
ORAUX BLANCS 2025

Exercice 1

LS-N4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction intégrable. Déterminer la limite de

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+a) - f(x)| dx$$

lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 2

LS-O1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une application de carré intégrable. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Exercice 3

LS-O9

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f(x) \leq a \int_0^x f(t) dt. \quad (*)$$

Que dire de f ?

Exercice 4

128-436

On note φ , l'indicatrice d'Euler. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(n)$ divise n .

Exercice 5

rms128-458

Déterminer les formes linéaires $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(A) = f(B)$ pour tout couple (A, B) de matrices semblables.

Exercice 6

rms128-476

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice telle que

$$\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{tr} A = 0 \quad \text{et} \quad A^n \neq 0_n.$$

1. Démontrer que A est diagonalisable.
2. Calculer la dimension de

$$C(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) : AM = MA\}.$$

3. On suppose de plus que $\operatorname{tr}(A^2) = 2$. Calculer A^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

rms128-488

On considère les matrices

$$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Démontrer que la matrice B est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B est diagonalisable.

L'ensemble E des applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est muni de la topologie de la convergence uniforme. On note respectivement I , S et B , les sous-ensembles de E constitués des applications injectives, surjectives et bijectives.

1. Démontrer que l'ensemble I n'est ni ouvert, ni fermé.
2. L'ensemble B est-il ouvert? fermé?
3. L'ensemble S est-il ouvert? fermé?

Exercice 9

128-533 - Classes de similitudes

La classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble $S(A)$ défini par

$$S(A) = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

1. Démontrer que l'application $[M \mapsto \chi_M]$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. Démontrer que la classe de similitude de A est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 3.a. On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. Démontrer que la matrice nulle O_n appartient à l'adhérence de la classe de similitude $S(A)$.
- 3.b. Étudier la réciproque.
4. On suppose que la matrice A n'est pas diagonalisable. Démontrer que sa classe de similitude $S(A)$ n'est pas fermée.
5. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'intérieur de la classe de similitude $S(A)$ est vide.
6. Caractériser les matrices A dont la classe de similitude $S(A)$ est bornée.

Exercice 10

128-663

1. Soient E , un espace vectoriel de dimension n ; u et v , des endomorphismes de E .
On suppose que u possède n valeurs propres distinctes et que u et v commutent :

$$u \circ v = v \circ u.$$

Que peut-on en conclure sur v ?

2. Soit E , le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\cos$ et $\sin$.
- 2.a. Soit $d \in L(E)$, l'endomorphisme défini par

$$\forall \varphi \in E, \quad d(\varphi) = \varphi'.$$

Démontrer qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $f \circ f = d$.

- 2.b. Soit $s \in L(E)$, l'endomorphisme qui échange $\cos$ et $\sin$. Quelle est la nature géométrique de s ? Existe-t-il $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = s$?

Exercice 11

128-667

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et que $P'(A)$ soit inversible. Démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 12

128-682

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 13

128-700

On étudie la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{où} \quad u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction f .
2. Démontrer que f est continue et strictement décroissante sur I .

3. Démontrer que f admet une limite au voisinage de $+\infty$ et calculer cette limite.
4. Trouver un équivalent de f au voisinage de 0 . On **admettra** que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 14

135-490

Soit $(G, *)$, un groupe fini d'élément neutre e . On suppose que

$$\forall x \in G, \quad x^2 = e.$$

1. Démontrer que le groupe $(G, *)$ est abélien.
2. Soient H , un sous-groupe strict de G et $a \in G \setminus H$. On pose

$$aH = \{a * x, x \in H\}.$$

2. a. Démontrer que les ensembles H et aH ont même cardinal.
2. b. Démontrer que H et aH sont disjoints.
2. c. Démontrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G .
3. Démontrer que le cardinal de G est une puissance de 2.
4. Calculer le produit des éléments de G .

Exercice 15

135-492

Soit $(G, \cdot)$, un groupe abélien. On considère deux éléments x et y de G en supposant que l'ordre $a \in \mathbb{N}^*$ de x et l'ordre $b \in \mathbb{N}^*$ de y sont premiers entre eux.

1. Démontrer que l'ordre de xy est égal à ab .
2. Démontrer que le sous-groupe $\langle xy \rangle$ engendré par le produit xy est l'ensemble

$$H = \{x^m \cdot y^n, 0 \leq m < a, 0 \leq n < b\}.$$

Exercice 16

135-505

Soit f , un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = \omega$. On suppose que F est un plan vectoriel stable par f . Démontrer que $\text{Im } f \subset F$.

Exercice 17

135-507

Soient E , un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$, une famille d'endomorphismes non identiquement nuls tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i.$$

Démontrer que le rang de chaque endomorphisme p_i est égal à 1 et que

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i.$$

Exercice 18

135-784

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et une application $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et non identiquement nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{et} \quad X(t+T) = X(t).$$

Exercice 19

135-1151

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonalisable telle que $\text{tr } A > 0$. On suppose qu'il existe une fonction $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \text{et que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(x(t)) = 0.$$

Soient a et n , deux entiers naturels non nuls. On répartit $N = an$ boules dans n urnes. On pose alors $T_i = 1$ si l'urne i est vide et $T_i = 0$ sinon. On note Y_n , le nombre d'urnes vides et

$$S_n = \frac{Y_n}{n}.$$

1. Proposer un modèle probabiliste pour lequel les $T_1, \dots, T_n, Y_n$ et S_n sont des variables aléatoires.
2. Dédire de ce modèle la loi, l'espérance et la variance de T_i .
3. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que la variable aléatoire X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} = p \in [0, 1].$$

On étudie ici la **moyenne empirique**

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Déterminer l'espérance de M_n .
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbf{V}(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
- 3.a. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

- 3.b. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$