Oraux blancs 2025

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction intégrable. Déterminer la limite de

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+a) - f(x)\right| dx$$

lorsque a tend vers $+\infty$.

Comme la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, quel que soit le réel γ, la fonction translatée $[x \mapsto f(x+\gamma)]$ est également intégrable sur $\mathbb{R}$. Toutes les intégrales qui vont suivre sont donc convergentes.

✍ *Pour deviner le résultat à démontrer, il ne coûte rien de supposer que f est une fonction à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un segment $[A, B]$ tel que*

$$\forall\, x \notin [A, B], \quad f(x) = 0.$$

Dans ce cas très particulier, il est clair que si le réel a est assez grand pour que les supports de f et de $[x \mapsto f(x+a)]$ soient disjoints, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+a) - f(x)\right| dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx.$$

Nous allons donc démontrer que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+a) - f(x)\right| dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx.$$

❧ En posant $\alpha = a/2$, on peut écrire le problème posé sous une forme plus symétrique :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+a) - f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+\alpha) - f(x-\alpha)\right| dx$$

au moyen du changement de variable affine $x \leftarrow x - \alpha$.

❧ Les changements de variable $x \leftarrow x \pm \alpha$ montrent que

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x+\alpha)\right| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x-\alpha)\right| dx.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}, \qquad |u - v| \leqslant |u| + |v|$$

donc

$$\left|F(a) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left|f(x+\alpha)\right| + \left|f(x-\alpha)\right| - \left|f(x+\alpha) - f(x-\alpha)\right|}_{\geqslant 0} dx.$$

❧ Toutes les intégrales considérées étant convergentes, on peut utiliser la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\left|F(a) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx\right| &= \int_{-\infty}^{0} \left|f(x-\alpha)\right| + \left(\left|f(x+\alpha)\right| - \left|f(x-\alpha) - f(x+\alpha)\right|\right) dx \\ &\quad + \int_{0}^{+\infty} \left|f(x+\alpha)\right| + \left(\left|f(x-\alpha)\right| - \left|f(x+\alpha) - f(x-\alpha)\right|\right) dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{0} 2\left|f(x-\alpha)\right| dx + \int_{0}^{+\infty} 2\left|f(x+\alpha)\right| dx\end{aligned}$$

puisque $|u| - |v - u| \leqslant |v|$ (inégalité triangulaire).

❧ En utilisant toujours les mêmes changements de variable affines, on en déduit que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \left|F(a) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx\right| \leqslant 2\int_{-\infty}^{-\alpha} \left|f(x)\right| dx + 2\int_{\alpha}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$$

et comme f est intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, on en déduit que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} 2\int_{-\infty}^{-\alpha} \left|f(x)\right| dx + 2\int_{\alpha}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx = 0$$

(reste d'une intégrale généralisée convergente). On a ainsi démontré par encadrement que

$$\lim_{a\to+\infty} F(a) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une application de carré intégrable. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

Par hypothèse, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$$

est convergente.

❧ On déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_0^x 1^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{x}\left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

et donc que

$$\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\sqrt{x}),$$

ce qui n'est pas assez précis.

✍ *La démonstration qui suit s'inspire de celle du Théorème de Cesaro.*
On introduit un paramètre $a > 0$ pour appliquer la relation de Chasles :

$$\forall\, a > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^a f(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_a^x f(t)\,dt.$$

❧ On déduit comme plus haut de l'inégalité de Schwarz que

$$\begin{aligned}\forall\, x \geqslant a, \quad \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| &\leqslant \left(\int_a^x 1^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^x |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{x}\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}. \qquad (\star)\end{aligned}$$

Comme f est de carré intégrable, on sait que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = 0 \qquad (\dagger)$$

(en tant que reste d'une intégrale généralisée convergente).

❧ Fixons $\varepsilon > 0$.
D'après $(\dagger)$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que

$$0 \leqslant \int_{a_0}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon.$$

On déduit alors de $(\star)$ que

$$\forall\, x \geqslant a_0, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{a_0}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

Ce réel a_0 étant fixé, il est clair que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{a_0} f(t)\,dt = 0$$

donc il existe un réel $a_1 \geqslant a_0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant a_1, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{a_0} f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

On déduit de (1) et (2) et de la relation de Chasles que

$$\forall\, x \geqslant a_1, \quad \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

❧ Cet encadrement vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a démontré que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant a \int_0^x f(t)\,dt. \tag{$\star$}$$

Que dire de f ?

Commençons par supposer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (Théorème fondamental), positive sur $\mathbb{R}_+$ par $(\star)$, nulle en $x = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad F'(x) - aF(x) = f(x) - a\int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0 \tag{$\dagger$}$$

à nouveau par $(\star)$.

❧ On considère alors la fonction G définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad G(x) = F(x)e^{-ax}.$$

✍ *La quantité e^{-ax} est un **facteur intégrant** (célèbre dans cette circonstance).*

La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, nulle en $x = 0$, positive sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante par $(\dagger)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad G'(x) = \big[F'(x) - aF(x)\big]e^{-ax} \leqslant 0.$$

Par conséquent, la fonction G est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction F est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction f aussi.

❧ Dans le cas où f est seulement continue par morceaux, on procède de la même manière mais cette fois, la fonction F est seulement continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par hypothèse, la fonction F est positive (car $a > 0$) et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant aF(t) \tag{$\star$}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x aF(t)\,dt = a\int_0^x F(t)\,dt.$$

Autrement dit, la fonction *continue* F vérifie le même encadrement $(\star)$ que la fonction f !

On déduit de la première partie de cette démonstration que la fonction F est identiquement nulle, puis de $(\star)$ que f est identiquement nulle.

‖ *On note φ, l'indicatrice d'Euler. Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(n)$ divise n.*

On sait exprimer $\varphi(n)$ au moyen de la décomposition de n en produit de facteurs premiers : s'il existe des nombres premiers

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$

et des entiers naturels non nuls

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

alors

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1}(p_2 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots (p_r - 1)p_r^{\alpha_r - 1}.$$

On a donc

$$n = p_1 \cdots p_r \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1} \quad \text{et} \quad \varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1}$$

et par conséquent $\varphi(n)$ divise n si, et seulement si, le produit

$$(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) \qquad \text{divise} \qquad p_1 \cdots p_r.$$

❧ En particulier, si $\varphi(n)$ divise n, il faut que $(p_1 - 1)$ divise le produit $p_1 \cdots p_r$.
Or $1 \leqslant p_1 - 1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ où les p_k sont des nombres premiers, donc $(p_1 - 1)$ est premier à tous les p_k et donc premier au produit $p_1 \cdots p_r$.
Il n'y a qu'une seule possibilité : $p_1 - 1 = 1$, c'est-à-dire $p_1 = 2$.

❧ Reprenons : $\varphi(n)$ divise n si, et seulement si, le produit

$$(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) \qquad \text{divise} \qquad 2p_2 \cdots p_r.$$

Or, pour $k \geqslant 2$, les p_k sont des nombres premiers strictement supérieurs à $p_1 = 2$, donc des nombres *impairs* et les facteurs $(p_k - 1)$ sont tous pairs.
Au second membre, la valuation de 2 est égale à 1 (puisque les p_k sont impairs pour tout $k \geqslant 2$). Il faut donc que $r \leqslant 2$!

❧ Si $r = 2$, alors il faut que $(p_2 - 1)$ divise $2p_2$. Comme $(p_2 - 1)$ et p_2 sont premiers entre eux, il faut donc que $p_2 - 1$ divise 2 et donc que $p_2 = 3$.

✍ *L'astuce taupinale $1 \times p_2 - 1 \times (p_2 - 1) = 1$ s'interprète ici comme la relation de Bézout !*

❧ Réciproquement, si $n = 2^\alpha$, alors $\varphi(n) = (2 - 1).2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$ divise effectivement n et si $n = 2^\alpha.3^\beta$, alors $\varphi(n) = (1.2^{\alpha-1}).(2.3^{\beta-1}) = 2^\alpha.3^{\beta-1}$ divise effectivement n.
Les entiers n tels que $\varphi(n)$ sont donc les entiers qui se factorisent sous la forme 2^α ou $2^\alpha.3^\beta$.

Déterminer les formes linéaires $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *telles que* $f(A) = f(B)$ *pour tout couple* (A, B) *de matrices semblables.*

Il est clair que la trace convient, ainsi que toutes les formes linéaires proportionnelles à la trace.

❧ Réciproquement, on considère les matrices élémentaires $E_{k,\ell}$ qui constituent la "base canonique" de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $u_{k,\ell}$, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par $E_{k,\ell}$ dans la base canonique

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

de $\mathbb{C}^n$.

❧ Quels que soient $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$, la matrice de l'endomorphisme $u_{k,k}$ relative à la base

$$\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_{k-1}, e_\ell, e_{k+1}, \dots, e_{\ell-1}, e_k, e_{\ell+1}, \dots, e_n)$$

est la matrice $E_{\ell,\ell}$, donc les matrices $E_{k,k}$ et $E_{\ell,\ell}$ sont semblables.

Il faut donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad f(E_{k,k}) = f(E_{1,1}).$$

❧ Quels que soient $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n$, la matrice de l'endomorphisme $u_{k,\ell}$ relative à la base

$$\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{\ell-1}, 2e_\ell, e_{\ell+1}, \dots, e_n)$$

est la matrice $2E_{k,\ell}$, donc les matrices $E_{k,\ell}$ et $2E_{k,\ell}$ sont semblables.

Il faut donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n, \qquad f(E_{k,\ell}) = f(2E_{k,\ell}) = 2f(E_{k,\ell}) \qquad \text{(par linéarité de } f\text{)}$$

et donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n, \qquad f(E_{k,\ell}) = 0.$$

❧ Par linéarité de f, on en déduit que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} f(E_{k,\ell}) = \operatorname{tr}(A) \cdot f(E_{1,1}).$$

On a ainsi démontré que les seules formes linéaires qui convenaient étaient la trace et les formes linéaires proportionnelles à la trace.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice telle que

$$\operatorname{rg} A = 2, \quad \operatorname{tr} A = 0 \quad \textit{et} \quad A^n \neq 0_n.$$

1. *Démontrer que A est diagonalisable.*
2. *Calculer la dimension de*

$$C(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ : AM = MA\}.$$

3. *On suppose de plus que $\operatorname{tr}(A^2) = 2$. Calculer A^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.*

1. Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est trigonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

✍ *Les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire sont ses valeurs propres. Comme T et A sont semblables, les coefficients diagonaux de T sont aussi les valeurs propres de A.*

Comme $\operatorname{rg} A = 2$, la dimension du noyau de A est égale à $(n-2)$, donc la matrice T compte au moins $(n-2)$ coefficients diagonaux nuls.

✍ *Sur une matrice triangulaire, le nombre de coefficients diagonaux nuls est égal à la multiplicité de 0 (considéré comme racine du polynôme caractéristique) et la multiplicité d'une valeur propre est toujours au moins égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.*

Comme $\operatorname{tr} A = 0$, il existe un nombre complexe α tel que la diagonale de T soit la liste

$$(\alpha, -\alpha, 0, \dots, 0).$$

✍ *Pour toute matrice complexe, et plus généralement pour toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé, la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité.*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda$$

Dans le cas présent, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 + (n-2) \times 0 = 0$.

Si $\alpha = 0$, alors tous les coefficients diagonaux de T sont nuls, donc $T^n = 0_n$ et la matrice A serait nilpotente, ce qui contredit l'énoncé.

✍ *L'indice de nilpotence est toujours inférieur à la taille de la matrice. Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est nilpotente si, et seulement si, $A^n = 0_n$.*

En définitive, la matrice A possède trois valeurs propres : 0 de multiplicité supérieure à $(n-2)$; α de multiplicité supérieure à 1 et $-\alpha$ de multiplicité supérieure à 1. Comme la somme des multiplicités est supérieure à la dimension de E, la matrice A est diagonalisable.

2. D'après la question précédente, on connaît une décomposition de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en somme directe :

$$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + \alpha I_n).$$

❧ Si $AM = MA$, alors tout sous-espace propre de A est stable par M. Par conséquent, si la matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifie

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & -\alpha & \\ & & 0 \cdots 0 \\ & & \vdots \quad \vdots \\ & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \star & & \\ & \star & \\ & & \star \cdots \star \\ & & \vdots \quad \vdots \\ & & \star \cdots \star \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si la matrice $P^{-1}MP$ est de la forme précédente, alors il est clair que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}AP$ commutent et donc que M et A commutent.

❧ On en déduit que la dimension du commutant $C(A)$ est égale à $1+1+(n-2)^2$.

3. D'après la matrice T, il est clair que $\mathrm{tr}(A^2) = 2\alpha^2$. Par conséquent, si $\mathrm{tr}(A^2) = 2$, alors on peut supposer $\alpha = 1$.

✍ *Le scalaire α n'est défini qu'au signe près, il revient au même de choisir $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$.*

On en déduit que, pour tout paramètre $q \in \mathbb{N}$,

$$P^{-1}A^{2q+1}P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}A^{2q+2}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et plus simplement que

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}A^{2q+1}P = P^{-1}AP \quad \text{et que} \quad P^{-1}A^{2q+2}P = P^{-1}A^2P.$$

Finalement,

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad A^{2q+1} = A \quad \text{et} \quad A^{2q+2} = A^2.$$

✍ *Il faut prêter attention au cas particulier $A^0 = I_n$. Ainsi,*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = I_n + \mathrm{sh}\, t \cdot A + (\mathrm{ch}\, t - 1) \cdot A^2.$$

✍ *On aurait pu aboutir au même résultat par récurrence.*
En effet, comme A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \pm 1\}$, le polynôme minimal de A est $X(X-1)(X+1)$ et donc $A^3 = A$. Cette relation de liaison montre bien que les puissances impaires de A sont toutes égales et que les puissances impaires non nulles *de A sont toutes égales.*

❧ *Il est impossible d'exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de I_n et de A. En effet, comme le degré du polynôme minimal de A est égal à 3, la famille (I_n, A, A^2) est libre.*

On considère les matrices

$$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. *Démontrer que la matrice* B *est semblable à la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}.$$

2. *Démontrer que* A *est diagonalisable si, et seulement si,* B *est diagonalisable.*

1. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est évidemment diagonalisable et comme

$$M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P_0^{-1} M P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{en posant} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire sont ses valeurs propres et une matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *qui possède* n *valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

❧ La matrice

$$P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est évidemment inversible et

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}.$$

2. Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$Q_0^{-1} A Q_0 = \Delta.$$

La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0 & 0_n \\ 0_n & Q_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est alors inversible et

$$Q^{-1}(P^{-1} B P) Q = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & 3\Delta \end{pmatrix},$$

donc la matrice B est diagonalisable.

✍ *Une matrice diagonale par blocs (ou triangulaire par blocs) est inversible si, et seulement si, ses blocs diagonaux sont tous inversibles.*

❧ Réciproquement, si la matrice B est diagonalisable, alors son polynôme minimal μ_B est scindé à racines simples. On en déduit que

$$0_{2n} = P^{-1} \mu_B(B) P = \begin{pmatrix} \mu_B(A) & 0_n \\ 0_n & \mu_B(3A) \end{pmatrix}$$

et donc que A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples :

$$\mu_B(A) = 0_n.$$

Par conséquent, la matrice la matrice A est diagonalisable.

L'ensemble E *des applications continues de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$ *est muni de la topologie de la convergence uniforme. On note respectivement* I, S *et* B, *les sous-ensembles de* E *constitués des applications injectives, surjectives et bijectives.*

1. *Démontrer que l'ensemble* I *n'est ni ouvert, ni fermé.*

2. *L'ensemble* B *est-il ouvert ? fermé ?*

3. *L'ensemble* S *est-il ouvert ? fermé ?*

1. L'application $g = [x \mapsto x]$ appartient à B, donc à I et à S. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on considère l'application g_ε définie par

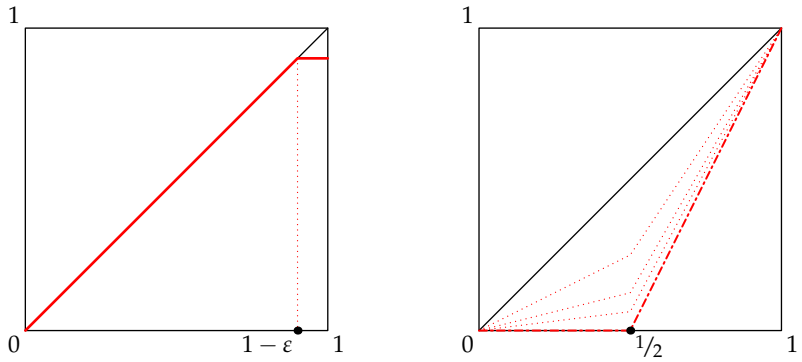
$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon, \quad g_\varepsilon(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1, \quad g_\varepsilon(x) = 1-\varepsilon.$$

Il est clair que l'application g_ε appartient à E, mais elle n'est ni injective, ni surjective.

✍ *Et pas non plus bijective !*

Cependant, $\|g - g_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ (figure de gauche ci-dessous). Par conséquent, tout voisinage de g contient au moins une fonction de E qui n'est pas dans I (ni dans S, ni dans B).

On a ainsi démontré que I n'était pas ouvert.



❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application continue et affine par morceaux h_n définie par

$$h_n(0) = 0, \qquad h_n(1/2) = 2^{-(n+1)}, \qquad h_n(1) = 1.$$

Il est clair que h_n est injective sur $[0,1]$ et qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction continue et affine par morceaux h définie par

$$h(0) = 0, \qquad h(1/2) = 0, \qquad h(1) = 1$$

puisque $\|h - h_n\|_\infty = h_n(1/2) = 2^{-(n+1)}$ (figure de droite ci-dessus).

Comme la fonction h n'est pas injective, l'ensemble I n'est pas fermé.

✍ *Comme les fonctions* h_n *appartiennent à* B *et que* h *n'appartient pas à* B, *on a également démontré que* B *n'était pas fermé.*

2. On a déjà démontré que B n'était ni ouvert, ni fermé.

3. On a déjà démontré que S n'était pas ouvert.

❧ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'applications de S qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction (continue) $f \in E$. Nous allons démontrer que l'application f est surjective.

Soit $y \in [0,1]$. Comme chaque fonction f_n est surjective, il existe au moins un réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = y$. On dispose ainsi d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact $[0,1]$. Il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in [0,1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\big|f(\ell) - y\big| = \big|f(\ell) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\big| &\leqslant \big|f(\ell) - f(x_{\varphi(k)})\big| + \big|f(x_{\varphi(k)}) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\big| \\ &\leqslant \big|f(\ell) - f(x_{\varphi(k)})\big| + \|f - f_{\varphi(k)}\|_\infty\end{aligned}$$

et le majorant tend vers 0 : le premier terme par continuité de f au point ℓ et le second terme par convergence uniforme. On a donc $f(\ell) = y$, ce qui prouve que f est surjective.

L'ensemble des applications continues et surjectives de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est donc fermé.

*La **classe de similitude** d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble $S(A)$ défini par*

$$S(A) = \left\{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\right\}.$$

1. *Démontrer que l'application $[M \mapsto \chi_M]$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. *On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. Démontrer que la classe de similitude de A est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

3. a. *On suppose que la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. Démontrer que la matrice nulle O_n appartient à l'adhérence de la classe de similitude $S(A)$.*

3. b. *Étudier la réciproque.*

4. *On suppose que la matrice A n'est pas diagonalisable. Démontrer que sa classe de similitude $S(A)$ n'est pas fermée.*

5. *Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'intérieur de la classe de similitude $S(A)$ est vide.*

6. *Caractériser les matrices A dont la classe de similitude $S(A)$ est bornée.*

1. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique χ_M est un polynôme unitaire de degré n. On considère donc une application d'un espace vectoriel de dimension finie : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans un autre espace vectoriel de dimension finie : $\mathbb{C}_n[X]$. Il suffit donc de démontrer que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions continues des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ pour pouvoir conclure que $[M \mapsto \chi_M]$ est une fonction continue.

❧ Par définition du déterminant, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_M(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

où $b_{i,i} = (x - m_{i,i})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $b_{i,j} = -m_{i,j}$ pour tous $i \neq j$. On en déduit que les coordonnées de χ_M relatives à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions polynomiales (et donc continues) des coordonnées de M relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Considérons une suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices semblables à A et supposons que cette suite de matrices converge vers une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

❧ Comme A est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples μ. Comme des matrices semblables ont mêmes polynômes annulateurs, on en déduit que $\mu(B_k) = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(L) = 0_n$.

✍ *Toute application polynomiale est continue sur l'algèbre de dimension finie $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

On a ainsi démontré que L était diagonalisable.

❧ Des matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de chaque matrice B_k est en fait celui de la matrice A. Par continuité, le polynôme caractéristique de L est aussi celui de la matrice A.

❧ On sait ainsi que L et A sont deux matrices diagonalisables et que leurs polynômes caractéristiques sont égaux, donc L et A sont semblables.

✍ *La première partie de la démonstration a montré que μ était un polynôme annulateur de L, elle ne permet pas de démontrer qu'il s'agit du polynôme minimal de L !*

Et même si on savait qu'il s'agissait du polynôme minimal de L, on ne pourrait toujours pas conclure, car le polynôme minimal ne donne aucune indication sur la dimension des sous-espaces propres !

❧ *Par ailleurs, il ne suffit pas de savoir que A et L ont même polynôme caractéristique, car la connaissance du polynôme χ_L ne permet pas de savoir si L est diagonalisable (à moins que le polynôme caractéristique ne soit scindé à racines simples).*

3. a. Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Considérons donc une matrice triangulaire supérieure stricte $N = (n_{k,\ell}) \in S(A)$ et, pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}_+^*$, la matrice de passage

$$P_t = \mathrm{Diag}(t, t^2, \ldots, t^n) \in GL_n(\mathbb{C}).$$

La matrice $N_t = P_t^{-1} N P_t = (n'^t_{k,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ est semblable à N, donc elle est semblable à A et

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad n'^t_{k,\ell} = t^{\ell-k} n_{k,\ell}.$$

✍ *En multipliant à droite par N_t, on multiplie la ℓ-ième colonne de N par t^ℓ.*
En multipliant à gauche par $N_t^{-1} = \mathrm{Diag}(t^{-1}, \dots, t^{-n})$, on multiplie la k-ième ligne de N par t^{-k}.
Par conséquent, $n'^t_{k,\ell} = t^{-k} n_{k,\ell} t^\ell$.

Comme $n_{k,\ell} = 0$ pour $k \geqslant \ell$, c'est-à-dire pour $\ell - k \leqslant 0$, on en déduit que
— si t tend vers 0, alors $t^{\ell-k}$ tend vers 0 pour $k < \ell$ et $n'^t_{k,\ell}$ tend vers 0 quels que soient k et ℓ (même pour $k \geqslant \ell$) ;
— si t tend vers $+\infty$, alors $t^{\ell-k}$ tend vers $+\infty$ pour $k < \ell$ et $n'^t_{k,\ell}$ tend vers l'infini pour tout couple (k, ℓ) tel que $n_{k,\ell} \neq 0$.

❧ Ainsi, si t tend vers 0, la matrice $N_t \in S(A)$ tend vers la matrice nulle, ce qui prouve que la matrice nulle appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.

✍ *À l'opposé, si A est nilpotente non nulle, alors $N \neq 0_n$ et si t tend vers $+\infty$, alors $\|N_t\|_\infty$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la classe de similitude de A n'est pas bornée.*

3. b. Considérons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices appartenant à $S(A)$ et supposons qu'elle converge vers une matrice B.

Toutes les matrices A_k sont semblables à A, donc leur polynôme caractéristique est toujours celui de A. Par continuité (cf. première question), le polynôme caractéristique de B est aussi celui de A.

Si B est la matrice nulle, alors le polynôme caractéristique de A est X^n et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, la matrice A est nilpotente.

4. Comme la matrice A est complexe, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_r)$ où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice d'homothétie $\lambda_k I$ et d'une matrice nilpotente N_k.

Si A n'est pas diagonalisable, alors l'un des blocs nilpotents N_k n'est pas nul.

✍ *Cela signifie que λ_k n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A.*

Supposons par commodité que ce soit $N_1 \in \mathfrak{M}_{d_1}(\mathbb{C})$. Il existe (d'après ce qui précède) une suite $(P_{1,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_{1,\ell}^{-1} N_1 P_{1,\ell} = 0_{d_1}.$$

En posant $P_\ell = \mathrm{Diag}(P_{1,\ell}, I_{d_2}, \dots, I_{d_r}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$\lim_{\ell\to+\infty} P_\ell^{-1} A P_\ell = A' = \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, B_2, \dots, B_r).$$

Dans ces conditions, λ_1 est une racine simple du polynôme minimal de A' et comme, par hypothèse, λ_1 n'est pas une racine simple du polynôme minimal de A, on en déduit que A' n'est pas semblable à A.

Ainsi, la classe de similitude d'une matrice non diagonalisable n'est pas fermée.

5. Toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : il existe une matrice triangulaire $T \in S(A)$ et, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$,

$$\big\|(T + \varepsilon I_n) - T\big\| = |\varepsilon| \cdot \|I_n\| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(T + \varepsilon) = \mathrm{tr}\, T + n\varepsilon \neq \mathrm{tr}\, T = \mathrm{tr}\, A.$$

Par conséquent, toute boule de rayon strictement positif centrée en $T \in S(A)$ contient au moins une matrice qui n'est pas semblable à A et le point T n'appartient donc pas à l'intérieur de $S(A)$.

✍ *Toute boule de rayon strictement positif et centrée en T contient en fait une infinité de matrices qui ne sont pas semblables à A (puisque leur trace est différente de celle de A).*

❧ Considérons maintenant une matrice $M_0 \in S(A)$.

Mais la matrice M_0 est semblable à la matrice triangulaire T, donc il existe une matrice inversible P telle que $M_0 = PTP^{-1}$: la matrice T est donc un antécédent de la matrice M_0 par l'application continue $\Phi = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ (= un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie).

✍ *La conjugaison $\Phi = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est en fait un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice T est donc l'antécédent de M_0 par Φ. C'est ici sans importance.*

Si la matrice M_0 appartenait à l'intérieur de $S(A)$, alors $S(A)$ serait un voisinage de M_0. Par continuité de la conjugaison Φ, l'image réciproque par Φ de $S(A)$, voisinage de M_0, serait donc un voisinage de T. Mais la classe de similitude $S(A)$ est globalement invariant par conjugaison, donc $S(A)$ serait un voisinage de T et on a démontré que ce n'était pas le cas.

✍ *Dire que la classe de similitude est "invariante par conjugaison" signifie seulement qu'une matrice M est semblable à A si, et seulement si, elle est semblable à une matrice semblable à A !*

❧ Ainsi, la classe de similitude $S(A)$ n'est un voisinage d'aucun de ses points, c'est une partie d'intérieur vide.

✍ *Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.*

6. On a démontré que la classe de similitude d'une matrice nilpotente non nulle n'était pas bornée.
❧ Si la matrice A n'est pas diagonalisable, il en va de même. (La matrice A est, comme on l'a vu, semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une homothétie et d'un bloc nilpotent, l'un de ces blocs nilpotents n'étant pas nul.)
❧ Il reste donc à envisager le cas des matrices diagonalisables.
❧ Considérons deux complexes distincts a et b, ainsi qu'un réel $\varepsilon > 0$. En posant

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \qquad \text{on obtient} \qquad P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon = \begin{pmatrix} * & \frac{b-a}{\varepsilon} \\ * & * \end{pmatrix}$$

et comme $a \neq b$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon\|_\infty = +\infty.$$

La classe de similitude de D n'est donc pas bornée.

✍ *On retrouve dans ce calcul l'idée générale de l'exercice : si deux vecteurs propres se rapprochent indéfiniment, les conséquences sont visibles lors du changement de base.*

❧ On en déduit plus généralement que : si A est une matrice diagonalisable qui admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la classe de similitude de A n'est pas bornée.
❧ Finalement, la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, la matrice A est une matrice d'homothétie, auquel cas la classe de similitude $S(A)$ est réduite à $\{A\}$.

1. *Soient* E, *un espace vectoriel de dimension* n ; u *et* v, *des endomorphismes de* E.
On suppose que u *possède* n *valeurs propres distinctes et que* u *et* v *commutent :*

$$u \circ v = v \circ u.$$

Que peut-on en conclure sur v *?*

2. *Soit* E, *le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *engendré par les fonctions* cos *et* sin.

2. a. *Soit* $d \in L(E)$, *l'endomorphisme défini par*

$$\forall\, \varphi \in E, \quad d(\varphi) = \varphi'.$$

Démontrer qu'il existe $f \in L(E)$ *tel que* $f \circ f = d$.

2. b. *Soit* $s \in L(E)$, *l'endomorphisme qui échange* cos *et* sin. *Quelle est la nature géométrique de* s *?*
Existe-t-il $g \in L(E)$ *tel que* $g \circ g = s$ *?*

1. Comme u possède n valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$$

Comme u et v commutent, les sous-espaces propres $\mathbb{R} \cdot e_k$ de u sont stables par v et une droite stable par v est dirigée par un vecteur propre de v.

La famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres pour u qui sont aussi des vecteurs propres pour v.

Dans cette base, les endomorphismes u et v sont représentés par des matrices diagonales.

2. a. Les fonctions cos et sin ne sont pas proportionnelles, donc E est un plan vectoriel. On note $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$, la base de référence de cet espace vectoriel.

La dérivation est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Comme $\sin' = \cos$ et que $\cos' = -\sin$, le sous-espace E est stable par dérivation et d est bien un endomorphisme de E.

✍ *L'application* d *est l'endomorphisme de* E *induit par restriction de la dérivation à ce sous-espace stable.*

La matrice de d relative à la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^2.$$

L'endomorphisme $f \in L(E)$ défini par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie donc $f \circ f = d$.

✍ *Pour trouver* f *sans trop d'effort, il faut interpréter* d *comme la rotation plane d'angle* $\pi/2$ *: une "racine carrée" de* d *est la rotation d'angle* $\pi/4$.

2. b. Comme $\mathscr{B} = (\sin, \cos)$ est une base de E, il existe un, et un seul, endomorphisme de E tel que $s(\sin) = \cos$ et $s(\cos) = \sin$ (Théorème de caractérisation des applications linéaires).

❧ Cet endomorphisme est un automorphisme (l'image d'une base de E est encore une base de E) et c'est en fait une symétrie car $s \circ s = I_E$:

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$s(\sin + \cos) = \sin + \cos \qquad \text{et que} \qquad s(\sin - \cos) = -(\sin - \cos)$$

donc la matrice de s dans la base $\mathscr{C} = (\sin + \cos, \sin - \cos)$ est diagonale :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Toute symétrie est diagonalisable car elle admet un polynôme annulateur $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ scindé à racines simples.*

❧ *Les deux vecteurs $\sin + \cos$ et $\sin - \cos$ sont distincts du vecteur nul (puisque $\mathscr{B}$ est une famille libre). Ce sont donc des vecteurs propres de s associés à deux valeurs propres distinctes et ils constituent à ce titre une famille* libre.

❧ Supposons qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = s$. Alors g et s commutent (s est un polynôme en g) et s est diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes.

D'après la première question, la base $\mathscr{C}$ est donc une base de vecteurs propres pour g également. On doit donc avoir deux réels a et b tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g \circ c) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(s).$$

L'équation $b^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, donc il n'existe pas d'endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $g \circ g = s$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et que $P'(A)$ soit inversible. Démontrer que A est diagonalisable.

Comme la matrice $P(A)$ est diagonalisable, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $Q\big(P(A)\big) = 0_n$. Autrement dit : $(Q \circ P)$ est un polynôme annulateur de A.

✍ *En particulier, toutes les valeurs propres de A sont des racines de $(Q \circ P)$.*
Comme Q est à racines simples, ce n'est pas le polynôme nul. Et comme $P'(A)$ est inversible, alors P n'est pas un polynôme constant. De ce fait, la composée $Q \circ P$ n'est pas un polynôme constant.

❧ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A.
Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$, donc $P(\lambda)$ est une racine de Q et comme les racines de Q sont simples, alors

$$Q'\big(P(\lambda)\big) \neq 0.$$

De plus, il existe donc un vecteur non nul X tel que $AX = \lambda X$.

✍ *Pas de valeur propre sans vecteur propre !*

On en déduit que $P'(A)X = P'(\lambda)X$ et comme la matrice $P'(A)$ est inversible par hypothèse, son noyau est réduit au vecteur nul. Ainsi,

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad P'(\lambda) \neq 0.$$

❧ Comme $(Q \circ P)' = (Q' \circ P) \cdot P'$, on déduire des remarques précédentes que

$$(Q \circ P)'(\lambda) = Q'\big(P(\lambda)\big).P'(\lambda) \neq 0.$$

❧ Le polynôme $Q \circ P$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (Théorème de D'Alembert-Gauss). On a remarqué que toutes les valeurs propres de A étaient des racines de $Q \circ P$ et on a démontré que c'était des racines simples.
On peut donc factoriser $Q \circ P$ de la manière suivante :

$$Q \circ P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) \times \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)^{m_k},$$

aucun des scalaires μ_k n'étant une valeur propre de la matrice A.
Par conséquent, la matrice

$$\prod_{k=1}^{r} (A - \mu_k I_n)^{m_k}$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) et comme $(Q \circ P)(A) = 0_n$, on en déduit que

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0_n.$$

On a démontré qu'il existait un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

On étudie ici une série numérique de terme général

$$u_n = f\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$.

✍ *Il n'y a pas lieu de faire du zèle : peu importe pour quelles valeurs de n le terme u_n est défini, il suffit de savoir que u_n est défini à partir d'un certain rang.*

On sait que la fonction Arccos *est définie sur $[-1, 1]$ et comme*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in]-1, 1[,$$

le terme général u_n est bien défini à partir d'un certain rang.

❧ D'après la formule de Taylor,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + o(x^2),$$

donc $u_n = v_n + w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec

$$v_n = f'(0) \cdot \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n \underset{n\to+\infty}{=} f''(0) \cdot \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

❧ Pour x voisin de 0,

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2}} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{-4(\sqrt{3} + 2x)}{\left(1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2\right)^{3/2}}$$

donc $f'(0) = -2$ et $f''(0) = -4\sqrt{3}$.

✍ *Il n'est toujours pas utile de s'intéresser à l'ensemble de définition de f, il suffit ici de savoir que f est dérivable sur un voisinage de 0.*

❧ Nous pouvons maintenant être plus précis :

— la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}2}{n^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 0$ (Critère spécial des séries alternées) et (grossièrement) divergente pour $\alpha \leqslant 0$;

— comme

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}$$

et que le second membre est de signe constant (négatif), les deux séries sont de même nature et la série $\sum w_n$ est convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).

✍ *Il faut ici bien prendre soin de préciser que le signe du terme général est constant pour conclure.*

En effet, si $x_n \sim y_n$, alors la série $\sum x_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum y_n$ est absolument convergente (Théorème de comparaison par équivalence).

Si le terme général y_n est de signe constant, alors le terme général x_n est lui aussi de signe constant et, dans ces conditions, la convergence de la série équivaut à la convergence absolue.

❧ En conclusion :
- si $\alpha \leqslant 0$, alors $u_n \sim v_n$ et la série $\sum v_n$ diverge grossièrement, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge ;
- si $\alpha > 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ converge absolument, donc la série $\sum u_n$ converge.

✍ *Comme $u_n \sim v_n$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).*

On étudie la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \textit{où} \quad u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction f.*
2. *Démontrer que f est continue et strictement décroissante sur I.*
3. *Démontrer que f admet une limite au voisinage de $+\infty$ et calculer cette limite.*
4. *Trouver un équivalent de f au voisinage de 0. On **admettra** que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

1. Si $x > 0$, alors e^{-nx} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $u_n(x) \sim (e^{-x})^n$. Comme $0 < e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est absolument convergente et la série $\sum u_n(x)$ aussi.
Si $x \leqslant 0$, alors $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Le réel $f(x)$ est donc défini si, et seulement si, $x > 0$.

✍ *Telle qu'elle est posée, la question appelle une condition nécessaire et suffisante de convergence.*

2. Il est clair que chaque fonction u_n est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est strictement décroissante.

✍ *La fonction u_0 est constante !*

❧ Si $0 < x < y$, alors

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[u_n(x) - u_n(y)]}_{<0} < 0.$$

✍ *Il faut avoir justifié la convergence des deux séries pour utiliser la linéarité de la somme.*

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I.
❧ Pour $a > 0$, la décroissance de chaque fonction u_n nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a).$$

Et comme $a > 0$, la série (de terme général positif) $\sum u_n(a)$ est convergente. Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série absolument convergente, on a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction u_n est continue, on en déduit que la somme f est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$.
La fonction f est donc continue sur l'union de ces intervalles, c'est-à-dire sur $I =]0, +\infty[$.

✍ *Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$, alors on pourrait appliquer le Théorème d'interversion des limites, qui affirme en particulier que la série de terme général*

$$\ell_n = \lim_{x \to 0} u_n(x) = \ln 2$$

est convergente. Comme la série $\sum \ell_n$ diverge grossièrement, la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction f est décroissante et positive (les fonctions u_n sont toutes positives), donc elle tend vers une limite finie (positive) au voisinage de $+\infty$.
❧ Chaque fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$ (limite nulle pour tout $n \geqslant 1$; égale à $\ln 2$ pour $n = 0$). La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle

$[212, +\infty[$ (qui est un voisinage de $+\infty$), donc la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (merci, on savait déjà) ; la série des limites $\sum \ell_n$ converge (merci, on avait remarqué) et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \ell n\, 2.$$

✍ *Pour les mêmes raisons, la fonction f tend vers une limite, finie ou infinie, au voisinage de 0. Comme les fonctions u_n sont positives,*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > 0, \quad f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$$

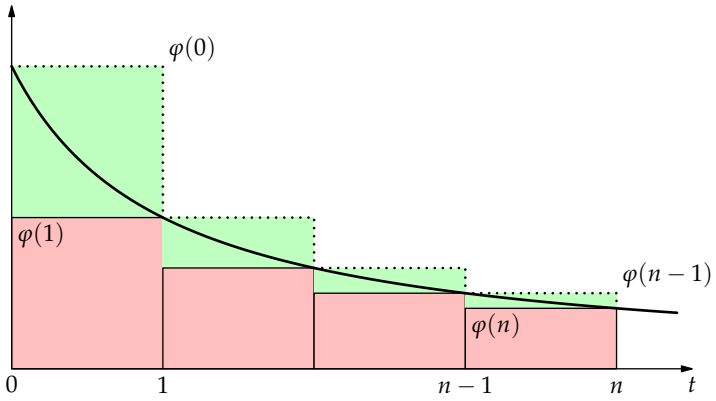
et comme l'existence des limites lorsque x tend vers 0 est assurée,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to 0} f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(0) = (N+1)\,\ell n\, 2.$$

On en déduit que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

4. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi = [t \mapsto \ell n(1 + e^{-tx})]$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. En comparant sommes et intégrale, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \leqslant \int_0^n \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x). \tag{†}$$



La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente à e^{-xt} lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et on peut donc passer à la limite dans (†).

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant f(x) \tag{‡}$$

❧ On effectue d'abord le changement de variable affine $s = xt$.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \ell n(1 + e^{-s})\,ds.$$

✍ *Ce changement de variable est possible car $x > 0$.*

❧ On effectue ensuite le changement de variable usuel $u = e^{-s}$.

$$\int_0^{+\infty} \ell n(1 + e^{-s})\,ds = \int_0^1 \frac{\ell n(1+u)}{u}\,du.$$

✍ *L'application $[s \mapsto e^{-s}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $J =]0, 1]$ et on a déjà établi l'intégrabilité de $[s \mapsto \ell n(1 + e^{-s})]$ sur I.*

❧ Le développement en série entière de $\ln(1+u)$ nous donne

$$\forall\, 0 < u < 1, \quad \frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1}.$$

On reconnaît ici une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1.

Les fonctions $a_n = [u \mapsto (-u)^n/(n+1)]$ sont continues sur le segment $[0,1]$ (et donc intégrables) ; la série de fonctions $\sum a_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme est continue (en tant que somme d'une série entière sur un intervalle contenu dans l'intervalle ouvert de convergence) ; enfin, la série de terme général

$$\int_0^1 \left|a_n(u)\right| du = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}\, du = \frac{1}{(n+1)^2}$$

est convergente.

D'après le Théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(u)\, du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(u)\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

et finalement

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{12x}.$$

✍ *La borne supérieure de l'intervalle d'intégration n'appartient pas à l'intervalle ouvert de convergence de la série entière ($1 \notin]-1,1[$), donc on ne peut ici se contenter d'indiquer qu'on intègre une série entière pour justifier l'intégration terme à terme.*

Il est prudent à ce propos de parler de primitivation terme à terme *pour les séries entières (on intègre terme à terme sur un segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence).*

Soit $(G,*)$, un groupe fini d'élément neutre e. On suppose que

$$\forall\, x \in G, \qquad x^2 = e.$$

1. *Démontrer que le groupe $(G,*)$ est abélien.*
2. *Soient H, un sous-groupe strict de G et $a \in G \setminus H$. On pose*

$$aH = \{a * x,\ x \in H\}.$$

2. a. *Démontrer que les ensembles H et aH ont même cardinal.*
2. b. *Démontrer que H et aH sont disjoints.*
2. c. *Démontrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G.*
3. *Démontrer que le cardinal de G est une puissance de 2.*
4. *Calculer le produit des éléments de G.*

1. Soient g et h, deux éléments de G. Dans tout groupe, on sait que

$$(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}.$$

Or, par hypothèse, $x^{-1} = x$ pour tout $x \in G$. En appliquant cette propriété à g, à h ainsi qu'à $(g * h)$, on obtient

$$g * h = (g * h)^{-1} = h * g.$$

Le groupe $(G,*)$ est donc commutatif.

2. a. Comme a admet un symétrique dans G, l'application $\varphi_a = [x \mapsto a * x]$ est une bijection de G dans G et cette bijection est même une involution :

$$\forall\, x \in G, \qquad \varphi_a\big(\varphi_a(x)\big) = a * (a * x) = a^2 * x = x.$$

✍ *Une **involution** est une bijection $f : G \to G$ qui est sa propre réciproque :*

$$\forall\, x \in G, \quad f^{-1}(x) = f(x) \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \forall\, x \in G, \quad f\big(f(x)\big) = x.$$

Par exemple, toute symétrie centrale ou axiale est une involution.

L'application φ_a est donc injective.
❧ Par définition de aH, l'application φ_a induit une application surjective de H sur aH et comme φ_a est injective, l'application induite est une bijection de H sur aH.
❧ En particulier, les ensembles H et aH ont même cardinal.

2. b. Si $x \in H \cap aH$, alors il existe deux éléments h_1 et h_2 de H tels que

$$x = h_1 = a * h_2.$$

On en déduit en multipliant à droite par h_2^{-1} que

$$H \ni h_1 * h_2^{-1} = a \notin H$$

puisque H est un sous-groupe de $(G,*)$. C'est absurde, donc l'intersection $H \cap aH$ est vide.

✍ *En particulier, l'ensemble aH ne contient pas l'élément neutre e (qui appartient au sous-groupe H), donc aH n'est pas un sous-groupe de $(G,*)$.*

2. c. Il est clair que l'union $H \cup aH$ est contenue dans G.
❧ Comme H est un sous-groupe de $(G,*)$, on sait que

$$e \in H \subset H \cup aH.$$

❧ Soient x et y dans $H \cup aH$. Il faut démontrer que $x * y^{-1} \in H \cup aH$ et quatre cas se présentent. Il existe deux éléments h_1 et h_2 de H tels que :
— $x = h_1$ et $y = h_2$, donc $x * y^{-1} = h_1 * h_2^{-1} \in H$ puisque H est un sous-groupe ;

— $x = a * h_1$ et $y = h_2$, donc $x * y^{-1} = a * (h_1 * h_2^{-1}) \in aH$ puisque H est un sous-groupe ;
— $x = h_1$ et $y = ah_2$, donc $x * y^{-1} = h_1 * (h_2^{-1} * a^{-1}) = a * (h_1 * h_2)$ puisque $(G, *)$ est un groupe commutatif où tout élément est son propre symétrique et comme H est un sous-groupe, le produit $h_1 * h_2$ appartient à H et $x * y^{-1} \in aH$;
— $x = a * h_1$ et $y = a * h_2$, donc

$$x * y^{-1} = a * h_1 * h_2^{-1} * a^{-1} = a^2 * h_1 * h_2 = h_1 * h_2 \in H$$

pour les mêmes raisons.

Dans tous les cas, on a démontré que $x * y^{-1} \in H \cup aH$.

On a ainsi démontré que $H \cup aH$ était un sous-groupe de $(G, *)$.

3. On procède par récurrence.

❧ L'ensemble $H_0 = \{e\}$ est un sous-groupe de $(G, *)$ de cardinal $1 = 2^0$.
❧ HR : On suppose connu un sous-groupe H_n de $(G, *)$ de cardinal 2^n.
❧ Deux cas se présentent.
— Si $H_n = G$, alors le cardinal de G est une puissance de 2.
— Sinon, H_n est un sous-groupe strict de G et il existe donc $a_{n+1} \in G \setminus H_n$. D'après la question précédente, l'ensemble

$$H_{n+1} = H_n \cup a_{n+1} H_n$$

est un sous-groupe de $(G, *)$ et

$$\#(H_{n+1}) = \#(H_n) + \#(a_{n+1} H_n) = 2\#(H_n) = 2^{n+1}.$$

❧ Comme G est un ensemble fini, que $\#(H_n) = 2^n$ pour tout entier n tel que H_n soit défini et que la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que H_N soit défini mais que H_{N+1} ne soit pas défini.

On en déduit alors que $G = H_N$ et donc que $\#(G) = 2^N$.

✍ *Exemples avec $\#(G) = 2$: $\{\pm 1\}$ en tant que sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ ou $\{\pm I_2\}$ en tant que sous-groupe du groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations planes.*

Exemples avec $\#(G) = 4$:

$$\left\{ I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en tant que sous-groupe du groupe $(SO_3(\mathbb{R}), \times)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ ou le sous-groupe

$$V_4 = \{I, (\ 1\ \ 2\ ), (\ 3\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ )\}$$

en tant que sous-groupe du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.

4. Comme l'opération $*$ est associative et commutative, on peut définir le produit des éléments de G sans qu'il soit nécessaire de préciser la position des différents facteurs (commutativité), ni la position des parenthèses qui détermine l'ordre chronologique des opérations (associativité).

❧ Puisque $H_{n+1} = H_n \cup a_n H_n$ et que H_n et $a_n H_n$ sont disjoints,

$$\prod_{x \in H_{n+1}} x = \left(\prod_{y \in H_n} y \right) * \left(\prod_{z \in a_n H_n} z \right) = \left(\prod_{y \in H_n} y \right) * \left(\prod_{y \in H_n} (a_n * y) \right).$$

Comme le groupe $(G, *)$ est abélien et que $y^2 = e$ pour tout $y \in G$,

$$\prod_{x \in H_{n+1}} x = a_n^{\#(H_n)} * \left(\prod_{y \in H_n} y^2 \right) = a_n^{\#(H_n)} = a_n^{2^n}.$$

❧ Si $G = H_0 = \{e\}$, alors le produit des éléments de G est égal à e !
Si $G = H_1$, alors $G = \{e, a_1\}$ avec $a_1 \neq e$ et le produit des éléments de G est égal à a_1.
Si $G = H_{n+1}$ avec $n \geqslant 1$, alors 2^n est un entier *pair*, donc $a_n^{2^n} = e$ et le produit des éléments de G est égal à e.

Soit $(G,\cdot)$, un groupe abélien. On considère deux éléments x et y de G en supposant que l'ordre $a \in \mathbb{N}^*$ de x et l'ordre $b \in \mathbb{N}^*$ de y sont premiers entre eux.

1. *Démontrer que l'ordre de xy est égal à ab.*

2. *Démontrer que le sous-groupe $\langle xy\rangle$ engendré par le produit xy est l'ensemble*

$$H = \{x^m \cdot y^n,\ 0 \leqslant m < a, 0 \leqslant n < b\}.$$

1. Comme le groupe est commutatif,

$$(xy)^{ab} = x^{ab} \cdot y^{ab} = (x^a)^b \cdot (y^b)^a = e^b \cdot e^a = e.$$

Par conséquent, l'ordre de xy divise l'entier $ab \in \mathbb{N}^*$.

❧ Réciproquement, supposons qu'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ vérifie $(xy)^m = e$. On en déduit que $x^m \cdot y^m = e$ (puisque le groupe est commutatif) et donc que $x^m = y^{-m}$ ou, ce qui revient au même $x^{-m} = y^m$.

On a donc

$$y^{am} = (y^m)^a = (x^{-m})^a = (x^a)^{-m} = e^{-m} = e,$$

ce qui prouve que l'ordre b de y divise l'exposant am.

✍ *L'ensemble des exposants $k \in \mathbb{Z}$ tels que $y^k = e$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ et, par définition, l'ordre b de y est l'unique générateur positif de ce sous-groupe.*

Par conséquent,

— *$y^k = e$ si, et seulement si, l'ordre b divise l'exposant k;*

— *l'ordre b de y est le plus petit entier strictement positif k tel que $y^k = e$.*

Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux, donc b divise m (Théorème de Gauss) et donc $y^m = e$.

Par symétrie, a divise m et $x^m = e$.

On a ainsi démontré que m était divisible par a et par b, donc divisible par ab (puisque a et b sont premiers entre eux).

2. D'après la question précédente,

$$H = \{(xy)^k,\ 0 \leqslant k < ab\}.$$

✍ *D'après le cours sur l'ordre d'un élément, les puissances $(xy)^k$ sont deux à deux distinctes lorsque l'exposant k parcourt $[\![0, ab[\![$.*

On a démontré plus haut que : si $(xy)^m = e$, alors $x^m = y^m = e$ et m est un multiple de a et de b. On pourrait démontrer de la même manière que : si $x^m \cdot y^n = e$, alors $x^m = y^n = e$, m est un multiple de a et n est un multiple de b.

On en déduit facilement que les produits $x^m \cdot y^n$ sont deux à deux distincts lorsque le couple (m,n) parcourt $[\![0,a[\![\times[\![0,b[\![$.

❧ Soit $0 \leqslant k < ab$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on peut effectuer les divisions euclidiennes de k par a et par b. Il existe donc des entiers q_a, q_b, r_a et r_b tels que

$$k = aq_a + r_a = bq_b + r_b \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r_a < a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_b < b.$$

Alors, comme le groupe est commutatif et que $x^a = y^b = e$,

$$(xy)^k = x^k y^k = (x^a)^{q_a} \cdot x^{r_a} \cdot (y^b)^{r_b} \cdot y^{r_b} = x^{r_a} \cdot y^{r_b}.$$

❧ Réciproquement, soient deux entiers $0 \leqslant m < a$ et $0 \leqslant n < b$. Comme a et b sont premiers entre eux, on déduit du Lemme chinois qu'il existe un (unique) entier $0 \leqslant p < ab$ tel que

$$p \equiv m \pmod{a} \qquad \text{et} \qquad p \equiv n \pmod{b}.$$

Il existe donc deux entiers relatifs k_a et k_b tels que

$$p = ak_a + m = bk_b + n$$

et on en déduit que

$$x^m \cdot y^n = e \cdot x^m \cdot e \cdot y^n = (x^a)^{k_a} \cdot x^m \cdot (y^b)^{k_b} \cdot y^n = x^{ak_a+m} \cdot y^{bk_b+n} = (xy)^p \in H.$$

❧ On a ainsi démontré l'égalité des deux ensembles par double inclusion.

Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = \omega$. On suppose que F est un plan vectoriel stable par f. Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset F$.

Comme f^2 est l'endomorphisme nul, l'image de f est contenue dans son noyau :

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et en particulier} \quad \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f.$$

Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

Par conséquent, $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 1$.

- Si $\dim \operatorname{Im} f = 0$, alors $\operatorname{Im} f = \{0\} \subset F$.
- Supposons donc que $\dim \operatorname{Im} f = 1$. D'après le Théorème du rang, le noyau de f est un plan et on considère un plan F stable par f :

$$\forall\, x \in F, \qquad f(x) \in F.$$

Deux cas se présentent :

— S'il existe un vecteur $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0)$ est un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} f$ et comme $f(x_0) \in F$ et que F est un sous-espace,

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \cdot f(x_0) \subset F.$$

— Sinon, $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$, donc $F \subset \operatorname{Ker} f$ et comme ces deux sous-espaces sont des plans, on a donc $F = \operatorname{Ker} f$ et finalement

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f = F.$$

On a démontré que, dans tous les cas, l'image de f était contenue dans le plan stable F.

Soient E, *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, *une famille d'endomorphismes non identiquement nuls tels que*

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i.$$

Démontrer que le rang de chaque endomorphisme p_i *est égal à* 1 *et que*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i.$$

Comme p_i n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, son rang est au moins égal à 1, donc la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

❧ Pour démontrer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \qquad \text{et que} \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i \in \operatorname{Im} p_i.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_j(x_i)$$

Par hypothèse, les endomorphismes p_i sont des projecteurs :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad p_i \circ p_i = \delta_{i,i} \cdot p_i = p_i.$$

Par conséquent, comme $x_i \in \operatorname{Im} p_i$ par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i = p_i(x_i)$$

et donc

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} p_j\big(p_i(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{j,i} \cdot p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j.$$

Comme tous les vecteurs x_j sont nuls, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_j$ sont bien en somme directe.

❧ En particulier,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim \operatorname{Im} p_i \geqslant n$$

puisque la dimension de chaque sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

Par ailleurs, la dimension d'un sous-espace de E est toujours inférieure à celle de E, donc

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\right) \leqslant \dim E = n.$$

Ainsi,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\right) = n = \dim E.$$

✍ *Si* F *est un sous-espace de* E, *espace vectoriel de dimension finie, et que* $\dim F = \dim E$, *alors* $F = E$.

On en déduit d'une part l'égalité des deux espaces vectoriels (inclusion et égalité des dimensions) :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$$

et d'autre part que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \dim \operatorname{Im} p_i = 1.$$

✍ *Si la somme de* n *entiers supérieurs à* 1 *est égale à* n, *alors chaque terme est égal à* 1 :

$$0 = n - \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1 - d_i)}_{\leqslant 0}.$$

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une application continue de période $T > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et une application $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et non identiquement nulle telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \textit{et} \quad X(t+T) = X(t).$$

Comme A est une application continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, on déduit de la Théorie de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble S_H des solutions $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un espace vectoriel de dimension n.

❧ Soit $X \in S_H$ et posons

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(X)(t) = X(t+T).$$

Il est clair que $\Phi(X)$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}^n$. De plus, comme A est périodique de période T,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad [\Phi(X)]'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)[\Phi(X)](t),$$

ce qui prouve que $\Phi(X) \in S_H$.

❧ On vérifie sans peine que Φ est une application linéaire.

Ainsi, Φ est un endomorphisme de S_H, espace vectoriel complexe de dimension finie, donc Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X_\lambda \in S_H$, non identiquement nulle (un valeur propre n'est jamais nul).

Enfin, par définition de Φ,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t+T) = \lambda X_\lambda(t).$$

Si la valeur propre λ était nulle, on pourrait en déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t) = \lambda X_\lambda(t-T) = 0,$$

ce qui est absurde puisque X_λ est un **vecteur propre**.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonalisable telle que $\operatorname{tr} A > 0$. On suppose qu'il existe une fonction $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \textit{et que} \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants nous montre que les solutions du système homogène $x'(t) = Ax(t)$ sont les applications $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(tA)\big(x(0)\big).$$

❧ Comme la matrice A est diagonalisable, l'espace $\mathbb{R}^n$ est la somme (directe, forcément directe) des sous-espaces propres de A :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n).$$

En notant $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A, il existe une, et une seule, famille de vecteurs $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ telle que

$$x(0) = \sum_{k=1}^{r} u_k \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad u_k \in \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=1}^{r} \exp(tA)(u_k) = \sum_{k=1}^{r} e^{t\alpha_k} \cdot u_k. \tag{‡}$$

✍ *Il faut bien distinguer l'application $\exp = [M \mapsto \exp(M)]$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, qui est développable en série entière, et l'application $\exp(M) = [x \mapsto \exp(M)x]$, qui est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ puisque $\exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

✍ *Avec $Mu = \alpha \cdot u$, on a $M^k u = \alpha^k \cdot u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\right)(u) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot u$$

Par définition de $\exp(M)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \left|\!\left|\!\left| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \right|\!\right|\!\right| = 0$$

et par définition de $|||\cdot|||$,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\right)(u) \right\| \leqslant \left|\!\left|\!\left| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \right|\!\right|\!\right| \|u\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| \exp(M)(u) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha^k}{k!}\right) \cdot u \right\| = 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \exp(M)(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\right) \cdot u = e^{\alpha} \cdot u.$$

❧ Supposons que les valeurs propres de A soient indexées de manière décroissante :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r.$$

De plus, la trace de A est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité). Comme cette trace est strictement positive, la matrice A admet au moins une valeur propre *strictement positive*, donc $\alpha_1 > 0$.

On déduit de la décomposition (‡) que

$$u_1 = e^{-t\alpha_1} x(t) - \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \cdot u_k$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \|u_1\| \leqslant e^{-t\alpha_1} \big\|x(t)\big\| + \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \|u_k\|.$$

Comme $x(t)$ tend vers le vecteur nul et que $(\alpha_k - \alpha_1) < 0$ pour tout $k \geqslant 2$, on en déduit que le second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\|u_1\| = 0$ et u_1 est le vecteur nul.

✍ *On pourrait continuer sur cette lancée et en déduire (par récurrence finie) que $u_k = 0$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant r$ tel que $\alpha_k \geqslant 0$.*

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \operatorname{Vect}(u_2, \dots, u_r) \subset \bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Par définition, la dimension d'un sous-espace propre est toujours au moins égale à 1, donc

$$\dim \bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) = \sum_{k=2}^{r} \dim \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) < \dim E.$$

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un hyperplan H de E tel que

$$\bigoplus_{k=2}^{r} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n) \subset H$$

et donc tel que $x(t) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc il existe une forme linéaire ℓ, non identiquement nulle, telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$ et donc telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$

Soient a et n, deux entiers naturels non nuls. On répartit $N = an$ boules dans n urnes. On pose alors $T_i = 1$ si l'urne i est vide et $T_i = 0$ sinon. On note Y_n, le nombre d'urnes vides et

$$S_n = \frac{Y_n}{n}.$$

1. *Proposer un modèle probabiliste pour lequel les $T_1, \dots, T_n$, Y_n et S_n sont des variables aléatoires.*
2. *Déduire de ce modèle la loi, l'espérance et la variance de T_i.*
3. *Déterminer l'espérance et la variance de S_n.*

1. On considère une famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

✍ *On modélise ainsi la répartition des N boules parmi les n urnes : l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé lorsque la boule k arrive dans l'urne i.*

On définit alors des variables aléatoires de Bernoulli $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ en posant

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad [T_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \neq i]$$

et la variable aléatoire T_i est bien égale à 1 si, et seulement si, l'urne i est vide (= toutes les boules sont rangées dans une autre urne).

✍ *Une fonction $T : \Omega \to [\![0, 1]\!]$ est une variable aléatoire (de Bernoulli) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ si, et seulement si, l'image réciproque $[T = 1]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.*
Comme les X_k sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, il est clair que $[T_i = 1]$ est un élément de $\mathcal{A}$ (en tant qu'intersection d'un nombre fini d'évènements).

❧ Le nombre d'urnes vides est le nombre d'indices $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que la variable aléatoire T_i prend la valeur 1. Par conséquent,

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires).

L'application S_n est aussi une combinaison linéaire des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$, donc c'est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

2. Puisque la variable aléatoire T_i ne prend que les valeurs 0 et 1, sa loi est une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et par conséquent $\mathbf{E}(T_i) = p$ et $\mathbf{V}(T_i) = pq$ (en posant $q = 1 - p$).

Comme les X_k sont, par construction, indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad p = \mathbf{P}(T_i = 1) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_k \neq i) = \big[1 - \mathbf{P}(X_k = i)\big]^N = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N.$$

✍ *Les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ suivent donc toutes la même loi. Elles ne sont pas indépendantes, car l'évènement*

$$\bigcap_{i=1}^{n} [T_i = 1]$$

est impossible (les urnes ne peuvent pas être toutes vides !), alors que la probabilité

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(T_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nN}$$

est strictement positive.

3. Par bilinéarité et symétrie de la covariance,

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(T_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{Cov}(T_i, T_j)\Big)$$

et comme les variables aléatoires T_i suivent toutes la même loi, on déduit de la formule de Koenig-Huyghens que

$$\mathbf{Cov}(T_i, T_j) = \mathbf{E}(T_iT_j) - \mathbf{E}(T_i)\,\mathbf{E}(T_j) = \mathbf{E}(T_iT_j) - [\mathbf{E}(T_1)]^2.$$

En tant que produit de deux variables aléatoires de Bernoulli, la variable aléatoire T_iT_j suit aussi une loi de Bernoulli et $\mathbf{E}(T_iT_j) = \mathbf{P}(T_iT_j = 1)$. Or

$$[T_iT_j = 1] = [T_i = 1] \cap [T_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \neq i, X_k \neq j] = \bigcap_{k=1}^{N} [X_k \notin \{i, j\}].$$

Les variables aléatoires X_k étant indépendantes et de loi uniforme, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \qquad \mathbf{E}(T_iT_j) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X_k \notin \{i, j\}) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^N.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\Big(n\,\mathbf{V}(T_1) + 2\binom{n}{2}\,\mathbf{Cov}(T_1, T_2)\Big)\\ &= \frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n}\Big[\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^N - p^2\Big]\end{aligned}$$

où p et $q = 1 - p$ ont été calculés à la question précédente.

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que la variable aléatoire X_k suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_k)$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1+\cdots+p_n}{n} = p \in [0,1].$$

On étudie ici la ***moyenne empirique***

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. *Déterminer l'espérance de M_n.*

2. *Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbf{V}(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

3. *Soit $\varepsilon > 0$.*

3. a. *Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

3. b. *En déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

1. Les variables aléatoires X_k sont des variables aléatoires d'espérance finie, donc M_n est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$$

par linéarité de l'espérance.

✍ *On doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli est égale au paramètre de la loi.*

2. Les variables aléatoires X_k sont des variables aléatoires de variance finie, donc M_n est une variable aléatoire de variance finie et, par indépendance des X_k,

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k).$$

✍ *Toute variable aléatoire bornée (ou presque sûrement bornée) admet des moments de tout ordre : c'est donc une variable aléatoire d'espérance finie et une variable aléatoire de variance finie.*

❧ On sait bien que $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \mathbf{V}(M_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}.$$

Par encadrement, la variance de M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *On a ainsi démontré que l'espérance de M_n (= la valeur moyenne des observations réalisées) tendait vers le paramètre p cependant que la variance de M_n (= la dispersion de ces valeurs) tendait vers 0. On dit que M_n est un* ***estimateur convergent*** *de p.*

3. a. Comme M_n est une variable aléatoire de variance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}\left(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\right) \leqslant \frac{4\,\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$$

et comme $\mathbf{V}(M_n)$ tend vers 0, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

3. b. La suite de terme général $\mathbf{E}(M_n)$ converge vers p. Comme $\varepsilon/2 > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad |M_n - p| \leqslant \varepsilon/2.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\big||M_n(\omega) - p| - |\mathbf{E}(M_n) - p|\big| \leqslant |M_n(\omega) - \mathbf{E}(M_n)|.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant N$, si $|M_n(\omega) - p| \geqslant \varepsilon$, alors

$$|M_n(\omega) - p| - |\mathbf{E}(M_n) - p| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

et par conséquent

$$|M_n(\omega) - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2.$$

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \big[|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\big].$$

En conséquence, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \mathbf{P}\big(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathbf{P}\big(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geqslant \varepsilon/2\big) \leqslant \frac{4\,\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

On en déduit (Théorème d'encadrement) que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$