ est une variable aléatoire (de Bernoulli) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ si, et seulement si, l'image réciproque $[T = 1]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.*

*Comme les $X_k$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, il est clair que $[T_i = 1]$ est un élément de $\mathcal{A}$ (en tant qu'intersection d'un nombre fini d'évènements).*

❧ Le nombre d'urnes vides est le nombre d'indices $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que la variable aléatoire $T_i$ prend la valeur 1. Par conséquent,

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires).

L'application $S_n$ est aussi une combinaison linéaire des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$, donc c'est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

**2.** Puisque la variable aléatoire $T_i$ ne prend que les valeurs 0 et 1, sa loi est une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et par conséquent $\mathbf{E}(T_i) = p$ et $\mathbf{V}(T_i) = pq$ (en posant $q = 1 - p$).

Comme les $X_k$ sont, par construction, indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad p = \mathbf{P}(T_i = 1) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_k \neq i) = \big[1 - \mathbf{P}(X_k = i)\big]^N = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^N.$$

✍ *Les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ suivent donc toutes la même loi. Elles ne sont pas indépendantes, car l'évènement*

$$\bigcap_{i=1}^{n} [T_i = 1]$$

*est impossible (les urnes ne peuvent pas être toutes vides !), alors que la probabilité*

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(T_i = 1) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{nN}$$

*est strictement positive.*

**3.** Par bilinéarité et symétrie de la covariance,

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(T_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{Cov}(T_i, T_j)\Big)$$

et comme les variables aléatoires $T_i$ suivent toutes la même loi, on déduit de la formule de Koenig-Huyghens que

$$\mathbf{Cov}(T_i, T_j) = \mathbf{E}(T_iT_j) - \mathbf{E}(T_i)\,\mathbf{E}(T_j) = \mathbf{E}(T_iT_j) - [\mathbf{E}(T_1)]^2.$$

En tant que produit de deux variables aléatoires de Bernoulli, la variable aléatoire $T_iT_j$ suit aussi une loi de Bernoulli et $\mathbf{E}(T_iT_j) = \mathbf{P}(T_iT_j = 1)$. Or

$$[T_iT_j = 1] = [T_i = 1] \cap [T_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \neq i, X_k \neq j] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \notin \{i, j\}].$$

Les variables aléatoires $X_k$ étant indépendantes et de loi uniforme, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad \mathbf{E}(T_iT_j) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_k \notin \{i, j\}) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^N.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\Big(n\,\mathbf{V}(T_1) + 2\binom{n}{2}\mathbf{Cov}(T_1, T_2)\Big)\\ &= \frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n}\Big[\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^N - p^2\Big]\end{aligned}$$

où $p$ et $q = 1 - p$ ont été calculés à la question précédente.

*Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ (avec $n \geqslant 2$). On effectue des tirages avec remise et on note $X_n$, le rang du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule distincte de la boule obtenue lors du premier tirage.*

**1.** *Proposer un modèle probabiliste pour lequel $X_n$ est une variable aléatoire. Déterminer la loi de $X_n$ pour ce modèle. Cette variable aléatoire est-elle presque sûrement finie ?*

**2.** *Calculer l'espérance de $X_n$ et commenter le résultat obtenu.*

**3.** *On note $Y_n$, le nombre de tirages au terme desquels on a tiré chaque boule au moins une fois.*

**3. a.** *Déterminer la loi de $Y_2$.*

**3. b.** *Calculer $\mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j)$. En déduire la loi de $Y_3$.*

**1.** Puisqu'on effectue des tirages **avec** remise, on modélise l'expérience au moyen d'une suite $(U_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

❧ Il faut au moins deux tirages pour obtenir deux boules distinctes, donc l'application X prend des valeurs entières supérieures à 2 (et éventuellement la valeur $+\infty$ au cas où on tirerait indéfiniment la même boule).

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$,

$$[X_n = k] = [U_1 = \cdots = U_{k-1} \neq U_k] = \bigsqcup_{i=1}^{n} [U_1 = i, \dots, U_{k-1} = i, U_k \neq i] \in \mathcal{A}.$$

✍ *Comme les $U_i$ sont, par construction, des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, les $[U_j = i]$ et $[U_j \neq i] = [U_j = i]^c$ sont des évènements. On peut alors conclure parce qu'une tribu est stable par intersection finie et par union finie.*

D'autre part,

$$[X_n = +\infty] = \bigcap_{k=2}^{+\infty} [U_k = U_1] = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i] \in \mathcal{A}.$$

✍ *Une tribu est aussi stable par intersection dénombrable.*

Cela prouve que $X_n : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est une variable aléatoire discrète.

❧ Comme les variables aléatoires $U_i$ sont indépendantes et de même loi,

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = n\,\mathbf{P}(U_1 = \cdots = U_{k-1} = 1, U_k \neq 1) = n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{k-1} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

D'autre part, pour tout entier $K \geqslant 1$,

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i] \subset \bigcap_{k=1}^{K} [U_k = i],$$

donc, toujours pour les mêmes raisons,

$$0 \leqslant \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i]\Big) \leqslant [\mathbf{P}(U_1 = i)]^K = \frac{1}{n^K}.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i]\Big) = 0$$

et comme une union (finie ou même dénombrable) d'évènements négligeables est encore un évènement négligeable, on en déduit que la variable aléatoire $X_n$ est presque sûrement finie :

$$\mathbf{P}(X_n = +\infty) = 0.$$

**2.** Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$k\,\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{(n-1)k}{n^{k-1}} \underset{k\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{k^{2025}}\Big)$$

donc la série $\sum k\,\mathbf{P}(X_n = k)$ est (absolument) convergente et $X_n$ est bien une variable aléatoire d'espérance finie.

Par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X_n = k) = (n-1)\sum_{k=2}^{+\infty} k(1/n)^{k-1} = (n-1)\Big[\frac{1}{(1-1/n)^2} - 1\Big] = \frac{2n-1}{(n-1)^2}.$$

❧ Lorsque $n$ devient grand, l'espérance de $X_n$ devient proche de 2 et c'est tout à fait normal : lorsqu'il y a un grand nombre de boules dans l'urne, il y a de très fortes chances pour que les deux premières boules tirées diffèrent et donc pour que $X_n$ soit égal à 2.

✍ *On notera que l'espérance de $X_n$ tend vers 2 par valeurs supérieures — toutes les valeurs de $X_n$ sont supérieures à 2 !*

**3. a.** Pour $n = 2$, l'urne ne contient que deux boules. Par conséquent, le nombre de tirages au terme desquels on a tiré les deux boules de l'urne est aussi le rang du tirage où on obtient pour la première fois une (la !) boule distincte de la boule tirée en premier.

Autrement dit : $Y_2 = X_2$.

✍ *Il s'agit d'une égalité de fonctions et non pas seulement d'une égalité en loi !*

En particulier,

$$\forall\, k \geqslant 2, \qquad \mathbf{P}(Y_2 = k) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

✍ *Ce n'est pas une loi géométrique mais presque : la loi de $Y_2 - 1$ est la loi géométrique $\mathscr{G}(1/2)$.*

**3. b.** Cette fois, l'urne contient $n = 3$ boules.

— Au premier tirage, on tire la première boule. (Jusque là, tout va bien, non ?)

— Au tirage $X_3$, on tire pour la première fois une autre boule. Si $X_3 = i$, alors les boules $U_2, \dots, U_{i-1}$ sont toutes égales à la boule $U_1$.

— Au tirage $Y_3$, on tire la troisième et dernière boule pour la première fois. Si $Y_3 = j$, alors les boules $U_{i+1}, \dots, U_{j-1}$ sont égales à $U_1$ ou à $U_i$.

Ainsi, pour $2 \leqslant i < j$,

$$[X_3 = i, Y_3 = j] = [U_1 = \cdots = U_{i-1}, U_i \neq U_1, U_{i+1} \in \{U_1, U_i\}, \dots, U_{j-1} \in \{U_1, U_i\}, U_j \notin \{U_1, U_i\}].$$

Il y a trois valeurs possibles pour la première boule tirée et seulement deux pour la boule tirée au rang $X_3$. On a donc

$$[X_3 = i, Y_3 = j] = \bigsqcup_{k=1}^{3} \bigsqcup_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant 3\\ \ell\neq k}} [U_1 = k, \dots, U_{i-1} = k, U_i = \ell, U_{i+1} \in \{k,\ell\}, \dots, U_{j-1} \in \{k,\ell\}, U_j \in \{1,2,3\}\setminus\{k,\ell\}].$$

✍ *Cette décomposition prouve (enfin !) que $[X_3 = i, Y_3 = j]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.*

*Comme $X_3$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et que l'évènement $[X_3 = i, Y_3 = j]$ est impossible pour $i \geqslant j$, on a*

$$[Y_3 = j] = \bigsqcup_{i=2}^{j-1} [X_3 = i, Y_3 = j] \in \mathcal{A}$$

*pour tout entier $j \geqslant 3$.*

*D'autre part, $Y_3$ prend la valeur $+\infty$ lorsque l'une (au moins) des boules n'est jamais tirée, c'est-à-dire*

$$[Y_3 = +\infty] = \bigcup_{k=1}^{3} \bigcap_{\ell=1}^{+\infty} [U_i \neq k] \in \mathcal{A}.$$

*Nous pouvons donc continuer sereinement : l'application $Y_3$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

Comme les variables aléatoires $U_1, \dots$sont indépendantes et de loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$, on en déduit que

$$\forall\, 2 \leqslant i < j, \quad \mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{j-i}}{3^{j-1}}.$$

✍ *Pour $i \geqslant j$, l'évènement $[X_3 = i, Y_3 = j]$ est impossible et sa probabilité est donc nulle.*

❧ Si $j$ est fixé, l'entier $i$ varie entre 2 et $(j-1)$, donc

$$\begin{aligned}\forall\, j \geqslant 3, \quad \mathbf{P}(Y_3 = j) &= \sum_{i=2}^{j-1} \mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j) \\ &= \frac{1}{3^{j-1}} \sum_{i=2}^{j-1} 2^{j-i} = \frac{1}{3^{j-1}} \sum_{k=1}^{j-2} 2^k = \frac{1}{3^{j-1}} \cdot 2^1 \cdot \frac{2^{j-2}-1}{2-1} = \frac{2^{j-1}-2}{3^{j-1}}.\end{aligned}$$

✍ *Il est judicieux d'appliquer une nouvelle fois la formule de la somme géométrique pour vérifier que*

$$\sum_{j=\mathbf{P}}^{+\infty} (Y_3 = j) = 1$$

*ce qui prouve que la variable aléatoire $Y_3$ est presque sûrement finie.*

*On dispose d'une urne contenant $N$ boules (avec $N \geqslant 1$) : il y a $r$ boules blanches (indiscernables entre elles) et $N - r$ boules noires (indiscernables entre elles). On effectue des tirages sans remise et on note $X$, le nombre de tirages au terme desquels il ne reste plus de boule blanche dans l'urne.*

**1.** *Proposer un modèle probabiliste pour lequel $X$ est une variable aléatoire. En déduire la loi de $X$ et son espérance pour $r = 1$ et pour $r = N$.*

**2.** *Dans cette question, on suppose que $1 < r < N$.*

**2. a.** *Quelles sont les valeurs possibles pour $X$ ?*

**2. b.** *Démontrer que*

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

**3.** *Donner une relation simple entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$. En déduire que*

$$\mathbf{E}(X) = r\frac{N+1}{r+1}.$$

*(On pourra raisonner par récurrence sur $N$.)*

**1.** Initialement, l'urne contient $N$ boules. En effectuant $N$ tirages consécutifs **sans** remise, on vide complètement l'urne. Puisque les boules sont indiscernables (sauf par leur couleur !), la succession des $N$ tirages peut être représentée par un ensemble $I$ de $r$ entiers choisis dans $[\![1, N]\!]$ : un entier $1 \leqslant i \leqslant N$ appartient à $I$ si, et seulement si, le $i$-ème tirage a donné une boule blanche.

Notons donc $E_r$, l'ensemble des parties de $[\![1, N]\!]$ dont le cardinal est égal à $r$. Le cardinal de $E_r$ est égal à $\binom{N}{r}$ (on choisit $r$ éléments parmi $N$).

On modélise l'expérience par une variable aléatoire $U$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi uniforme sur $E_r$ :

$$\forall\, I \in E_r, \qquad \mathbf{P}(U = I) = \frac{1}{\binom{N}{r}}.$$

Comme $U$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire discrète.

❧ Le nombre de tirages nécessaires pour qu'il ne reste plus aucune boule blanche dans l'urne est aussi le numéro du tirage qui donne la dernière boule blanche. Autrement dit,

$$X = \max U.$$

Comme $U$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (par construction), on en déduit que $X$, en tant que fonction de $U$, est aussi une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

❧ Pour $r = 1$, on a $E_r = \big\{\{1\}, \dots, \{N\}\big\}$ et comme les valeurs de $U$ sont des singletons,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad [X = k] = [U = \{k\}], \qquad \text{donc} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{N}.$$

La variable aléatoire $X$ suit donc la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et en particulier $\mathbf{E}(X) = \frac{N+1}{2}$.

❧ Pour $r = N$, l'ensemble $E_r$ est un singleton : $E_r = \{[\![1, N]\!]\}$ donc la variable aléatoire $X$ est constante :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = N$$

et en particulier $\mathbf{E}(X) = N$.

**2. a.** Dans le meilleur des cas, on tire les $r$ boules blanches au cours des $r$ premiers tirages, donc $X$ est au moins égal à $r$.

Dans le pire des cas, la $N$-ième et dernière boule tirée est blanche et dans ce cas, $X$ est égal à $N$.

Les valeurs prises par $X$ sont donc comprises entre $r$ et $N$ (inclus).

**2. b.** Puisque la loi de $U$ est uniforme sur $E_r$, il s'agit de compter le nombre d'ensembles $I \in E_r$ pour lesquels $\max I = k$.

Choisir $r$ entiers parmi $1, \dots, N$ sachant que le plus grand élément est égal à $k$ revient à choisir $(r-1)$ entiers parmi $1, \dots, (k-1)$, ce qui fait $\binom{k-1}{r-1}$ et

$$\forall\, r \leqslant k \leqslant N, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

✍ *On retrouve ainsi les cas particuliers $r = 1$ et $r = N$ traités à la question précédente.*

**3.** Quels que soient les entiers $p \geqslant q \geqslant 1$, on a $p-1 \geqslant q-1 \geqslant 0$ et

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p}{q} \cdot \frac{(p-1)!}{(q-1)!\big((p-1)-(q-1)\big)!} = \frac{p}{q}\binom{p-1}{q-1}.$$

❧ La variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, d'après la relation qu'on vient d'établir,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=r}^{N} k\frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \sum_{k=r}^{N} r\frac{\binom{k}{r}}{\binom{N}{r}} = \frac{r}{\binom{N}{r}}\sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}.$$

On peut démontrer par récurrence (sur $N \geqslant r$) la formule généralisée du triangle de Pascal :

$$\forall\, N \geqslant r, \qquad \sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}.$$

✍ *Bien entendu, l'hérédité de cette propriété repose sur la formule habituelle du triangle de Pascal.*
*On peut aussi en proposer une démonstration combinatoire, tout à fait dans l'esprit de l'exercice :*
— *Il y a $\binom{N+1}{r+1}$ manières de choisir une partie de cardinal $(r+1)$ dans l'ensemble $[\![1, N+1]\!]$ de cardinal $(N+1)$.*
— *Le plus grand élément d'une telle partie est au moins égal à $(r+1)$ (lorsque la partie choisie est $\{1, \dots, r+1\}$) et au plus égal à $(N+1)$ (on n'ira pas plus loin).*
— *Si le plus grand élément de la partie choisie est égal à $k+1 \in [\![r+1, N+1]\!]$, alors il reste à choisir les $r$ autres éléments dans l'intervalle $[\![1, k]\!]$, ce qui donne $\binom{k}{r}$ choix.*

Finalement,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}}\binom{N+1}{r+1} = \frac{r}{r+1}(N+1).$$

# rms135-1583

*Soient X et Y, deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = m]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$ (avec $0 < p < 1$).*

**1.** *Déterminer la loi de $(X, Y)$.*

**2.** *En déduire la loi de Y.*

**3.** *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*

**4.** *Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?*

**1.** Par hypothèse, quels que soient les entiers naturels $m$ et $n$,

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(Y = n \mid X = m).$$

Si $n > m$, le second facteur est nul (la loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$ est portée par l'intervalle $[\![0, m]\!]$), donc $\mathbf{P}(X = m, Y = n) = 0$. Et si $0 \leqslant n \leqslant m$, alors

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \cdot \binom{m}{n} p^n q^{m-n} = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!}.$$

**2.** Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = e^{-\lambda+\lambda q} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}.$$

On reconnaît ici la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$.

**3.** Comme X et Y suivent une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ et que $\mathbf{P}(Y = 1) > 0$. Mais la loi conjointe nous dit que $\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 1$ et comme $[X = 0, Y = 1] \subset [Y \leqslant X]^c$, alors

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0)\,\mathbf{P}(Y = 1).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

✍ *Pour arriver à cette conclusion, on s'est appuyé sur une propriété remarquable ($\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 1$) qui nous a permis de mettre en évidence un évènement négligeable.*

*Attention, si une propriété comme $\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 1$ indique qu'une contrainte relie X et Y, elle n'empêche pas que les variables aléatoires soient indépendantes. Par exemple, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli, alors U et $V + 1$ sont encore des variables aléatoires indépendantes et ces deux variables aléatoires vérifient $\mathbf{P}(U \leqslant V + 1) = 1$.*

**4.** L'application Z est une variable aléatoire comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires. On décompose l'évènement $[Z = k]$ avec le système complet d'évènements lié à la variable aléatoire X :

$$[Z = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, X - Y = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, Y = m - k].$$

Comme $\mathbf{P}(Y \geqslant 0) = 1$ (loi de Poisson),

$$\forall\, 0 \leqslant m < k, \qquad 0 \leqslant \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) \leqslant \mathbf{P}(Y = m - k) = 0,$$

il ne reste donc que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^n}{n!} = e^{-\lambda+\lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!}.$$

La variable aléatoire Z suit donc la loi de Poisson $PP(\lambda q)$.

✍ *On peut vérifier que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes et relier les calculs qui précèdent à la stabilité de la loi de Poisson pour l'addition.*

> *Soient $0 < p < 1$ et $(X, Y)$, un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que*
>
> $$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}p(1-p)^n$$
>
> *et que*
>
> $$\forall\, k > n, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = 0.$$
>
> **1.** *Déterminer la loi de $Y$.*
>
> **2. a.** *Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de $0$.*
>
> **2. b.** *Justifier que*
>
> $$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$
>
> **3.** *Déterminer la loi de $X$.*

**1.** Comme $Y$ est, par construction, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $[Y = n] \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut décomposer l'évènement $[Y = n]$ sur le système complet d'évènements associé à $X$ :

$$[Y = n] = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} [X = k, Y = n].$$

Par $\sigma$-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}p(1-p)^n = p(1-p)^n.$$

✍ *C'est bien sûr la formule du binôme qui nous dit que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.*

✍ *Quels que soient les entiers naturels $k$ et $n$, l'expression de $\mathbf{P}(X = k, Y = n)$ est un réel positif. On vient de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille*

$$\big(\mathbf{P}(X = k, Y = n)\big)_{k \in \mathbb{N}}$$

*était sommable (elle ne compte qu'un nombre fini de termes non nuls !) et la formule de la somme géométrique permet de vérifier que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = 1.$$

*Le Théorème de Fubini nous assure alors que la famille*

$$\big(\mathbf{P}(X = k, Y = n)\big)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$$

*est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à $1$. Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$ et cela démontre que l'énoncé a bien un sens : il existe un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ dont la loi est décrite par cette famille de réels.*

**2. a.** On connaît la somme géométrique :

$$\forall\, t \in \left]-1, 1\right[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

**2. b.** Lorsque le rayon de convergence R d'une série entière est strictement positif (et, ici, il est égal à 1), la somme S de cette série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme sur le même intervalle ouvert :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in ]-1, 1[, \quad S^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}$$

et on peut réécrire cette égalité sous une forme plus brève :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in ]-1, 1[, \qquad \frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

**3.** Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors $[X = k] \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et comme Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut décomposer l'évènement $[X = k]$ sur le système complet d'évènements associé à Y :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad [X = k] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [X = k, Y = n]$$

et, par σ-additivité de **P**,

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} p(1-p)^n = p\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n = \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k.\end{aligned}$$

✍ *La formule de la somme géométrique nous permet de vérifier que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1.$$

*On considère deux réels $0 < \lambda < 1$ et $\alpha > 0$ tels que $(1+\alpha)\lambda < 1$. On considère que la probabilité pour qu'une famille ait exactement $n$ enfants (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est égale à $\alpha\lambda^n$.*

**1.** *Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun enfant.*

**2.** *Calculer la somme*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$$

*pour $x \in ]-1, 1[$.*

**3.** *On note $p$, la probabilité qu'un enfant soit une fille et $q = 1 - p$, la probabilité qu'un enfant soit un garçon.*

**3. a.** *Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement $k$ garçons.*

**3. b.** *Calculer la probabilité pour qu'une famille ait au moins deux garçons sachant qu'elle en a au moins un.*

**1.** Comme $\alpha$ et $\lambda$ sont strictement positifs, la famille $(\alpha\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs. Comme $0 < \lambda < 1$, c'est une famille sommable (comparaison à une série géométrique) et

$$1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\lambda^n = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} = \frac{1-(1+\alpha)\lambda}{1-\lambda} > 0$$

puisque $(1+\alpha)\lambda < 1$.

Il existe donc une variable aléatoire $E$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que

$$\mathbf{P}(E = 0) = \frac{1-(1+\alpha)\lambda}{1-\lambda} = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(E = n) = \alpha\lambda^n.$$

L'énoncé suggérant qu'une telle variable aléatoire modélise le nombre d'enfants par famille, on peut conclure que la probabilité pour qu'une famille n'ait pas d'enfant est égale à $\mathbf{P}(E = 0)$.

**2.** Pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{$\star$}$$

Voir 135-1584 pour les détails.

**3.** Toute variable aléatoire $G : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifie

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(G = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(G = k \mid E = n)\,\mathbf{P}(E = n)$$

(décomposition de l'évènement $[G = k] \in \mathcal{A}$ dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète $E$).

✍ *L'énoncé ne veut rien dire, il faut une fois de plus formuler les questions qu'on va résoudre...*

On interprète l'énoncé en considérant que, pour tout $n \geqslant 1$, la loi conditionnelle sachant $[E = n]$ de la variable aléatoire $G$ qui décrit le nombre de garçons est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Bien entendu, conditionnellement à l'évènement $[E = 0]$, la variable aléatoire $G$ est presque sûrement égale à $0$.

✍ *Combien de garçons dans une famille qui n'a pas d'enfant ? Hein ?*
*Il faut prendre en compte ce cas particulier car $\mathbf{P}(E = 0) \neq \alpha$.*

Nous supposerons donc dorénavant que

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \mathbf{P}(G = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot \alpha\lambda^n \tag{$\dagger$}$$

et que

$$\mathbf{P}(G=0)=\mathbf{P}(E=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{0}q^n\cdot\alpha\lambda^n$$
$$=1-\frac{\alpha\lambda}{1-\lambda}+\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda q)^n=1-\frac{\alpha\lambda}{1-\lambda}+\frac{\alpha\lambda q}{1-\lambda q}=1-\frac{\alpha\lambda p}{(1-\lambda)(1-q\lambda)}.$$

**3. a.** On a calculé ci-dessus la valeur de $\mathbf{P}(G=0)$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on déduit de $(\star)$ et de $(\dagger)$ que

$$\mathbf{P}(G=k)=\alpha\Big(\frac{p}{q}\Big)^k\cdot\frac{(\lambda q)^k}{(1-\lambda q)^{k+1}}=\frac{\alpha(\lambda p)^k}{(1-\lambda q)^{k+1}}.$$

**3. b.** Il s'agit de calculer maintenant

$$\mathbf{P}(G\geqslant 2\mid G\geqslant 1)=\frac{\mathbf{P}([G\geqslant 2]\cap[G\geqslant 1])}{\mathbf{P}(G\geqslant 1)}=\frac{\mathbf{P}(G\geqslant 2)}{\mathbf{P}(G\geqslant 1)}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, k\geqslant 1,\qquad \mathbf{P}(G\geqslant k+1)=\frac{\lambda p}{1-\lambda q}\,\mathbf{P}(G\geqslant k).$$

En sommant sur $k\in\mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(G\geqslant 2)=\frac{\lambda p}{1-\lambda q}\,\mathbf{P}(G\geqslant 1)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(G\geqslant 2\mid G\geqslant 1)=\frac{\lambda p}{1-\lambda q}.$$

✍ *On peut calculer explicitement $\mathbf{P}(G\geqslant 1)$ et $\mathbf{P}(G\geqslant 2)$ (puisque ce sont des sommes géométriques), mais c'est vraiment du temps perdu !*

*Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables aléatoires suivent la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.*

**1.** *Rappeler la définition, l'espérance et la variance de la loi de $X$.*

**2.** *On pose*

$$U = \min\{X, Y\} \qquad \textit{et} \qquad V = \max\{X, Y\}.$$

*Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?*

**3.** *Même question avec $U + V$ et $V - U$.*

**1.** Une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'espérance et la variance de $X$ sont égales au paramètre $\lambda$.

**2.** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$U(\omega) \geqslant k \iff X(\omega) \geqslant k \quad \text{et} \quad Y(\omega) \geqslant k$$

donc $[U \geqslant k] = [X \geqslant k] \cap [Y \geqslant k]$. Comme $X$ et $Y$ sont, par hypothèse, des variables aléatoires, les images réciproques $[X \geqslant k]$ et $[Y \geqslant k]$ sont des évènements et comme une tribu est stable par intersection,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad [U \geqslant k] \in \mathcal{A}.$$

❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $[U \geqslant k] = [U = k] \sqcup [U \geqslant k+1]$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad [U = k] = [U \geqslant k] \cap [U \geqslant k+1]^c \in \mathcal{A}$$

(puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection). On a ainsi démontré que $U$ était une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

❧ Comme $X$ et $Y$ sont supposées indépendantes et de même loi,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(U \geqslant k) = \big[\mathbf{P}(X \geqslant k)\big]^2 > 0.$$

❧ On peut montrer de manière analogue que $V$ est une variable aléatoire discrète et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(V \leqslant k) = \big[\mathbf{P}(X \leqslant k)\big]^2 > 0.$$

❧ Par définition, l'évènement $[U > V]$ est impossible et comme $[U \geqslant 2] \cap [V \leqslant 1] \subset [U > V]$, on a

$$\mathbf{P}(U \geqslant 2, V \leqslant 1) = 0 < \mathbf{P}(U \geqslant 2)\,\mathbf{P}(V \leqslant 1),$$

ce qui prouve que les variables aléatoires $U$ et $V$ ne sont pas indépendantes.

**3.** On remarque tout d'abord que $U + V = X + Y$.

✍ *La somme de la plus grande et de la plus petite, c'est la somme des deux variables aléatoires !*

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes et suivent la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, alors $U + V$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(2\lambda)$.

❧ De manière analogue, $V - U = |X - Y|$.

✍ *La différence entre la plus grande et la plus petite, c'est la distance entre les deux variables aléatoires.*

❧ Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$[V - U = d] = [|X - Y| = d] = [X - Y = d] \sqcup [Y - X = d].$$

En décomposant dans les systèmes complets d'évènements $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ t et $([Y = k])_{k\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$[V - U = d] = \Big(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} [X = k + d, Y = k]\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} [X = k, Y = k + d]\Big).$$

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\mathbf{P}(V - U) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k + d)\,\mathbf{P}(X = k) > 0.$$

❧ Pour $d = 0$, la situation est un peu différente :

$$[V - U] = [X = Y] = \bigsqcup k \in \mathbb{N}[X = k, Y = k]$$

et donc

$$\mathbf{P}(V - U) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)^2 > 0.$$

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\,(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbf{P}(U + V = k)\,\mathbf{P}(V - U = \ell) > 0.$$

Cela étant,

$$[U + V = 0, V - U = 1] = [2U = -1] \cap [2V = 1] = \varnothing$$

car $U$ et $V$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc

$$\mathbf{P}(U + V = 0, V - U = 1) = 0 < \mathbf{P}(U + V = 0)\,\mathbf{P}(V - U = 1)$$

et les variables aléatoires $U + V$ et $V - U$ ne sont pas indépendantes.

✍ *Il fallait ici remarquer que la probabilité*

$$\mathbf{P}(U + V = k, V - U = \ell) = \mathbf{P}(2U = k - \ell, 2V = k + \ell)$$

*est nulle dès que les entiers $k$ et $\ell$ sont de parités différentes.*

*Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes et de même loi, d'espérance et de variance finies. On suppose en outre que $X + Y + 1$ suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (où $0 < p < 1$).*

**1.** *Déterminer l'espérance et la variance de $X$.*

**2.** *Déterminer la fonction génératrice de $X$.*

**3.** *En déduire la loi de $X$.*

**1.** Comme $X$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad 0 \leqslant X(\omega) \leqslant Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) + 1.$$

Comme $Z$ suit une loi géométrique, cette variable aléatoire admet un moment d'ordre deux et, par comparaison, $X$ admet aussi un moment d'ordre deux. En particulier, $X$ est une variable aléatoire d'espérance finie.

Comme $X$ et $Y$ ont même loi, $Y$ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et de variance finie.

❧ Par linéarité de l'espérance et par indépendance des variables aléatoires $X$ et $Y$,

$$\frac{1}{p} = \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{q}{p^2} = \mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Comme $X$ et $Y$ ont même loi, on en déduit que

$$\frac{1}{p} = 2\,\mathbf{E}(X) + 1 \quad \text{et que} \quad \frac{q}{p^2} = 2\,\mathbf{V}(X).$$

Donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{q}{2p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}.$$

**2.** Comme $Z$ suit la loi géométriqie de paramètre $p$, on sait que

$$G_Z(t) = \frac{pt}{1 - qt}.$$

Comme $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X . t^Y . t) = t\big[\mathbf{E}(t^X)\big]^2.$$

Ainsi,

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1 - qt}} = \sqrt{p} \cdot (1 - qt)^{-1/2}.$$

✍ *Sur $[0, 1]$, la fonction génératrice $G_X(t)$ est positive en tant que somme de termes positifs.*

❧ *D'autre part, le rayon de convergence de cette série entière est égal à $^1/_q$.*

**3.** On reconnaît une série entière bien connue et on en déduit, après quelques simplifications tout aussi connues, que

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{p}\Big(\frac{q}{4}\Big)^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

L'égalité ayant lieu sur un intervalle de longueur strictement positive, on en déduit (Unicité du développement en série entière) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \sqrt{p}\Big(\frac{q}{4}\Big)^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

*Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que la variable aléatoire $X_k$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_k)$ et que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1+\cdots+p_n}{n} = p \in [0,1].$$

*On étudie ici la* ***moyenne empirique***

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

**1.** *Déterminer l'espérance de $M_n$.*

**2.** *Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbf{V}(M_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.*

**3.** *Soit $\varepsilon > 0$.*

**3. a.** *Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

**3. b.** *En déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

**1.** Les variables aléatoires $X_k$ sont des variables aléatoires d'espérance finie, donc $M_n$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$$

par linéarité de l'espérance.

✍ *On doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli est égale au paramètre de la loi.*

**2.** Les variables aléatoires $X_k$ sont des variables aléatoires de variance finie, donc $M_n$ est une variable aléatoire de variance finie et, par indépendance des $X_k$,

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k).$$

✍ *Toute variable aléatoire bornée (ou presque sûrement bornée) admet des moments de tout ordre : c'est donc une variable aléatoire d'espérance finie et une variable aléatoire de variance finie.*

❧ On sait bien que $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \mathbf{V}(M_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4} = \frac{1}{4n}.$$

Par encadrement, la variance de $M_n$ tend vers $0$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

✍ *On a ainsi démontré que l'espérance de $M_n$ (= la valeur moyenne des observations réalisées) tendait vers le paramètre $p$ cependant que la variance de $M_n$ (= la dispersion de ces valeurs) tendait vers $0$. On dit que $M_n$ est un* ***estimateur convergent*** *de $p$.*

**3. a.** Comme $M_n$ est une variable aléatoire de variance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}\big(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\big) \leqslant \frac{4\,\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$$

et comme $\mathbf{V}(M_n)$ tend vers $0$, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

**3. b.** La suite de terme général $\mathbf{E}(M_n)$ converge vers $p$. Comme $\varepsilon/2 > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad |M_n - p| \leqslant \varepsilon/2.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\big||M_n(\omega) - p| - |\mathbf{E}(M_n) - p|\big| \leqslant |M_n(\omega) - \mathbf{E}(M_n)|.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant N$, si $|M_n(\omega) - p| \geqslant \varepsilon$, alors

$$|M_n(\omega) - p| - |\mathbf{E}(M_n) - p| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

et par conséquent

$$|M_n(\omega) - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2.$$

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \big[|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\big].$$

En conséquence, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \mathbf{P}\big(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathbf{P}\big(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\big) \leqslant \frac{4\,\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

On en déduit (Théorème d'encadrement) que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\big(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

**1.** *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a$ et $b$ pour que la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$$

*soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*
*Soient $X$ et $Y$, deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on considère la variable aléatoire matricielle*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}.$$

.

**2.** *On suppose que $X$ (resp. $Y$) suit la loi géométrique de paramètre $p_1 > 0$ (resp. de paramètre $p_2 > 0$).*

**2. a.** *Calculer $\mathbf{P}(Y > n)$ en fonction de $n$.*

**2. b.** *Quelle est la probabilité pour que $M$ soit diagonalisable ?*

**3.** *On suppose que $X$ et $Y$ suivent la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$. Quelle est la probabilité pour que $M$ soit diagonalisable ?*

**1.** Le polynôme caractéristique de $M$ est égal à $X^2 - 2bX + a^2$ et le discriminant réduit de ce polynôme est $b^2 - a^2$.

Si $b^2 > a^2$, alors $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc $M$ est diagonalisable.

Si $b^2 < a^2$, alors le polynôme caractéristique de $M$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc $M$ n'est même pas trigonalisable.

Si $b = \pm a$, alors $M$ est proportionnelle à

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ou à} \qquad M_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices n'ont qu'une seule valeur propre ($1$ pour $M_{1,1}$ et $-1$ pour $M_{1,-1}$) et elles ne sont pas diagonales, donc elles ne sont pas diagonalisables.

Finalement, la matrice $M$ est diagonalisable si, et seulement si, $|b| > |a|$.

**2. a.** Calcul classique avec la $\sigma$-additivité de $\mathbf{P}$ :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(Y > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = q_2^n.$$

**2. b.** Comme $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires à valeurs positives, la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable si, et seulement si, $Y(\omega) > X(\omega)$ et on cherche donc à calculer $\mathbf{P}(Y > X)$.

❧ On décompose l'évènement $[Y > X]$ sur le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète $X$ :

$$[Y > X] = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} [Y > n] \cap [X = n]$$

et, par $\sigma$-additivité à nouveau,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n, X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n)\,\mathbf{P}(X = n)$$

puisque $X$ et $Y$ sont supposées indépendantes. D'après le calcul précédent,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_2^n q_1^{n-1} p_1 = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}.$$

**3.** La loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$ est symétrique : $X$ et $n - X$ ont même loi et comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, les deux couples $(X, Y)$ et $(n - X, n - Y)$ ont même loi.

✍ *Dans un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire binomiale $X$ compte le nombre de succès et $n - X$ compte donc le nombre d'échecs. Comme le second paramètre $p$ est égal à $1/2$, échecs et succès se produisent avec la même probabilité, ce qui explique la symétrie de $\mathscr{B}(n, 1/2)$.*

En particulier, comme $[Y > X] = [n - X > n - Y]$,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \mathbf{P}(n - X > n - Y) = \mathbf{P}(X > Y)$$

et comme $([X = Y], [X > Y], [X < Y])$ est un système complet d'évènements,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \frac{1 - \mathbf{P}(X = Y)}{2}.$$

❧ En décomposant l'évènement $[X = Y]$ dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète $X$, on obtient

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)^2$$

par indépendance de $X$ et de $Y$.

Donc

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

d'après la (bien connue) identité de Vandermonde et finalement, la probabilité pour que la matrice $M$ soit diagonalisable est égale à

$$\frac{4^n - \binom{2n}{n}}{2.4^n}.$$

✍ *On peut déduire de la formule de Stirling que $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc il y à peine moins d'une chance sur deux pour que la matrice $M$ soit diagonalisable.*

# rms135-485

*Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, deux listes de réels. On considère l'application*

$$f : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$$

*définie par*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}.$$

*Démontrer que $f$ atteint un maximum et un minimum. Expliciter ces deux extrema.*

Comme le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est un ensemble *fini*, la fonction $f$ prend un nombre *fini* de valeurs réelles : elle atteint donc un maximum et un minimum.

✍ *En passant un concours, un candidat a eu des notes variées $a_1, \dots, a_n$. Imaginons que les coefficients imposés soient $b_1, \dots, b_n$ mais que le candidat puisse choisir d'affecter arbitrairement ces coefficients aux notes qu'il a reçues... C'est en pondérant les meilleures notes avec les plus forts coefficients et les pires notes avec les plus faibles coefficients qu'il aura la meilleure moyenne générale.*

*L'exercice est terminé !*

❧ Pour simplifier la démonstration, nous allons supposer que les réels $a_k$ sont déjà rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall\, 1 \leqslant k < d, \qquad a_k \leqslant a_{k+1}.$$

❧ Considérons quatre réels $x_1 \leqslant x_2$ et $y_1 \leqslant y_2$. Le produit

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_2 y_2 + x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1$$

est clairement positif, donc

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \geqslant x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

❧ Considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et, pour deux entiers $k \neq \ell$, la transposition $\tau = \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\tau \circ \sigma) - f(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(\sigma(i))} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} b_{\tau(j)} - a_{\sigma^{-1}(j)} b_j \\
&= a_{\sigma^{-1}(k)}(b_{\tau(k)} - b_k) + a_{\sigma^{-1}(\ell)}(b_{\tau(\ell)} - b_\ell)) \\
&= (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)})(b_\ell - b_k).
\end{aligned}$$

La valeur $f(\sigma)$ est donc maximale si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)})(b_\ell - b_k) \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad (a_k - a_\ell)(b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)}) \geqslant 0.$$

Par hypothèse, les $a_k$ sont rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \qquad a_k \leqslant a_\ell,$$

donc la valeur $f(\sigma)$ est maximale si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \qquad b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)} \geqslant 0$$

c'est-à-dire si les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre croissant :

$$b_{\sigma(1)} \leqslant b_{\sigma(2)} \leqslant \cdots \leqslant b_{\sigma(k)} \leqslant b_{\sigma(k+1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{\sigma(n)}.$$

❧ Par symétrie, la valeur $f(\sigma)$ est minimale si, et seulement si, les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre décroissant :

$$b_{\sigma(1)} \geqslant b_{\sigma(2)} \geqslant \cdots \geqslant b_{\sigma(k)} \geqslant b_{\sigma(k+1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{\sigma(n)}.$$

*On note $\varphi$, l'indicatrice d'Euler.*

**1.** *Calculer $\varphi(7)$ et $\varphi(37044)$.*

**2.** *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) \geqslant \frac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}.$$

**1.** Comme 7 est premier, $\varphi(7) = 7 - 1 = 6$.

❧ On trouve $37044 = 2^2.3^3.7^3$. Comme 2, 3 et 7 sont deux à deux premiers entre eux,

$$\varphi(37044) = \varphi(2^2)\varphi(3^3)\varphi(7^3) = 2\varphi(2).3^2\varphi(3).7^2\varphi(7) = 2.(3^2.2).(7^2.2.3) = 2^3.3^3.7^2 = 10584.$$

**2.** D'après le cours, il s'agit de vérifier que

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{n}{1 + \lg n}$$

où lg désigne le logarithme en base 2.

*Deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier $n \geqslant ab$, il existe deux entiers naturels $u$ et $v$ tels que*

$$au + bv = n.$$

✍ *Pour apprécier l'exercice, il faut le comparer à la caractérisation de Bézout des entiers premiers entre eux : deux entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier* relatif $n$*, il existe deux entiers* relatifs $u$ *et* $v$ *tels que*

$$au + bv = n.$$

❧ Choisissons un entier $n \geqslant ab$. Par hypothèse, il existe des entiers naturels $u_0$, $v_0$, $u_1$ et $v_1$ tels que

$$au_0 + bv_0 = n \qquad \text{et} \qquad au_1 + bv_1 = (n+1).$$

Par différence, il existe deux entiers relatifs $u = u_1 - u_0$ et $v = v_1 - v_0$ tels que

$$au + bv = 1$$

et par conséquent $u$ et $v$ sont premiers entre eux.

❧ Réciproquement, supposons que $a$ et $b$ soient premiers entre eux et considérons un entier $n \geqslant ab$.

D'après la caractérisation de Bézout, il existe deux entiers *relatifs* $u_0$ et $v_0$ tels que

$$au_0 + bv_0 = n. \tag{$\star$}$$

Comme $a$, $b$ et $n$ sont des entiers *naturels* non nuls, on ne peut pas avoir $u_0 \leqslant 0$ et $v_0 \leqslant 0$.

Supposons donc que $u_0 > 0$ et $v_0 < 0$. D'après ($\star$), pour tout entier naturel $k$,

$$a(u_0 - kb) + b(v_0 + ka) = n.$$

Choisissons en particulier l'entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_0 + ka < a$.

✍ *Comme $a \geqslant 1$, cette contrainte sur $k$ peut aussi s'écrire sous la forme*

$$\frac{-v_0}{a} \leqslant k < \frac{-v_0}{a} + 1,$$

*ce qui nous donne $k = \lceil {}^{-v_0}/_{a} \rceil$ (**partie entière supérieure**) et cet entier est bien un entier* naturel *puisque $v_0 < 0$.*

On a donc

$$a(u_0 - kb) = au_0 - kab \overset{(\star)}{=} (n - bv) - kab = n - (v_0 + ka)b.$$

Par choix de $k$, le facteur $(v_0 + ka)$ est strictement inférieur à $a$, donc le produit $(v_0 + ka)b$ est strictement inférieur à $ab$ et par conséquent $a(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. Comme $a$ est un entier naturel non nul, on en déduit que $(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. En posant

$$u = u_0 - kb \qquad \text{et} \qquad v = v_0 + ka,$$

on a donc deux entiers <u>naturels</u> $u$ et $v$ tels que $au + bv = n$.

✍ *Une démonstration analogue est possible dans l'autre cas à étudier : $u_0 < 0$ et $v_0 > 0$.*

## rms135-488

*Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$F_n = 2^{2^n}.$$

**1.** *Calculer* $F_0$ *et démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

**2.** *On suppose que* $m$ *et* $n$ *sont deux entiers naturels distincts. Démontrer que*

$$F_m \wedge F_n = 1.$$

**3.** *En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.*

**1.** Il est clair que $F_0 = 2^1 + 1 = 3$ et que $F_1 = 2^2 + 1 = 5$. On a donc

$$F_1 = 2 + F_0.$$

✍ *Par convention, un produit indexé par* $0 \leqslant k \leqslant -1$ *est égal à* $1$*, donc la relation demandée est vraie aussi pour* $n = 0$.

Supposons que la formule demandée soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$F_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} = 2^{2.2^n} = (2^{2^n})^2 = (F_n - 1)^2.$$

On en déduit que

$$F_{n+1} = 1 + (F_n - 1)^2 \overset{\text{HR}}{=} 1 + \left(1 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k\right)^2 = 2 + 2\prod_{k=1}^{n-1} F_k + \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right)^2 = 2 + \left(\prod_{k=1}^{n-1} F_k\right)\left(2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k\right)$$

$$\overset{\text{HR}}{=} 2 + \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n} F_k$$

et la formule est établie par récurrence.

**2.** Soient $0 \leqslant m < n$. On a donc $0 \leqslant m \leqslant n-1$ et, d'après la question précédente,

$$F_n - \left(\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq m}} F_k\right) F_m = 2.$$

On déduit du Théorème de Bézout que le pgcd $F_m \wedge F_n$ divise $2$, alors que ce pgcd est impair.

✍ *La relation de Bézout nous assure que le pgcd* $d = a \wedge b$ *divise tous les entiers de la forme* $au + bv$*, quel que soit* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

❧ *Les deux entiers* $F_m$ *et* $F_n$ *sont impairs, donc aucun des deux n'est divisible par 2 et leur pgcd est donc impair.*

On a donc bien démontré que

$$\forall\, 0 \leqslant m < n, \qquad F_m \wedge F_n = 1.$$

**3.** On a démontré que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était une famille infinie d'entiers deux à deux premiers entre eux.

❧ Supposons qu'il n'existe qu'un nombre *fini* de nombres premiers : $p_1, \ldots, p_d$. Chaque entier admet une, et une seule, décomposition en produit de facteurs premiers, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, (\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,d}) \in \mathbb{N}^d, \qquad n = \prod_{k=1}^{d} p_k^{\alpha_{n,k}}.$$

Si deux entiers $m$ et $n$ sont premiers entre eux, chaque facteur premier $p_k$ apparaît au plus une fois avec une valuation non nulle dans la décomposition de ces deux entiers :

$$\forall\, m \neq n,\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \alpha_{m,k}\alpha_{n,k} = 0.$$

Par conséquent, une famille d'entiers deux à deux premiers entre eux contient au plus $d$ entiers distincts.

❧ On a démontré par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est cyclique, donc tout sous-groupe est lui même cyclique.

Pour tout entier $0 \leqslant k < n$, il s'agit donc d'identifier le sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par la classe $\mathscr{C}(k)$.

Soit $d$, le pgcd de $k$ et $n$ : la classe $\mathscr{C}(d)$ appartient au sous-groupe engendré par la classe $\mathscr{C}(k)$ et c'est même un générateur de ce sous-groupe.

Le pgcd $d = k \wedge n$ est un diviseur de $n$ et, réciproquement, tout diviseur de $n$ est le pgcd de $n$ et d'un entier $0 \leqslant k < n$.

✍ *Si $1 \leqslant d < n$ est un diviseur de $n$, alors $d = d \wedge n$.*
*Il reste le cas particulier $d = n$, qui est aussi un diviseur de $n$ : dans ce cas, $n = 0 \wedge n$.*

Par conséquent, les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijection avec les diviseurs de $n$.

# rms135-490

*Soit* $(G, *)$*, un groupe fini d'élément neutre* $e$*. On suppose que*

$$\forall\, x \in G, \qquad x^2 = e.$$

**1.** *Démontrer que le groupe* $(G, *)$ *est abélien.*

**2.** *Soient* $H$*, un sous-groupe strict de* $G$ *et* $a \in G \setminus H$*. On pose*

$$aH = \{a * x,\ x \in H\}.$$

**2. a.** *Démontrer que les ensembles* $H$ *et* $aH$ *ont même cardinal.*

**2. b.** *Démontrer que* $H$ *et* $aH$ *sont disjoints.*

**2. c.** *Démontrer que* $H \cup aH$ *est un sous-groupe de* $G$*.*

**3.** *Démontrer que le cardinal de* $G$ *est une puissance de* $2$*.*

**4.** *Calculer le produit des éléments de* $G$*.*

**1.** Soient $g$ et $h$, deux éléments de $G$. Dans tout groupe, on sait que

$$(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}.$$

Or, par hypothèse, $x^{-1} = x$ pour tout $x \in G$. En appliquant cette propriété à $g$, à $h$ ainsi qu'à $(g * h)$, on obtient

$$g * h = (g * h)^{-1} = h * g.$$

Le groupe $(G, *)$ est donc commutatif.

**2. a.** Comme $a$ admet un symétrique dans $G$, l'application $\varphi_a = [x \mapsto a * x]$ est une bijection de $G$ dans $G$ et cette bijection est même une involution :

$$\forall\, x \in G, \qquad \varphi_a\big(\varphi_a(x)\big) = a * (a * x) = a^2 * x = x.$$

✍ *Une **involution** est une bijection* $f : G \to G$ *qui est sa propre réciproque :*

$$\forall\, x \in G, \quad f^{-1}(x) = f(x) \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \forall\, x \in G, \quad f\big(f(x)\big) = x.$$

*Par exemple, toute symétrie centrale ou axiale est une involution.*

L'application $\varphi_a$ est donc injective.

❧ Par définition de $aH$, l'application $\varphi_a$ induit une application surjective de $H$ sur $aH$ et comme $\varphi_a$ est injective, l'application induite est une bijection de $H$ sur $aH$.

❧ En particulier, les ensembles $H$ et $aH$ ont même cardinal.

**2. b.** Si $x \in H \cap aH$, alors il existe deux éléments $h_1$ et $h_2$ de $H$ tels que

$$x = h_1 = a * h_2.$$

On en déduit en multipliant à droite par $h_2^{-1}$ que

$$H \ni h_1 * h_2^{-1} = a \notin H$$

puisque $H$ est un sous-groupe de $(G, *)$. C'est absurde, donc l'intersection $H \cap aH$ est vide.

✍ *En particulier, l'ensemble* $aH$ *ne contient pas l'élément neutre* $e$ *(qui appartient au sous-groupe* $H$*), donc* $aH$ *n'est pas un sous-groupe de* $(G, *)$*.*

**2. c.** Il est clair que l'union $H \cup aH$ est contenue dans $G$.

❧ Comme $H$ est un sous-groupe de $(G, *)$, on sait que

$$e \in H \subset H \cup aH.$$

❧ Soient $x$ et $y$ dans $H \cup aH$. Il faut démontrer que $x * y^{-1} \in H \cup aH$ et quatre cas se présentent. Il existe deux éléments $h_1$ et $h_2$ de $H$ tels que :

— $x = h_1$ et $y = h_2$, donc $x * y^{-1} = h_1 * h_2^{-1} \in H$ puisque $H$ est un sous-groupe ;

— $x = a * h_1$ et $y = h_2$, donc $x * y^{-1} = a * (h_1 * h_2^{-1}) \in aH$ puisque $H$ est un sous-groupe ;
— $x = h_1$ et $y = ah_2$, donc $x * y^{-1} = h_1 * (h_2^{-1} * a^{-1}) = a * (h_1 * h_2)$ puisque $(G, *)$ est un groupe commutatif où tout élément est son propre symétrique et comme $H$ est un sous-groupe, le produit $h_1 * h_2$ appartient à $H$ et $x * y^{-1} \in aH$ ;
— $x = a * h_1$ et $y = a * h_2$, donc

$$x * y^{-1} = a * h_1 * h_2^{-1} * a^{-1} = a^2 * h_1 * h_2 = h_1 * h_2 \in H$$

pour les mêmes raisons.

Dans tous les cas, on a démontré que $x * y^{-1} \in H \cup aH$.

On a ainsi démontré que $H \cup aH$ était un sous-groupe de $(G, *)$.

**3.** On procède par récurrence.

❧ L'ensemble $H_0 = \{e\}$ est un sous-groupe de $(G, *)$ de cardinal $1 = 2^0$.

❧ HR : On suppose connu un sous-groupe $H_n$ de $(G, *)$ de cardinal $2^n$.

❧ Deux cas se présentent.

— Si $H_n = G$, alors le cardinal de $G$ est une puissance de 2.
— Sinon, $H_n$ est un sous-groupe strict de $G$ et il existe donc $a_{n+1} \in G \setminus H_n$. D'après la question précédente, l'ensemble

$$H_{n+1} = H_n \cup a_{n+1} H_n$$

est un sous-groupe de $(G, *)$ et

$$\#(H_{n+1}) = \#(H_n) + \#(a_{n+1} H_n) = 2\#(H_n) = 2^{n+1}.$$

❧ Comme $G$ est un ensemble fini, que $\#(H_n) = 2^n$ pour tout entier $n$ tel que $H_n$ soit défini et que la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $N$ tel que $H_N$ soit défini mais que $H_{N+1}$ ne soit pas défini.

On en déduit alors que $G = H_N$ et donc que $\#(G) = 2^N$.

✍ *Exemples avec $\#(G) = 2$ : $\{\pm 1\}$ en tant que sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ ou $\{\pm I_2\}$ en tant que sous-groupe du groupe $\big(SO_2(\mathbb{R}), \times\big)$ des rotations planes.*

*Exemples avec $\#(G) = 4$ :*

$$\left\{ I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*en tant que sous-groupe du groupe $\big(SO_3(\mathbb{R}), \times\big)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ ou le sous-groupe*

$$V_4 = \{I, (\ 1\ \ 2\ ), (\ 3\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ )\}$$

*en tant que sous-groupe du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.*

**4.** Comme l'opération $*$ est associative et commutative, on peut définir le produit des éléments de $G$ sans qu'il soit nécessaire de préciser la position des différents facteurs (commutativité), ni la position des parenthèses qui détermine l'ordre chronologique des opérations (associativité).

❧ Puisque $H_{n+1} = H_n \cup a_n H_n$ et que $H_n$ et $a_n H_n$ sont disjoints,

$$\prod_{x \in H_{n+1}} x = \Big(\prod_{y \in H_n} y\Big) * \Big(\prod_{z \in a_n H_n} z\Big) = \Big(\prod_{y \in H_n} y\Big) * \Big(\prod_{y \in H_n} (a_n * y)\Big).$$

Comme le groupe $(G, *)$ est abélien et que $y^2 = e$ pour tout $y \in G$,

$$\prod_{x \in H_{n+1}} x = a_n^{\#(H_n)} * \Big(\prod_{y \in H_n} y^2\Big) = a_n^{\#(H_n)} = a_n^{2^n}.$$

❧ Si $G = H_0 = \{e\}$, alors le produit des éléments de $G$ est égal à $e$ !

Si $G = H_1$, alors $G = \{e, a_1\}$ avec $a_1 \neq e$ et le produit des éléments de $G$ est égal à $a_1$.

Si $G = H_{n+1}$ avec $n \geqslant 1$, alors $2^n$ est un entier *pair*, donc $a_n^{2^n} = e$ et le produit des éléments de $G$ est égal à $e$.

*Soit $(G, \cdot)$, un groupe abélien. On considère deux éléments $x$ et $y$ de $G$ en supposant que l'ordre $a \in \mathbb{N}^*$ de $x$ et l'ordre $b \in \mathbb{N}^*$ de $y$ sont premiers entre eux.*

**1.** *Démontrer que l'ordre de $xy$ est égal à $ab$.*

**2.** *Démontrer que le sous-groupe $\langle xy \rangle$ engendré par le produit $xy$ est l'ensemble*

$$H = \{x^m \cdot y^n,\ 0 \leqslant m < a, 0 \leqslant n < b\}.$$

**1.** Comme le groupe est commutatif,

$$(xy)^{ab} = x^{ab} \cdot y^{ab} = (x^a)^b \cdot (y^b)^a = e^b \cdot e^a = e.$$

Par conséquent, l'ordre de $xy$ divise l'entier $ab \in \mathbb{N}^*$.

❧ Réciproquement, supposons qu'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ vérifie $(xy)^m = e$. On en déduit que $x^m \cdot y^m = e$ (puisque le groupe est commutatif) et donc que $x^m = y^{-m}$ ou, ce qui revient au même $x^{-m} = y^m$.

On a donc

$$y^{am} = (y^m)^a = (x^{-m})^a = (x^a)^{-m} = e^{-m} = e,$$

ce qui prouve que l'ordre $b$ de $y$ divise l'exposant $am$.

✍ *L'ensemble des exposants $k \in \mathbb{Z}$ tels que $y^k = e$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et, par définition, l'ordre $b$ de $y$ est l'unique générateur positif de ce sous-groupe.*

*Par conséquent,*

— *$y^k = e$ si, et seulement si, l'ordre $b$ divise l'exposant $k$ ;*

— *l'ordre $b$ de $y$ est le plus petit entier strictement positif $k$ tel que $y^k = e$.*

Par hypothèse, $a$ et $b$ sont premiers entre eux, donc $b$ divise $m$ (Théorème de Gauss) et donc $y^m = e$.

Par symétrie, $a$ divise $m$ et $x^m = e$.

On a ainsi démontré que $m$ était divisible par $a$ et par $b$, donc divisible par $ab$ (puisque $a$ et $b$ sont premiers entre eux).

**2.** D'après la question précédente,

$$H = \{(xy)^k,\ 0 \leqslant k < ab\}.$$

✍ *D'après le cours sur l'ordre d'un élément, les puissances $(xy)^k$ sont deux à deux distinctes lorsque l'exposant $k$ parcourt $[\![0, ab[\![$.*

*On a démontré plus haut que : si $(xy)^m = e$, alors $x^m = y^m = e$ et $m$ est un multiple de $a$ et de $b$. On pourrait démontrer de la même manière que : si $x^m \cdot y^n = e$, alors $x^m = y^n = e$, $m$ est un multiple de $a$ et $n$ est un multiple de $b$.*

*On en déduit facilement que les produits $x^m \cdot y^n$ sont deux à deux distincts lorsque le couple $(m, n)$ parcourt $[\![0, a[\![ \times [\![0, b[\![$.*

❧ Soit $0 \leqslant k < ab$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on peut effectuer les divisions euclidiennes de $k$ par $a$ et par $b$. Il existe donc des entiers $q_a$, $q_b$, $r_a$ et $r_b$ tels que

$$k = aq_a + r_a = bq_b + r_b \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r_a < a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_b < b.$$

Alors, comme le groupe est commutatif et que $x^a = y^b = e$,

$$(xy)^k = x^k y^k = (x^a)^{q_a} \cdot x^{r_a} \cdot (y^b)^{r_b} \cdot y^{r_b} = x^{r_a} \cdot y^{r_b}.$$

❧ Réciproquement, soient deux entiers $0 \leqslant m < a$ et $0 \leqslant n < b$. Comme $a$ et $b$ sont premiers entre eux, on déduit du Lemme chinois qu'il existe un (unique) entier $0 \leqslant p < ab$ tel que

$$p \equiv m \pmod{a} \qquad \text{et} \qquad p \equiv n \pmod{b}.$$

Il existe donc deux entiers relatifs $k_a$ et $k_b$ tels que

$$p = ak_a + m = bk_b + n$$

et on en déduit que

$$x^m \cdot y^n = e \cdot x^m \cdot e \cdot y^n = (x^a)^{k_a} \cdot x^m \cdot (y^b)^{k_b} \cdot y^n = x^{ak_a+m} \cdot y^{bk_b+n} = (xy)^p \in H.$$

❧ On a ainsi démontré l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

*Soit* $G$*, un ensemble muni d'une loi de composition interne associative* $*$*. On suppose qu'il existe un élément* $e \in G$ *tel que*

$$\forall\, x \in G, \quad x * e = x$$

*et que*

$$\forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \quad x * x' = e.$$

*Démontrer que* $(G, *)$ *est un groupe.*

✍ *Il faut bien connaître les axiomes des groupes pour savoir ce qu'il convient de démontrer ! Il suffit de vérifier que l'élément* $e$ *donné par l'énoncé vérifie en fait les propriétés suivantes.*

$$\forall\, x \in G, \quad x * e = e * x = x \qquad \textit{et} \qquad \forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \quad x' * x = x * x' = e.$$

Considérons l'élément $e$ donné par l'énoncé et choisissons un élément $x \in G$. D'après l'énoncé, il existe un élément $x' \in G$ tel que $x * x' = e$ et $x * e = x$. Toujours d'après l'énoncé, $x' * e = x'$.

❧ Considérons alors l'élément $x' * x \in G$. Par hypothèse, il existe un élément de $G$, que nous noterons $(x' * x)'$, tel que $(x' * x) * (x' * x)' = e$.

❧ Par associativité de $*$, on déduit des relations précédentes que

$$x' = x' * e = x' * (x * x') = (x' * x) * x'$$

et donc (en multipliant à droite par $x$) que

$$x' * x = [(x' * x) * x'] * x = (x' * x) * (x' * x).$$

En multipliant à droite par l'élément $(x' * x)'$ introduit ci-dessus, on en déduit que

$$\begin{aligned} e &= (x' * x) * (x' * x)' \\ &= [(x' * x) * (x' * x)] * (x' * x)' = (x' * x) * [(x' * x) * (x' * x)'] = (x' * x) * e \\ &= (x' * x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \qquad x' * x = x * x' = e.$$

❧ Par conséquent, pour tout $x \in G$, il existe un élément $x' \in G$ tel que

$$e * x = (x * x') * x = x * (x' * x) = x * e = x$$

et nous avons enfin démontré que $(G, *)$ était bien un groupe.

**1.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \quad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

**2.** *Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos a\pi \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $2\cos a\pi$ est en fait un entier relatif.*

**1.** L'ensemble V des valeurs prises par l'expression $x + {}^1\!/\!_x$ lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}^*$ est un ensemble infini. Par conséquent, si deux polynômes P et Q vérifient $P(y) = Q(y)$ pour tout $y \in V$, alors $P = Q$.

✍ *Une étude rapide montre que* $V = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

Il existe donc **au plus un** polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

❧ Il est clair que les polynômes $P_0 = 2$ et $P_1 = X$ conviennent.
Il n'est pas plus difficile de remarquer que $P_2 = X^2 - 2$ convient :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \qquad \Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 = \Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) + 2.$$

HR : Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, il existe deux polynômes $P_n$ et $P_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \qquad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n} \quad \text{et} \quad P_{n-1}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = \Big(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\Big) + \Big(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\Big)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on en déduit que le polynôme $P_{n+1}$ défini par

$$P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$$

convient.

L'existence des polynômes $P_n$ est ainsi démontrée par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *L'unicité des polynômes $P_n$ prouve que ces polynômes vérifient* nécessairement *la relation de récurrence*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

*(Sans l'unicité, cette relation n'est qu'une condition suffisante pour trouver des polynômes convenables.)*

*On déduit alors de cette relation (au moyen d'une nouvelle démonstration par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n$ est un polynôme unitaire de degré $n$.*

**2.** Comme $a \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = {}^n\!/\!_q$ et (formules de Moivre-Euler)

$$2\cos a\pi = e^{ia\pi} + e^{-ia\pi} = e^{ia\pi} + \frac{1}{e^{ia\pi}}.$$

Par construction du polynôme $P_{2q}$,

$$P_{2q}(2\cos a\pi) = (e^{ia\pi})^{2q} + \frac{1}{(e^{ia\pi})^{2q}} = e^{2in\pi} + e^{-2in\pi} = 2.$$

Ainsi, le réel $2\cos a\pi$ est un nombre rationnel qui est une racine du polynôme $P_{2q} - 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

Il existe donc deux entiers $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$, *premiers entre eux*, et des entiers $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1}$ tels que

$$2\cos a\pi = \frac{u}{v} \quad \text{et} \quad \Big(\frac{u}{v}\Big)^d + \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k \Big(\frac{u}{v}\Big)^k = 0.$$

✍ *Le polynôme $P_{2q}$ est unitaire, détail capital !*

En multipliant par $v^d$, on en déduit que

$$u^d = -\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k} = -v\Big(\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k-1}\Big).$$

Cette factorisation est licite dans $\mathbb{Z}$ : pour $0 \leqslant k < d$, la différence $(d-k)$ est un entier naturel non nul, donc $(d-k-1) \in \mathbb{N}$. Comme les $\beta_k$ et $u$ sont des entiers relatifs, on en déduit que le second membre est un entier multiple de $v$ et donc que $v$ est un diviseur de $u^d$.

Par construction, on a choisi $u$ et $v$ premiers entre eux, donc $v$ est premier à $u^d$.

On a ainsi démontré que $v = 1$ et donc que $2\cos a\pi = {}^u\!/_1 = u \in \mathbb{Z}$.

✍ *En tant que réel, il est clair que $2\cos a\pi \in [-2, 2]$, donc*

$$\cos a\pi \in \{-1, \quad -1/2, \quad 0, \quad 1/2, \quad 1\}.$$

*Par conséquent, les rationnels $a$ tels que $\cos a\pi$ soient rationnels sont $0$, $1/3$, $1/2$, $2/3$ et $1$ (et tous ceux qui s'en déduisent grâce aux symétries de la fonction $\cos$).*

> *Soit $f$, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = \omega$. On suppose que $F$ est un plan vectoriel stable par $f$.*
> *Démontrer que* $\operatorname{Im} f \subset F$.

Comme $f^2$ est l'endomorphisme nul, l'image de $f$ est contenue dans son noyau :

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et en particulier} \quad \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f.$$

Comme $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Par conséquent, $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 1$.

❧ Si $\dim \operatorname{Im} f = 0$, alors $\operatorname{Im} f = \{0\} \subset F$.

❧ Supposons donc que $\dim \operatorname{Im} f = 1$. D'après le Théorème du rang, le noyau de $f$ est un plan et on considère un plan $F$ stable par $f$ :

$$\forall\, x \in F, \qquad f(x) \in F.$$

Deux cas se présentent :

— S'il existe un vecteur $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0)$ est un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} f$ et comme $f(x_0) \in F$ et que $F$ est un sous-espace,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \cdot f(x_0) \subset F.$$

— Sinon, $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$, donc $F \subset \operatorname{Ker} f$ et comme ces deux sous-espaces sont des plans, on a donc $F = \operatorname{Ker} f$ et finalement

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f = F.$$

On a démontré que, dans tous les cas, l'image de $f$ était contenue dans le plan stable $F$.

> **1.** *Soit $\varphi$, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$
> **2.** *En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.*

**1.**

✍ *Rappelons pour commencer que si*
$$B = (b_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \qquad \textit{et} \qquad M = (m_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n},$$
*alors*
$$\operatorname{tr}(B^\top.M) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{k,\ell}.m_{k,\ell}.$$

❧ Notons $(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(E^*_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, sa base duale. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,
$$M = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} E^*_{k,\ell}(M)E_{k,\ell}$$
et pour toute forme linéaire $\varphi$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \varphi(E_{k,\ell})E^*_{k,\ell}(M).$$
En posant
$$A = \big(\varphi(E_{k,\ell})\big)^\top_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$
on en déduit que
$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \operatorname{tr}(A.M).$$

✍ *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut invoquer le Théorème de Riesz (représentation d'une forme linéaire sur un espace euclidien au moyen du produit scalaire).*

**2.** Soit $H$, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire non identiquement nulle $\varphi$ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ et, d'après la question précédente, il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que
$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad M \in H \iff \operatorname{tr}(AM) = 0.$$

✍ *Remarquons que, pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, il existe une matrice $J_r$ de rang $r$ et de trace nulle :*
$$\forall\, 1 \leqslant r < n, \qquad J_r = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et pour } r = n, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ On raisonne par l'absurde en supposant que l'hyperplan $H$ ne contient aucune matrice inversible :
$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{K}), \qquad \operatorname{tr}(AM) \neq 0.$$
Comme la matrice $A$ n'est pas la matrice nulle, son rang $r$ vérifie $1 \leqslant r \leqslant n$ et la matrice $A$ est équivalente à une matrice $J_r$ de rang $r$ et de trace nulle. Il existe donc deux matrices inversibles $Q$ et $P$ telles que
$$Q^{-1}AP = J_r.$$
On en déduit que
$$0 = \operatorname{tr}(J_r) = \operatorname{tr}(Q^{-1}AP) = \operatorname{tr}\big((AP)Q^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(A.(PQ^{-1})\big) \neq 0$$
et la contradiction est manifeste.

> *Soient* $\mathrm{E}$*, un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$*, une famille d'endomorphismes non identiquement nuls tels que*
> $$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i.$$
> *Démontrer que le rang de chaque endomorphisme* $p_i$ *est égal à* $1$ *et que*
> $$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i.$$

Comme $p_i$ n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, son rang est au moins égal à 1, donc la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

❧ Pour démontrer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{et que} \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i \in \operatorname{Im} p_i.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0_{\mathrm{E}} = p_j(0_{\mathrm{E}}) = p_j\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_j(x_i)$$

Par hypothèse, les endomorphismes $p_i$ sont des projecteurs :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad p_i \circ p_i = \delta_{i,i} \cdot p_i = p_i.$$

Par conséquent, comme $x_i \in \operatorname{Im} p_i$ par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i = p_i(x_i)$$

et donc

$$0_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{n} p_j\big(p_i(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{j,i} \cdot p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j.$$

Comme tous les vecteurs $x_j$ sont nuls, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_j$ sont bien en somme directe.

❧ En particulier,

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \dim \operatorname{Im} p_i \geqslant n$$

puisque la dimension de chaque sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

Par ailleurs, la dimension d'un sous-espace de $\mathrm{E}$ est toujours inférieure à celle de $\mathrm{E}$, donc

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) \leqslant \dim \mathrm{E} = n.$$

Ainsi,

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) = n = \dim \mathrm{E}.$$

✍ *Si* $\mathrm{F}$ *est un sous-espace de* $\mathrm{E}$*, espace vectoriel de dimension finie, et que* $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$*, alors* $\mathrm{F} = \mathrm{E}$*.*

On en déduit d'une part l'égalité des deux espaces vectoriels (inclusion et égalité des dimensions) :

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$$

et d'autre part que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \dim \operatorname{Im} p_i = 1.$$

✍ *Si la somme de* $n$ *entiers supérieurs à* $1$ *est égale à* $n$*, alors chaque terme est égal à* $1$ *:*

$$0 = n - \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1 - d_i)}_{\leqslant 0}.$$

> *Soit $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et une application $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et non identiquement nulle telle que*
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \textit{et} \quad X(t+T) = X(t).$$

Comme $A$ est une application continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, on déduit de la Théorie de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble $S_H$ des solutions $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un espace vectoriel de dimension $n$.

❧ Soit $X \in S_H$ et posons

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(X)(t) = X(t+T).$$

Il est clair que $\Phi(X)$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $I$ dans $\mathbb{C}^n$. De plus, comme $A$ est périodique de période $T$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad [\Phi(X)]'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)[\Phi(X)](t),$$

ce qui prouve que $\Phi(X) \in S_H$.

❧ On vérifie sans peine que $\Phi$ est une application linéaire.

Ainsi, $\Phi$ est un endomorphisme de $S_H$, espace vectoriel complexe de dimension finie, donc $\Phi$ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X_\lambda \in S_H$, non identiquement nulle (un valeur propre n'est jamais nul).

Enfin, par définition de $\Phi$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t+T) = \lambda X_\lambda(t).$$

Si la valeur propre $\lambda$ était nulle, on pourrait en déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t) = \lambda X_\lambda(t-T) = 0,$$

ce qui est absurde puisque $X_\lambda$ est un **vecteur propre**.

*On considère l'équation différentielle*

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \tag{E}$$

**1.** *Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.*
**2.** *Résoudre (E) sur un intervalle I sans singularité.*
**3.** *Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité ?*

**1.** Soit $y$, une fonction développable en série entière : il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, x \in ]-r, r[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Comme $r > 0$, la fonction $y$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et (indéfiniment) dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc

$$\forall\, x \in ]-r, r[, \quad y'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k, \qquad 3xy'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 3ka_k x^k,$$
$$xy''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k, \qquad x^2y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k.$$

✍ *Il faut d'abord effectuer tous les changements d'indice nécessaire pour obtenir des sommes dont le terme général est* toujours *de la forme $b_k x^k$.*

*Il faut ensuite penser à ajouter, autant que possible, de termes nuls pour que les index des différentes sommes soient analogues, voire, dans le meilleur des cas, égaux.*

Par conséquent, pour tout $x \in ]-r, r[$, l'expression $x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x)$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} 3ka_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Après simplification, la fonction $y$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall\, x \in ]-r, r[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^2(a_{k+1} - a_k)x^k = 0.$$

Comme $r > 0$ et que les deux membres de l'égalité sont développables en série entière, on peut identifier les deux sommes terme à terme :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad a_{k+1} = a_k.$$

On a ainsi démontré que toute solution développable en série entière de (E) est proportionnelle à la fonction $[x \mapsto 1/1-x]$.

✍ *On a raisonné par condition nécessaire en commençant par* ***supposer*** *que $y$ était une solution développable en série entière.*

*Il faut maintenant vérifier que les fonctions trouvées (qui sont* les seules possibles*) sont effectivement des solutions de (E).*

*Au lieu de raisonner sur la série entière (ce qui nous obligerait à rester sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$), nous allons calculer sur la somme et donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.*

❧ Réciproquement, avec

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{on a} \qquad f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit facilement que $f_1$ est solution de (E) sur les deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

✍ *L'équation différentielle homogène $(E)$ peut être écrite sous la forme canonique*

$$\forall\, x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{C}$$

*avec*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)x}\begin{pmatrix} 0 & (1-x)x \\ 1 & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

*L'application $A$ est continue sur les trois intervalles $I_1 = ]-\infty, 0[$, $I_2 = ]0, 1[$ et $I_3 = ]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz sur ces trois intervalles (et sur tout sous-intervalle d'un de ces trois intervalles).*

*On en déduit que, pour $k \in [\![1, 3]\!]$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et toute "position initiale" $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $Y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ de l'équation canonique $(C)$ sur l'intervalle $I_k$ telle que $Y(x_k) = (y_k, v_k)$.*

*En remarquant que $y$ est solution de $(E)$ sur $I$ si, et seulement si, $Y$ est solution de $(C)$ sur $I$, on peut reformuler les conséquences du Théorème de Cauchy-Lipschitz : pour $k \in [\![1; 3]\!]$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et pour tout couple $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de l'équation $(E)$ sur l'intervalle $I_k$ telle que*

$$y(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad y'(x_k) = v_k.$$

Quelle que soit la formulation (canonique ou non), l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et pour l'instant, les solutions que nous avons trouvées sont toutes proportionnelles à $f_1$ — nous étudions un plan et nous n'en connaissons qu'une droite.

**2.** La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I_1$ (resp. sur $I_2$, resp. sur $I_3$) est un plan vectoriel. Nous connaissons un vecteur $f_1 \neq 0$ de ce plan et nous allons chercher un second vecteur de ce plan, non proportionnel au premier, en faisant varier la constante.

✍ *Comme c'est le cas la plupart du temps, les calculs de dérivées et de primitives sont les mêmes sur les trois intervalles $I_1$, $I_2$ et $I_3$. Nous allons donc rédiger la résolution sur un intervalle $I_k$ indéterminé.*

Nous cherchons donc une fonction $a \in \mathscr{C}^2(I_k, \mathbb{R})$ telle que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto a(x)f_1(x) = \frac{a(x)}{1-x}\right]$$

soit une solution de $(E)$ sur $I_k$. On en déduit que

$$\forall\, x \in I_k, \quad \begin{aligned} f_2'(x) &= a'(x)\cdot f_1(x) + a(x)\cdot f_1'(x), \\ f_2''(x) &= a''(x)\cdot f_1(x) + 2a'(x)f_1'(x) + a(x)f_1''(x). \end{aligned}$$

✍ *On aura bien sûr pensé à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde !*

✍ *On injecte ensuite ces expressions dans $(E)$ en regroupant les termes en facteur de $a(x)$, de $a'(x)$ et de $a''(x)$. On peut se dispenser de calculer le cofacteur de $a(x)$, puisqu'il est nul : par définition, la fonction $f_1$ est une solution de $(E)$ !*

Ainsi,

$$\forall\, x \in I_k, \quad \left[\frac{a''(x)}{1-x} + \frac{2xa'(x)}{(1-x)^2}\right] + \frac{2a''(x)}{(1-x)^3} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\forall\, x \in I_k, \quad xa''(x) + a'(x) = 0.$$

✍ *Il ne s'agit pas vraiment d'une équation du second ordre, mais d'une équation du premier ordre en $a'$.* ***Il en va toujours ainsi lorsqu'on applique la méthode de variation de la constante.***

On en déduit tout d'abord que $a'(x)$ est proportionnelle à $1/x$, puis que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \frac{\ln|x|}{1-x}\right]$$

est une solution de $(E)$ sur $I_k$.

❧ En conclusion, pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, une fonction $y$ est solution de (E) sur l'intervalle $I_k$ si, et seulement si, il existe deux réels $a_k$ et $b_k$ tels que

$$\forall\, x \in I_k, \quad y(x) = a_k \cdot \frac{1}{1-x} + b_k \cdot \frac{\ell n|x|}{1-x}.$$

✍ *Il est clair que la fonction $f_2$ n'est pas développable en série entière au voisinage de l'origine (limite infinie en $x = 0$ !). C'est pourquoi toutes les solutions développables en série entière sont proportionnelles à $f_1$.*

$\boxed{3.}$ Si $y$ est une solution de (E) autour de $x = 0$, alors il existe des réels $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$ tels que

$$\forall\, x < 0, \quad y(x) = \frac{a_1 + b_1\, \ell n|x|}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2\, \ell n\, x}{1-x}.$$

Comme $\ell n|x|$ tend vers $0$ au voisinage de $0$, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ pour que $y$ soit bornée au voisinage de $0$. Il faut de plus que $a_1 = a_2$ pour que $y$ soit continue en $0$.

Réciproquement, on sait déjà que la fonction $f_1$ est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

❧ Si $y$ est une solution de (E) autour de $x = 1$, alors il existe des réels $a_2$, $b_2$, $a_3$ et $b_3$ tels que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2\, \ell n\, x}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall\, x > 1, \quad y(x) = \frac{a_3 + b_3\, \ell n\, x}{1-x}.$$

On sait que $\ell n\, x \sim (x-1)$ pour $x$ voisin de 1, donc

$$y(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{a_k}{1-x} - b_k + o(1).$$

Pour que $y$ soit continue en 1, il faut donc que $a_2 = a_3 = 0$ et que $b_2 = b_3$.

Réciproquement, la fonction $f_2$ est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I_2 \cup I_3$. En posant $f_2(1) = -1$, on définit un prolongement de $f_2$ qui est même développable en série entière au voisinage de 1 : comme

$$\forall\, h \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}, \qquad \frac{\ell n(1+h)}{-h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1},$$

on a

$$f_2(x) = f_2\big(1 + (x-1)\big) \underset{x \to 1}{=} -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \mathcal{O}\big((x-1)^3\big).$$

Cela nous montre que $f_2'(1) = 1/2$ et donc que la fonction $f_2$ ainsi prolongée vérifie (E) pour $x = 1$ également.

✍ *La formule de Taylor donne le développement en série entière et le développement limité de $f_2$ : inutile de se fatiguer pour calculer un développement limité si on connaît un développement en série entière !*

❧ Enfin, les discussions précédentes montrent que la seule solution de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ est la fonction nulle.

*On considère l'équation différentielle suivante.*

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x) \tag{E}$$

**1.** *Déterminer les solutions de l'équation homogène* $(H)$ *associée à* $(E)$ *qui sont de la forme* $y(x) = x^\alpha$.

**2.** *En déduire les solutions de* $(E)$ *sur* $I_+ = ]0,+\infty[$ *et sur* $I_- = ]-\infty,0[$.

**3.** *L'équation* $(E)$ *admet-elle des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

**1.** Après injection de $y(x) = x^\alpha$ dans (H), on simplifie et finalement on cherche les réels $\alpha$ tels que

$$\forall\, x > 0, \qquad (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0.$$

Les seules solutions sont $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction polynomiale de la forme $\left[x \mapsto ax + bx^2\right]$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ (et non pas seulement sur $]0,+\infty[$).

**2.** ❧ **Réduction à la forme canonique —**

Sur un intervalle I exempt de singularité, l'équation différentielle (E) peut s'écrire sous la forme canonique

$$\forall\, x \in I, \qquad Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \tag{C}$$

avec

$$A(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ -2 & 2x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2+2x \end{pmatrix}$$

et une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$ est solution de (E) (resp. de (H)) si, et seulement si, la fonction

$$Y = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\right] \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$$

est solution de (C) (resp. de l'équation homogène $(C_h)$ associée à (C)).

❧ Sur les intervalles $I_- = ]-\infty,0[$ et $I_+ = ]0,+\infty[$, les deux fonctions A et B sont continues. Dans ces conditions, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) sur un intervalle I contenu dans $I_-$ **ou** dans $I_+$ est un plan vectoriel.

❧ D'après la question précédente, les applications $F_1$ et $F_2$ définies par

$$F_1 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{et} \quad F_2 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}\right]$$

sont deux solutions non proportionnelles de l'équation homogène $(C_h)$, donc le couple $(F_1,F_2)$ est une base du plan des solutions de $(C_h)$.

Par conséquent, la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $x \in I$ et on peut trouver une solution particulière de l'équation (C) sous la forme $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ où $\Lambda \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$ (*méthode de variation des constantes*).

❧ On vérifie sans peine que $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ est solution de (C) sur l'intervalle I si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \qquad M(x)\Lambda'(x) = B(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in I, \qquad \Lambda'(x) = \frac{2}{x^3}\begin{pmatrix} -x - x^2 \\ 1+x \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2x - 2x^2 \ln|x| \\ -1-2x \end{pmatrix},$$

on en déduit qu'une solution particulière de (C) sur $I_+$ est donnée par

$$Y(x) = M(x)\Lambda(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ \star & \star \end{pmatrix}\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 - 2x\ln|x| - 2x \\ \star \end{pmatrix}.$$

✍ *Comme, par définition,*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

*et qu'on s'intéresse essentiellement à $y$, il est <u>inutile</u> d'effectuer les calculs sur la deuxième ligne.*

❧ Une solution particulière de (E) est donc donnée par

$$\forall\, x \in I, \qquad y_0(x) = 1 - 2x\,\ell n|x|.$$

✍ *On peut supprimer le terme $-2x$, puisqu'il s'agit d'une solution de l'équation homogène $(H)$ !*

D'après le principe de superposition, pour $I = I_-$ et pour $I = I_+$, une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall\, x \in I, \qquad y(x) = [ax + bx^2] + [1 - 2x\,\ell n|x|].$$

**3.** Si $f$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe des réels $a_-$, $b_-$, $a_+$ et $b_+$ tels que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = a_-x + b_-x^2 + 1 - 2x\,\ell n\, x \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0, \quad f(x) = a_+x + b_+x^2 + 1 - 2x\,\ell n|x|.$$

Quels que soient les réels $a_-$, $b_-$, $a_+$ et $b_+$, le raccord en $x = 0$ est continu (limite nulle à gauche et à droite de $0$) mais n'est pas dérivable en $x = 0$ (tangente verticale).

L'équation (E) n'admet donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.

**1.** *On considère l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \tag{H}$$

*où* $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
*Démontrer que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* $A$ *si, et seulement si, il existe un vecteur* non nul $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ *tel que la fonction*

$$f_\lambda = \left[t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda\right]$$

*soit une solution de l'équation* (H).
**2.** *Pour* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, *on pose*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

*et* $F = \{f_{a,b,c},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
**2. a.** *Démontrer que* $F$ *est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.*
**2. b.** *Déterminer une matrice* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall\, f \in F,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

*Quel est le spectre de* $M$ *?*

**1.** Quels que soient le réel $a$ et le vecteur $x \in \mathbb{R}^3$,il est clair que la fonction $f = [t \mapsto e^{at}x]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = ae^{at}x.$$

❧ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de la matrice $A$. Il existe donc un vecteur propre $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ de $A$ associé à $\lambda$ et, par définition, ce vecteur n'est pas nul.

La fonction $f_\lambda = \left[t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t} x_\lambda = e^{\lambda t} \cdot Ax_\lambda = A \cdot f_\lambda(t).$$

❧ Réciproquement, si $f_\lambda$ est une solution de (H), alors en particulier

$$\lambda \cdot x_\lambda = \lambda e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda = f'_\lambda(0) = Af_\lambda(0) = A \cdot (e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda) = Ax_\lambda$$

et comme le vecteur $x_\lambda$ est supposé <u>non nul</u>, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

**2. a.** Comme

$$f_{a,b,c}(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que $F$ est le sous-espace de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$ et $f_{0,0,1}$. C'est donc un espace vectoriel et sa dimension est inférieure à 3.

On peut rapidement vérifier que le rang de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, donc cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs $f_{1,0,0}(0)$, $f_{0,1,0}(0)$ et $f_{0,0,1}(0)$ sont linéairement indépendants et donc que la famille $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$ est une base de $F$ et $\dim F = 3$.

✍ *Si trois fonctions* $f$, $g$ *et* $h$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *forment une famille liée, alors il existe un triplet de scalaires* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *tel que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

*et en particulier* $af(0)+bg(0)+ch(0)=0$*, ce qui prouve que les trois vecteurs* $f(0)$*,* $g(0)$ *et* $h(0)$ *forment une famille liée (puisque les trois scalaires* $a$*,* $b$*,* $c$ *ne sont pas tous nuls).*

**2. b.** Quels que soient $a$, $b$, $c$ et $t$,

$$f'_{a,b,c}(t)=be^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-ce^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La relation $f'(t)=Mf(t)$ est vérifiée pour toute fonction $f\in F$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$, $f_{0,0,1}$ (qui constituent une sorte de base canonique de $F$). On cherche donc une matrice $M$ telle que

$$M\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$MP=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\tag{†}$$

On obtient rapidement

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

et on en déduit que la matrice

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&-4\\-2&-1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

est la seule matrice qui convienne.

❧ En remarquant que l'équation (†) peut aussi s'écrire

$$MP=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

on obtient

$$M=P\,\mathrm{Diag}(0,1,-1)P^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice $M$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M)=\{0,-1,1\}$.

✍ *Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants montre que les solutions de l'équation* $x'(t)=Mx(t)$ *sont les fonctions* $f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^3)$ *de la forme*

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\exp(tM).f(0).$$

*Ici,*

$$f_{a,b,c}(0)=\begin{pmatrix}b+c\\2a-b\\a+c\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad f_{a,b,c}(t)=P\begin{pmatrix}a\\be^{t}\\ce^{-t}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{t}&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

*ce qui nous donne*

$$f_{a,b,c}(t)=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{t}&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}f_{a,b,c}(0)$$

*et comme cette propriété est vraie pour tout* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$*, on en déduit que*

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad \exp(tM)=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{t}&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}=P\exp\big[\mathrm{Diag}(0,t,-t)\big]P^{-1}$$
$$=\exp\big[tP\,\mathrm{Diag}(0,1,-1)P^{-1}\big]$$

*(puisque* $\exp(Q^{-1}AQ)=Q^{-1}\exp(A)Q$*, quelles que soient la matrice* $A$ *et la matrice inversible* $Q$*).*
***NB :*** *L'application* $\exp$ *n'est pas injective sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

*Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonalisable telle que $\operatorname{tr} A > 0$. On suppose qu'il existe une fonction $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \textit{et que} \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

*Démontrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants nous montre que les solutions du système homogène $x'(t) = Ax(t)$ sont les applications $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(tA)\big(x(0)\big).$$

❧ Comme la matrice $A$ est diagonalisable, l'espace $\mathbb{R}^n$ est la somme (directe, forcément directe) des sous-espaces propres de $A$ :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n).$$

En notant $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, les valeurs propres (deux à deux distinctes) de $A$, il existe une, et une seule, famille de vecteurs $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ telle que

$$x(0) = \sum_{k=1}^{r} u_k \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad u_k \in \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=1}^{r} \exp(tA)(u_k) = \sum_{k=1}^{r} e^{t\alpha_k} \cdot u_k. \tag{‡}$$

✍ *Il faut bien distinguer l'application* $\exp = [M \mapsto \exp(M)]$ *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*, qui est développable en série entière, et l'application* $\exp(M) = [x \mapsto \exp(M)x]$*, qui est linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *puisque* $\exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Avec* $Mu = \alpha \cdot u$*, on a* $M^k u = \alpha^k \cdot u$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et donc*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\right)(u) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot u$$

*Par définition de* $\exp(M)$*,*

$$\lim_{N \to +\infty} \left|\!\left|\!\left| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \right|\!\right|\!\right| = 0$$

*et par définition de* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$*,*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\right)(u) \right\| \leqslant \left|\!\left|\!\left| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \right|\!\right|\!\right| \, \|u\|.$$

*On en déduit que*

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha^k}{k!}\right) \cdot u \right\| = 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \exp(M)(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\right) \cdot u = e^{\alpha} \cdot u.$$

❧ Supposons que les valeurs propres de $A$ soient indexées de manière décroissante :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r.$$

De plus, la trace de $A$ est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité). Comme cette trace est strictement positive, la matrice $A$ admet au moins une valeur propre *strictement positive*, donc $\alpha_1 > 0$.

On déduit de la décomposition (‡) que

$$u_1 = e^{-t\alpha_1}x(t) - \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k-\alpha_1)} \cdot u_k$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \|u_1\| \leqslant e^{-t\alpha_1}\big\|x(t)\big\| + \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k-\alpha_1)}\|u_k\|.$$

Comme $x(t)$ tend vers le vecteur nul et que $(\alpha_k - \alpha_1) < 0$ pour tout $k \geqslant 2$, on en déduit que le second membre tend vers $0$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\|u_1\| = 0$ et $u_1$ est le vecteur nul.

✍ *On pourrait continuer sur cette lancée et en déduire (par récurrence finie) que $u_k = 0$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant r$ tel que $\alpha_k \geqslant 0$.*

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \operatorname{Vect}(u_2, \dots, u_r) \subset \bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Par définition, la dimension d'un sous-espace propre est toujours au moins égale à 1, donc

$$\dim \bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) = \sum_{k=2}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) < \dim E.$$

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un hyperplan $H$ de $E$ tel que

$$\bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) \subset H$$

et donc tel que $x(t) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc il existe une forme linéaire $\ell$, non identiquement nulle, telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$ et donc telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$