
ORAUX MPSI JUIN 2025

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Démontrer que

$$\forall M \in E, \quad M^3 = 0.$$

3. On pose

$$\forall M \in E, \quad \exp(M) = I + M + \frac{1}{2}M^2 \quad \text{et} \quad \ln(I + M) = M - \frac{1}{2}M^2.$$

Vérifier que les matrices $\exp(M) - I$ et $\ln(I + M)$ appartiennent toutes deux à E , puis que

$$\ln(\exp(M)) = M \quad \text{et} \quad \exp(\ln(I + M)) = I + M.$$

4. Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp(kM) = [\exp(M)]^k.$$

Démontrer que $\exp(M)$ est inversible et que son inverse est $\exp(-M)$.

5. À quelle condition a-t-on

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad ?$$

1. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à E si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c tels que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,2} + bE_{1,3} + cE_{2,3}$$

donc

$$E = \text{Vect}(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$$

et par conséquent $\dim E = 3$.

2. Démontrons un peu plus que le résultat demandé : quels que soient les réels $a_1, a_2, a_3, \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et on voit ainsi que $M^2 \in E$ et que $M^3 = 0_3$.

3. Il est clair sur les définitions que

$$\exp(M) - I \in \text{Vect}(M, M^2) \quad \text{et que} \quad \ln(I + M) \in \text{Vect}(M, M^2).$$

On a remarqué à la question précédente que $M^2 \in E$ (quelle que soit la matrice $M \in E$) et par conséquent $\text{Vect}(M, M^2)$ est un sous-espace de E . Donc

$$\forall M \in E, \quad \exp(M) - I \in E \quad \text{et} \quad \ln(I + M) \in E.$$

4. On procède par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k = 1$, l'égalité est évidente.

On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\exp(kM) = [\exp(M)]^k$.

Alors

$$\begin{aligned} [\exp(M)]^{k+1} &= \exp(kM) \cdot \exp(M) && \text{(HR)} \\ &= \left(I + kM + \frac{k^2}{2}M^2 \right) \left(I + M + \frac{1}{2}M^2 \right) \\ &= I + (k+1)M + \frac{(k+1)^2}{2}M^2 \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $M^3 = 0_3$.

♣ La matrice $\exp(M)$ est inversible car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls :

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & a & b + (a+c)b/2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♣ Par définition,

$$\exp(M) \cdot \exp(-M) = \left(I + M + \frac{1}{2}M^2\right) \left(I - M + \frac{1}{2}M^2\right) = I$$

(toujours en tenant compte de la relation $M^3 = 0_3$).

Lorsqu'un produit de deux matrices carrées est égal à la matrice I , les deux matrices sont inverses l'une de l'autre. Donc $\exp(-M)$ est bien l'inverse de $\exp(M)$.

✎ Il n'est pas nécessaire de vérifier que le produit $\exp(-M) \cdot \exp(M)$ est aussi égal à I (Théorème du rang!).

On sait que les puissances de M commutent entre elles (associativité du produit matriciel), donc deux polynômes en M commutent entre eux et par conséquent $\exp(M)$ et $\exp(-M)$ commutent. (On vérifie ainsi que $\exp(-M) \cdot \exp(M) = I$ sans faire aucun calcul matriciel.)

5. En développant $\exp(A+B)$ et $\exp(A)\exp(B)$, on trouve que ces deux matrices sont égales si, et seulement si,

$$BA - AB = A^2B - AB^2 + \frac{1}{2}A^2B^2.$$

✎ Attention en développant $(A+B)^2$, a priori les matrices A et B ne commutent pas!

Les calculs menés à la question 2. montrent que les matrices A^2B , AB^2 et A^2B^2 sont nulles, donc

$$\forall A, B \in E, \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \iff AB = BA.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $2(\sqrt{2}-1)$.

2. En comparant la somme à une intégrale, encadrer

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

3. En déduire que

$$u_n = 2(\sqrt{2}-1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

1. La fonction

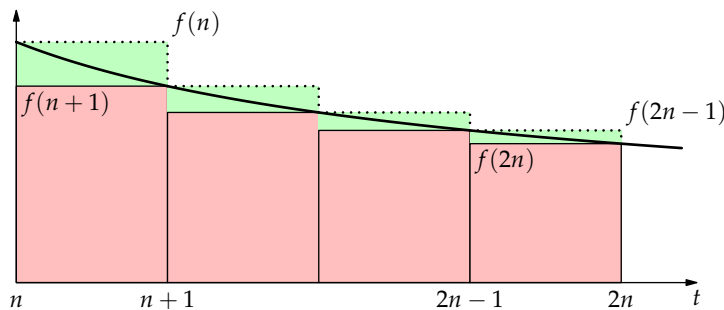
$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right]$$

est continue sur le segment $[0, 1]$. Par conséquent, la somme de Riemann u_n converge vers

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

2. Comme la fonction $f = [t \mapsto 1/\sqrt{t}]$ est décroissante sur le segment $[n, 2n]$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_n^{2n} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{2n-1} f(k).$$



Autrement dit,

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \int_n^{2n} f(t) dt \leq S_n \leq \int_n^{2n} f(t) dt$$

et donc, en explicitant l'intégrale,

$$(\sqrt{2}-1) \left[2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] \leq S_n \leq (\sqrt{2}-1) 2\sqrt{n}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

On déduit de l'encadrement de S_n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}n} \leq u_n - 2(\sqrt{2}-1) \leq 0$$

et donc en particulier que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2(\sqrt{2}-1) + \mathcal{O}(1/n).$$

Soient p et q , deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont deux fonctions de période $T > 0$, toutes deux solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

et que $f(0) = g'(0) = 1$, $f'(0) = g(0) = 0$.

1. Démontrer que la fonction $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

En déduire que la fonction W ne s'annule jamais.

2. Démontrer que

$$\int_0^T p(t) dt = 0$$

puis que p est une fonction de période T .

1. Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ (en tant que solutions d'une équation différentielle du second ordre), la fonction W définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \quad (*)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

On exprime $f''(x)$ et $g''(x)$ au moyen de l'équation différentielle et, après simplifications, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = -p(x)W(x).$$

• La fonction W est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Comme la fonction p est continue, elle admet des primitives et, en notant P_0 , une primitive de p , il existe donc une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = A \exp[-P_0(x)].$$

En particulier,

$$W(0) = f(0)g'(0) - f'(0)g(0) = 1 = A \exp[-P_0(0)]$$

donc la constante A n'est pas nulle et $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque $\exp$ ne prend jamais la valeur 0).

2. Comme W ne s'annule jamais, on peut exprimer p en fonction de W :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{-W'(x)}{W(x)} \quad (\dagger)$$

et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x p(t) dt = \ln \frac{W(0)}{W(x)}.$$

• Reconnaitre une dérivée logarithmique, c'est bien. Savoir l'intégrer en faisant apparaître un quotient strictement positif et sans dimension, c'est mieux (et très utile en Physique).

• Comme f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et périodiques, de période T , leurs dérivées f' et g' sont aussi des fonctions périodiques, de période T et W est aussi périodique, de période T d'après (*).

Ainsi, $W(T) = W(0)$ et

$$\int_0^T p(t) dt = \ln \frac{W(0)}{W(0)} = 0.$$

• La fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique, de période T , donc sa dérivée W' est elle aussi périodique, de période T . On déduit de ($\dagger$) que p est périodique, de période T .

On note $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^3$ est **stable par** u lorsque

$$\forall \mathbf{x} \in F, \quad u(\mathbf{x}) \in F.$$

1. Montrer que la droite dirigée par le vecteur $\mathbf{e}_3$:

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_3$$

et le plan dirigé par les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$:

$$\mathcal{P} = \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

sont deux sous-espaces stables par u .

2. Calculer le rang de $A + I_3$ et de $A - 3I_3$.

3. Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, sans calculer P^{-1} , démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{e}_3$ et par linéarité de u ,

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \cdot u(\mathbf{e}_3) = \alpha \cdot \mathbf{e}_3 \in \mathcal{D}.$$

La troisième colonne de la matrice A nous donne $u(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$.

Soit maintenant $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Il existe deux réels α et β tels que $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \beta \cdot \mathbf{e}_2$ et par linéarité de u ,

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \cdot u(\mathbf{e}_1) + \beta \cdot u(\mathbf{e}_2) \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathcal{P}.$$

La première et la deuxième colonnes de A nous disent que

$$u(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad u(\mathbf{e}_2) = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

On a ainsi démontré que les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ étaient stables par u .

2. On écrit les deux matrices :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, les deux premières colonnes sont proportionnelles (donc le rang est inférieur à 2) et la troisième colonne est linéairement indépendante des deux premières (donc le rang est supérieur à 2).

Par conséquent, $\text{rg}(A + I_3) = \text{rg}(A - 3I_3) = 2$.

✎ Pour la matrice $A + I_3$, on a $C_1 - C_2 = 0$, donc la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de $(A + I_3)$.

Pour la matrice $A - 3I_3$, on a $C_1 + C_2 = 0$, donc la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de $(A - 3I_3)$.

3. Les deux premières colonnes de P ne sont pas proportionnelles (donc le rang est supérieur à 2) et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières, donc $\text{rg } P = 3$ et la matrice P est inversible.

✎ Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n .

♣ La matrice P est donc la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à une nouvelle base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Plus précisément, les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont représentés sur les colonnes de la matrice P par leurs coordonnées relatives à la base $\mathcal{B}_0$. On a donc :

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3 = e_3. \quad (*)$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$:

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2), u(\varepsilon_3)).$$

♣ D'après (*),

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_1)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(3 \cdot \varepsilon_1)$$

et par conséquent, $u(\varepsilon_1) = 3 \cdot \varepsilon_1$.

De même,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_2)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(-\varepsilon_2)$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u(\varepsilon_3)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_3).$$

On a donc $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$.

En résumé,

$$\begin{array}{ll} u(\varepsilon_1) = 3 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 & \text{(première colonne de } P^{-1}AP) \\ u(\varepsilon_2) = 0 \cdot \varepsilon_1 + (-1) \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 & \text{(deuxième colonne)} \\ u(\varepsilon_3) = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3 & \text{(troisième colonne)} \end{array}$$

et on a bien

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✎ On ne change pas de base pour le plaisir, mais parce qu'on a trouvé une base qui permet de représenter plus simplement l'endomorphisme u .

On aura peut-être remarqué que le vecteur $\varepsilon_3 = e_3$ dirige la droite stable $\mathcal{D}$ et que les vecteurs ε_1 et ε_2 appartiennent respectivement au noyau de $(A - 3I_3)$ et au noyau de $(A + I_3)$. Ce n'est pas une coïncidence !

1. Soient $0 \leq m < n$, deux entiers. En linéarisant, démontrer que

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt \, dt = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.a. Démontrer qu'il existe des réels

$$(a_0, \dots, a_n)$$

tels que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \cos^n t = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt.$$

2.b. Démontrer que cette famille $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est unique.

2.c. Vérifier en particulier que

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \cos^n t \cos nt \, dt.$$

1. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos mt \cos nt = \frac{\cos(m+n)t + \cos(m-n)t}{2}.$$

Comme $m-n \neq 0$ (puisque $m < n$ et que $m+n \neq 0$ (car $m \geq 0$ et $n \geq 1$)),

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt \, dt = \left[\frac{\sin(m+n)t}{m+n} + \frac{\sin(m-n)t}{m-n} \right]_0^\pi = 0.$$

2.a. D'après la formule du binôme,

$$\cos^n t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{it})^k (e^{-it})^{n-k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t}.$$

On rappelle la propriété de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

et on remarque que $e^{i[2(n-k)-n]t} = e^{i(n-2k)t} = e^{-i(2k-n)t}$.

Si $n = 2r$ est un entier pair, alors

$$\cos^n t = 2^{-n} \left[\underbrace{\binom{2r}{r}}_{k=r} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} 2 \cos(2k-n)t \right] = \frac{1}{4^r} \left[\binom{2r}{r} + \sum_{\ell=1}^r 2 \binom{2r}{r-\ell} \cos 2\ell t \right]$$

avec le changement d'indice $k = r - \ell$ (et la parité de $\cos$).

Si $n = 2r + 1$ est un entier impair, alors

$$\cos^n t = 2^{-n} \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} 2 \cos(2k-n)t = \frac{1}{4^r} \sum_{\ell=0}^r \binom{2r+1}{r-\ell} \cos(2\ell+1)t$$

(avec le même changement d'indice).

✎ On peut aussi démontrer le résultat par récurrence. Il est en effet clair que $\cos^1 t = 1 \cdot \cos(1 \cdot t)$ et, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \cos^n t = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt,$$

alors

$$\begin{aligned} \cos^{n+1} t &= \cos^n t \cos t = a_0 \cos t + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\cos(k+1)t + \cos(k-1)t}{2} \\ &= a_0 \cos t + \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{a_{\ell-1}}{2} \cos \ell t + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{a_{\ell+1}}{2} \cos \ell t \\ &= \frac{a_n}{2} \cos(n+1)t + \frac{a_{n-1}}{2} \cos nt + \sum_{\ell=2}^{n-1} \frac{a_{\ell-1} + a_{\ell+1}}{2} \cos \ell t + \left(a_0 + \frac{a_2}{2}\right) \cos t + \frac{a_1}{2}. \end{aligned}$$

De cette manière, on n'a pas une expression explicite des coefficients a_k , mais on n'a pas à discuter sur la parité de l'indice n .

2. b. Il s'agit de vérifier que la famille des fonctions $[t \mapsto \cos kt], 0 \leq k \leq n$, est une famille libre.

✎ Un vecteur x admet **au plus une** décomposition de la forme

$$x = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \varepsilon_k \quad (*)$$

si, et seulement si, la famille $(\varepsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ est **libre**.

De manière analogue, un vecteur x admet **au moins une** décomposition de la forme $(*)$ si, et seulement si, il appartient au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$.

Supposons qu'il existe une famille réelle $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kt = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall 0 \leq \ell \leq n, \quad 0 = \int_0^\pi 0 \times \cos \ell t \, dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^\pi \cos kt \cos \ell t \, dt$$

et d'après la première question,

$$\forall 0 \leq \ell \leq n, \quad 0 = \sum_{k \neq \ell} \alpha_k \times 0 + \alpha_\ell \int_0^\pi \cos^2 \ell t \, dt$$

et comme

$$\int_0^\pi \cos^2 \ell t \, dt > 0,$$

on en déduit que

$$\forall 0 \leq \ell \leq n, \quad \alpha_\ell = 0.$$

✎ On doit **savoir** que la valeur moyenne de $\cos^2 \ell t$ est égale à $1/2$ pour tout $\ell \neq 0$:

$$\cos^2 \ell t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\ell t}{2}.$$

Attention ! Pour $\ell = 0$, cette moyenne est évidemment égale à 1.

♣ Par conséquent, la famille $(a_0, \dots, a_n)$ est unique.

✎ Un résultat particulièrement important est implicite dans les calculs qui précèdent.

L'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) dt.$$

La première question a démontré que la famille des fonctions $[t \mapsto \cos kt]$ était une famille orthogonale pour ce produit scalaire et nous venons ici de redémontrer qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est toujours une famille libre.

2.c. Si $n = 2r$ est pair, alors

$$a_n = \frac{2 \binom{2r}{r-r}}{4^r} = \frac{2}{2^{2r}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Si $n = 2r + 1$ est impair, alors

$$a_n = \frac{\binom{2r+1}{r-r}}{4^r} = \frac{1}{2^{2r}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

♣ La relation de récurrence nous donne $a_{n+1} = a_n/2$. On conclut en remarquant que $a_1 = 1 = 1/2^0$.

✎ Dans la première égalité, le membre de gauche est relatif à $\cos^{n+1} t$ et le membre de droite à $\cos^n t$. Il vaudrait mieux écrire $a_{n+1, n+1} = a_{n, n}/2$ et $a_{1, 1} = 1$ pour la seconde égalité.

3. On déduit de ce qui précède que

$$\int_0^\pi \cos^n t \cos nt dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^\pi \cos kt \cos nt dt = a_n \int_0^\pi \cos^2 nt dt = \frac{\pi a_n}{2} = \frac{\pi}{2^n}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

✎ L'égalité est évidemment vraie pour $n = 0$, mais ça ne découle pas de ce qui précède !

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f , l'endomorphisme représenté par la matrice M dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que

$$E = \text{Ker } f \oplus D$$

et qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de E telle que $u_1 \in \text{Ker } f$, $u_2 \in \text{Ker } f$ et $u_3 \in D$.

2. Les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires dans E ? En déduire que la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ est de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Avec le moins de calculs possibles, démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice M n'est pas la matrice nulle (donc son rang est supérieur à 1) et toutes les colonnes sont proportionnelles (donc son rang est inférieur à 1), donc le rang de M est égal à 1.

La matrice nulle est la seule matrice dont le rang est nul.

D'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de M est égale à 2.

La somme de la dimension du noyau et du rang est égale au nombre de COLONNES de la matrice.

Le noyau de f et le noyau de M sont isomorphes, donc le noyau de f est un plan, c'est-à-dire un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Il existe donc une droite vectorielle $D \subset \mathbb{R}^3$ telle que

$$E = \text{Ker } f \oplus D.$$

Plus précisément, la droite $D = \mathbb{R} \cdot u_3$ est un supplémentaire de $\text{Ker } f$ si, et seulement si, le vecteur directeur u_3 est choisi en dehors de l'hyperplan $\text{Ker } f$.

Comme $\text{Ker } f$ et D sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie (en tant que sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension finie), il existe une base $\mathcal{B}_0 = (u_1, u_2)$ de $\text{Ker } f$ et un vecteur directeur u_3 de D .

Comme $\text{Ker } f$ et D sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant leurs bases. Donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Quelle que soit la colonne X ,

$$MX = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ -2(x + y + z) \end{pmatrix}$$

donc la colonne MX est égale à la colonne nulle si, et seulement si, $x + y + z = 0$.

Par conséquent, $\text{Ker } f$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

On pourra retenir que, pour une matrice de rang 1, les coefficients de la colonne MX sont tous proportionnels et que chaque ligne non nulle de la matrice M nous donne les coefficients d'une équation cartésienne de $\text{Ker } f$.

L'image d'une matrice est le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice. Par conséquent, le sous-espace $\text{Im } f$ est la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, -2)$.

Comme M représente f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les colonnes de M donnent les coordonnées relatives à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs de $\text{Im } f$.

Comme $1 + 1 + (-2) = 0$, le vecteur $(1, 1, -2)$ appartient au noyau de f et comme il dirige $\text{Im } f$, on en déduit que $\text{Im } f$ est un sous-espace de $\text{Ker } f$.

En particulier, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Par définition, $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ (puisque les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont dans le noyau de f).

D'autre part, nous venons de prouver que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, donc

$$f(\mathbf{u}_3) \in \text{Im } f \subset \text{Ker } f = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

Il existe donc deux scalaires a et b tels que

$$f(\mathbf{u}_3) = a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3.$$

Par définition, la matrice de f relative à la base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est donc égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ démontre que la matrice P est équivalente à la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opérations de pivot (transvections, dilatations et permutations) conservent le rang. Autrement dit, elles font passer d'une matrice P à une matrice P' équivalente à P . (Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, leurs rangs sont égaux.)

Les deux dernières colonnes de P' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de P' est supérieur à 2) et la première colonne de P' n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (donc le rang de P' est supérieur à 3).

Comme $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son rang est égal à 3 et par conséquent cette matrice est inversible.

La matrice P peut donc être comprise comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à une autre base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Dans ce cas, les colonnes de la matrice de passage nous donnent les coordonnées relatives à la base canonique $\mathcal{B}_0$ des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ qui constituent la base $\mathcal{C}$.

$$\varepsilon_1 = (0, 0, 1), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -2), \quad \varepsilon_3 = (1, -1, 0)$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente alors l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{C}$:

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)).$$

En calculant dans la base canonique,

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut traduire respectivement par

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= \varepsilon_2 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(première colonne de } P^{-1}MP) \\ f(\varepsilon_2) &= \mathbf{0} = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(deuxième colonne)} \\ f(\varepsilon_3) &= \mathbf{0} = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(troisième colonne)} \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✎ On aurait donc pu choisir $\mathbf{u}_1 = \varepsilon_2$, $\mathbf{u}_2 = \varepsilon_3$ et $\mathbf{u}_3 = \varepsilon_1$ à la question précédente. Avec un tel choix, la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ serait

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque l'image par f du troisième vecteur de base ($\mathbf{u}_3 = \varepsilon_1$) est égale au premier vecteur de base ($\mathbf{u}_1 = \varepsilon_2$).

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x \ln^2 t \, dt.$$

En déduire que

$$\int_1^x \ln^2 t \, dt \sim x \ln^2 x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=2}^n \ln^2 k.$$

2.a. Démontrer que la suite (u_n) diverge.

2.b. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \quad \int_1^n \ln^2 t \, dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2 t \, dt$$

et en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln^2 t \, dt &= \int_1^x 1 \cdot \ln^2 t \, dt = [t \cdot \ln^2 t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{2 \ln t}{t} \, dt \\ &= x \cdot \ln^2 x - 2[t \cdot \ln t - t]_1^x \\ &= x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x - 2. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$-2x \cdot \ln x + 2x - 2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x \cdot \ln^2 x)$$

donc

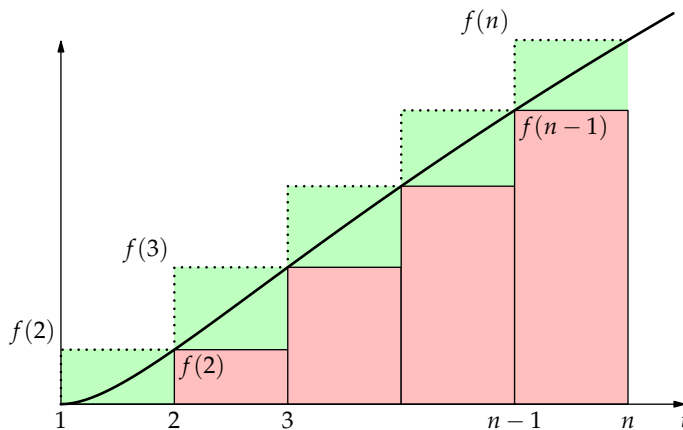
$$\int_1^x \ln^2 t \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln^2 x.$$

2.a. Lorsque k tend vers $+\infty$, le terme général $\ln^2 k$ ne tend pas vers 0 (il tend même vers $+\infty$), donc la série $\sum \ln^2 k$ diverge (très) grossièrement.

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

✎ Une série de terme général **positif** est divergente si, et seulement si, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. (On rappelle au passage qu'une suite divergente ne tend pas forcément vers l'infini, elle peut même être bornée.)

2.b. Sur l'intervalle $[2, +\infty[$, la fonction $\ln$ est positive et croissante, donc la fonction $\ln^2$ est croissante. On peut donc facilement comparer la somme u_n à une intégrale.



Pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n - \ln^2 n = \sum_{k=2}^{n-1} \ln^2 k \leq \int_1^n \ln^2 t \, dt \leq \sum_{k=2}^n \ln^2 k = u_n$$

et donc

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \leq u_n \leq \ln^2 n + \int_1^n \ln^2 t \, dt.$$

On a démontré que

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2 n \quad \text{et il est clair que} \quad \ln^2 n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n \ln^2 n)$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \det(A + xI_3).$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer $f(x)$ et en déduire $f'(0)$.
3. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \geq M$, la matrice $A + xI_3$ est inversible.

1. Les deux premières colonnes de A sont proportionnelles ($C_2 = 2C_1$), donc le rang de A est inférieur à 2. La première et la troisième colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est supérieur à 1. Donc $\text{rg } A = 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(A + xI_3) &= \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ -1 & -2+x & 3 \\ 2 & 4 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & -2x & 3 \\ -1 & x & 3 \\ 2 & 0 & 1+x \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1) \\ &= x \begin{vmatrix} 1+x & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1+x \end{vmatrix} && (\text{factorisation de } C_2) \\ &= x \begin{vmatrix} -1+x & 0 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1+x \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\ &= x \begin{vmatrix} -1+x & 9 \\ 2 & 1+x \end{vmatrix} && (\text{développement par la deuxième colonne}) \\ &= x(x^2 - 19) = x^3 - 19x. \end{aligned}$$

On aurait pu aussi bien appliquer la règle de Sarrus : développer sans réfléchir et simplifier ensuite.

On en déduit que $f'(0) = -19$.

Pour une fonction polynomiale f , le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient de x (Formule de Taylor-Young) : inutile de dériver f pour le calculer !

3. Comme $f(x) \sim x^3$ lorsque x tend vers $+\infty$ et que x^3 tend vers $+\infty$, on en déduit que f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. En particulier, il existe un réel M tel que

$$\forall x \geq M, \quad f(x) > 0.$$

Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Par conséquent, si x est choisi "assez grand", alors la matrice $A + xI_3$ est inversible.

Affirmer l'existence d'un réel M tel qu'une propriété soit vraie pour tout $x \geq M$, c'est en fait affirmer que cette propriété est vraie "au voisinage de $+\infty$ ".

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire les matrices $A - I_3$ et $A - 2I_3$. En déduire que le produit

$$A(A - I_3)(A - 2I_3)$$

est égal à la matrice nulle et que

$$A^3 = 3A^2 - 2A.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

3. On pose maintenant

$$P_1 = 2A - A^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A.$$

Vérifier que

$$AP_1 = P_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = 2P_2$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P_1 + 2^n P_2.$$

1. On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que le rang de cette matrice est égal à 1 (matrice non nulle dont toutes les colonnes sont proportionnelles) et que l'image de cette matrice est la droite dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$.

🔗 L'image d'une matrice est le sous-espace engendré par les colonnes de cette matrice.

Or ce vecteur appartient au noyau de A :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$A[(A - I_3)(A - 2I_3)] = 0_3.$$

♣ En développant cette expression, on obtient

$$A^3 = 3A^2 - 2A. \quad (\star)$$

2. Comme la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas proportionnelle à A , le couple (A, A^2) est une famille libre. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au plus un couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A$.

🔗 Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille libre, alors c'est une base du sous-espace $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$ qu'elle engendre.

Chaque vecteur de F peut donc se décomposer de manière unique dans cette base :

$$x = \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot u_k$$

et les vecteurs de E qui n'appartiennent pas à F ne peuvent pas se décomposer sous cette forme.

Ainsi, chaque vecteur de E admet au plus une décomposition comme combinaison linéaire des u_k , $1 \leq k \leq r$.

Il reste donc à démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n \in \text{Vect}(A, A^2)$$

ce qui revient à démontrer que le sous-espace $\text{Vect}(A, A^2)$ est stable par multiplication.

Il est clair que

$$A^1 = A = 1 \cdot A + 0 \cdot A^2 \in \text{Vect}(A, A^2).$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n \in \text{Vect}(A, A^2)$. Il existe donc deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A$ et par conséquent

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = (\alpha_n A^2 + \beta_n A) \cdot A = \beta_n A^2 + \alpha_n A^3 = \beta_n A^2 + \alpha_n (3A^2 - 2A) \\ &= (3\alpha_n + \beta_n)A^2 - 2\alpha_n A \in \text{Vect}(A, A^2). \end{aligned}$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

L'unicité de cette décomposition prouve que les coefficients α_n et β_n vérifient une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n, \quad \beta_{n+1} = -2\alpha_n.$$

3. Par définition de P_1 et de P_2 , on déduit de la décomposition (*) de A^3 que

$$\begin{aligned} AP_1 &= A(2A - A^2) = 2A^2 - A^3 \stackrel{(*)}{=} 2A^2 - (3A^2 - 2A) = 2A - A^2 = P_1 \\ AP_2 &= \frac{1}{2} \cdot A(A^2 - A) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} [(3A^2 - 2A) - A^2] = A^2 - A = 2P_2. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, il est clair que

$$P_1 + 2P_2 = (2A - A^2) + (A^2 - A) = A = A^1.$$

S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = P_1 + 2^n P_2$, alors

$$A^{n+1} = A(P_1 + 2^n P_2) = AP_1 + 2^n AP_2 = P_1 + 2^n \cdot 2P_2 = P_1 + 2^{n+1} P_2.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

En revenant aux définitions de P_1 et P_2 , on a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = (2A - A^2) + 2^{n-1}(A^2 - A) = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

et on a retrouvé la décomposition de la question précédente (en explicitant cette décomposition).

On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et de la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Représenter graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Pour quel réel α la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet-elle une limite finie non nulle ?
4. En admettant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha,$$

que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

1. On reconnaît une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ associée à la fonction

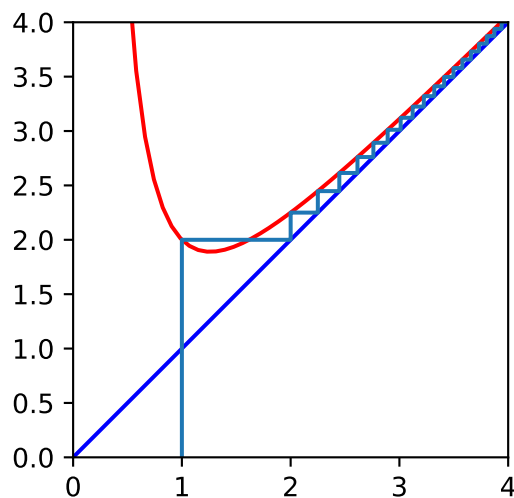
$$f = [x \mapsto x + 1/x^2].$$

Cette fonction f est définie et strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f . Comme $u_0 = 1 \in]0, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives.

• On vérifie facilement que la fonction f est d'abord décroissante, puis croissante.

Enfin, on doit remarquer que la droite $y = x$ est asymptote au graphe de f et que le graphe de f est situé au-dessus de cette asymptote :

$$\forall x > 0, \quad f(x) > x.$$



```
def f(x):
    return x+1/x**2

u, X, Y = 1, [1], [0]
N = 100
for n in range(N):
    v = f(u)          # u = u_n, v = u_{n+1}
    X.extend([u, v])
    Y.extend([v, v])
    u = v              # u = u_{n+1}

xmax = 4
x = np.linspace(0.01, xmax)
y = f(x)
```

```
plt.plot(x, y, 'r') # la fonction itératrice f
plt.plot(x, x, 'b') # la bissectrice y = x
plt.plot(X, Y)      # la suite (u_n)
plt.axis("square")
plt.xlim(0, xmax)
plt.ylim(0, xmax)
```

2. Il est clair que $f(x) \geq x$ pour tout $x > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

✱ D'après le Théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite ℓ , finie ou infinie. Par croissance de la suite, la limite ℓ est supérieure à $u_0 = 1$.

Comme f est continue sur $]0, +\infty[$, si la limite ℓ est réelle, alors f est continue au point ℓ (puisque $\ell > 0$) et, en passant à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = f(\ell) = \ell + \frac{1}{\ell^2},$$

ce qui est absurde.

Donc la limite n'est pas réelle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend donc vers $+\infty$.

3. D'après la relation de récurrence, en tenant compte du fait que u_n tend vers $+\infty$,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{u_n^3} \right)^\alpha - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left[\frac{\alpha}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n^{\alpha-3}.$$

✎ On a utilisé ici le développement limité $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$ (lorsque h tend vers 0) et, pour le calcul de l'équivalent, on a remarqué que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tendait vers 0 pour $\alpha = 0$ (on cherche ici une limite finie non nulle).

✱ Si $\alpha > 3$, alors l'exposant $(\alpha - 3)$ est strictement positif et comme u_n tend vers $+\infty$, on en déduit que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers $+\infty$.

Si $\alpha < 3$, alors l'exposant $(\alpha - 3)$ est strictement négatif et cette fois la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers 0.

Par conséquent, la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers une limite finie non nulle si, et seulement si, $\alpha = 3$. Dans ce cas, la limite est égale à α , c'est-à-dire à 3.

4. On a ainsi démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$$

et donc que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}.$$

On a ainsi précisé la **vitesse** avec laquelle la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (assez lente, comme on l'avait vu sur la figure).

✎ Le résultat admis par l'énoncé n'est autre que le Théorème de Cesaro.

En effet, nous avons démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$$

et le Théorème de Cesaro nous permet d'en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^3 - u_k^3) = 3.$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^3 - u_k^3) = \frac{u_n^3}{n} - \frac{u_0^3}{n}$$

et il est clair que u_0^3/n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Soient X et Y , deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On pose $S = X + Y$.

1. Calculer l'espérance de X et celle de Y .

2. Quelles sont les valeurs possibles pour S ? Quelles sont les valeurs les plus probables pour S ? les moins probables?

3. Quelle est l'espérance de S ?

1. Comme X et Y suivent la même loi, leurs espérances sont égales. Et comme X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $1 \leq X(\omega), Y(\omega) \leq 4$, donc

$$1 + 1 = 2 \leq S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \leq 8 = 4 + 4.$$

Donc les valeurs prises par S sont des entiers compris entre 2 et 8.

• Pour tout entier $2 \leq s \leq 8$, on peut décomposer l'évènement $[S = s]$ sur le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète X :

$$[S = s] = \bigcup_{k=1}^4 [S = s, X = k] = \bigcup_{k=1}^4 [X = k, Y = s - k]$$

ce qui nous donne

$$\mathbf{P}(S = s) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = s - k)$$

puisque X et Y sont indépendantes.

Comme X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(S = s) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{P}(Y = s - k) = \frac{1}{4} \sum_{y=s-4}^{s-1} \mathbf{P}(Y = y).$$

Comme Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, on obtient

$$\mathbf{P}(S = s) = \frac{1}{4} \sum_{y \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \cap \llbracket s-4, s-1 \rrbracket} \frac{1}{4}$$

et finalement :

$$\mathbf{P}(S = 2) = \mathbf{P}(S = 8) = \frac{1}{16}, \quad \mathbf{P}(S = 3) = \mathbf{P}(S = 7) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(S = 4) = \mathbf{P}(S = 6) = \frac{3}{16}, \quad \mathbf{P}(S = 5) = \frac{1}{4}.$$

3. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = 5$.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -14 & 28 & -20 \\ -18 & 36 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de u relative à la base canonique $\mathcal{B}_0$.
2. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer les produits matriciels suivants.

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En déduire la matrice $P^{-1}AP$.

4. Donner un vecteur directeur de $\text{Ker } u$.
5. Quel est le rang de u ? Donner une équation cartésienne de $\text{Im } u$.

1. **Cours :** Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, l'application

$$[f \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)]$$

est un isomorphisme de l'espace des endomorphismes $L(\mathbb{R}^3)$ sur l'espace des matrices $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un, et un seul, endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u)$.

2. **Cours :** Une matrice carrée P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ si, et seulement si, elle est inversible.

Il s'agit donc de vérifier que P est inversible et, pour cela, le calcul du rang est la méthode la plus efficace.

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$ démontre que la matrice P est équivalente à la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La première et la troisième colonne de P' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de P' est supérieur à 2) et la deuxième colonne de P' n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (donc le rang de P' est supérieur à 3).

Comme les matrices P et P' sont équivalentes, leurs rangs sont égaux, donc $\text{rg } P = 3$ et par conséquent P est inversible.

3. On vérifie sans peine que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On aura reconnu les colonnes de la matrice P , matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. En notant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base $\mathcal{B}$, on vient en fait de démontrer que

$$u(\varepsilon_1) = 0, \quad u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_3) = -2 \cdot \varepsilon_3$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3, \\ u(\varepsilon_2) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3, \\ u(\varepsilon_3) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + (-2) \cdot \varepsilon_3. \end{aligned}$$

D'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$ donc

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2), u(\varepsilon_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. On a remarqué que $u(\varepsilon_1) = 0$, donc $\varepsilon_1 \in \text{Ker } u$.

5. Les deux premières colonnes de la matrice A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A (et donc celui de u) est supérieur à 2.

Le noyau de u contient un vecteur non nul (le vecteur ε_1 par exemple), donc la dimension du noyau de u est supérieure à 1. D'après le Théorème du rang, le rang de u est inférieur à $3 - 1 = 2$.

Donc le rang de u est égal à 2.

🔗 *Le Théorème du rang nous assure donc que le noyau de u est une droite vectorielle. Chaque vecteur non d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, donc*

$$\text{Ker } u = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 = \mathbb{R} \cdot (2, 1, 0).$$

✦ L'image de u est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et peut donc être représenté par une équation cartésienne.

🔗 *L'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ est en fait le noyau de la forme linéaire*

$$[(x, y, z) \mapsto ax + by + cz]$$

et cette forme linéaire n'est identiquement nulle que si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

L'image de A est engendrée par les colonnes de A et comme le rang de A est égal à 2, on cherche une forme linéaire dont le noyau est engendré par les deux premières colonnes de A (par exemple). Mais ces colonnes sont particulièrement moches...

On a remarqué que $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et que $u(-1/2 \cdot \varepsilon_3) = \varepsilon_3$ et donc que ε_2 et ε_3 appartiennent à l'image de u .

🔗 *Les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles appartiennent toujours à l'image. (À retenir!)*

Comme ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et comme $\text{rg } u = 2$, ils forment même une base de $\text{Im } u$.

Il s'agit donc de trouver une forme linéaire

$$\varphi = [(x, y, z) \mapsto ax + by + cz]$$

dont le noyau contienne ε_2 et ε_3 . Autrement dit, trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a + 2b + 2c = 0 \quad \text{et} \quad 2b + 3c = 0.$$

Les solutions de ce système (deux équations, trois inconnues) sont

$$(a, b, c) = (2t, -3t, 2t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

donc

$$\text{Im } u = [2x - 3y + 2z = 0].$$

🔗 *On a trouvé une infinité de solutions car un plan admet une infinité d'équations cartésiennes — toutes proportionnelles entre elles.*

1. Sur quel intervalle la fonction Arccos est-elle définie? Sur quel intervalle est-elle continue? Sur quel intervalle est-elle dérivable? La fonction Arccos admet-elle un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1?

2. Soient $0 < \varepsilon < x \leq 1$. Démontrer que

$$\text{Arccos}(1-x) - \text{Arccos}(1-\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{2-u}\sqrt{u}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2x} \leq \text{Arccos}(1-x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}.$$

3. Donner un équivalent simple de $\text{Arccos}(1-x)$ pour x voisin de 0 et traduire graphiquement cet équivalent.

1. La fonction Arccos est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ seulement.

*Il faut ici savoir réviser son cours sans hésiter : il ne s'agit pas de déduire pas à pas les propriétés de la fonction Arccos en partant de $\cos$, mais de la considérer comme une **fonction usuelle** au même titre que x^2 , $\sqrt{x}$, $\exp$ et $\ln$.*

• Une fonction continue admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage du point x_0 si, et seulement si, elle est dérivable au point x_0 .

La fonction Arccos n'a donc pas de développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1.

Il faut bien distinguer l'ordre 1 (avec une condition nécessaire et suffisante) des ordres $n \geq 2$ (pour lesquels la formule de Taylor-Young ne donne qu'une condition suffisante pour l'existence d'un développement limité).

2. Comme $0 < \varepsilon < x \leq 1$, on a $0 \leq 1-x < 1-\varepsilon < 1$. Sur l'intervalle $[0, 1]$, la fonction Arccos est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut appliquer le Théorème fondamental de l'analyse sur cet intervalle. On a donc

$$\text{Arccos}(1-x) - \text{Arccos}(1-\varepsilon) = \int_{1-\varepsilon}^{1-x} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On effectue ensuite le changement de variable affine $u = 1-t$ dans l'intégrale et on obtient

$$\int_{1-\varepsilon}^{1-x} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{[1-(1-u)]}\sqrt{[1+(1-u)]}} = \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{2-u}\sqrt{u}}.$$

Le changement de variable est décroissant, donc on a effectué un double changement de signe.

• Pour $0 < \varepsilon \leq u \leq x \leq 1$, on a $0 < 2-x \leq 2-u \leq 2-0$ et donc

$$\forall u \in [\varepsilon, x], \quad \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-u}\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}\sqrt{u}}.$$

En intégrant cet encadrement (les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \text{Arccos}(1-x) - \text{Arccos}(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Comme $\text{Arccos}(1-\varepsilon)$ tend vers $\text{Arccos} 1 = 0$ lorsque ε tend vers 0 et que

$$\int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{u}} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x},$$

on en déduit par passage à la limite que

$$\sqrt{2x} \leq \text{Arccos}(1-x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}.$$

3. Il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2},$$

donc l'encadrement précédent nous donne

$$\operatorname{Arccos}(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2x}.$$

• On retrouve ainsi la tangente verticale au point d'abscisse 1 du graphe de la fonction Arccos.

✎ Un calcul simple nous permet de retrouver rapidement ce résultat : on sait bien que

$$x = \cos \theta \underset{\theta \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

donc on devine que

$$|\theta| = |\operatorname{Arccos} x| \underset{x \rightarrow 1}{\approx} \sqrt{2(1-x)}.$$

Il faut savoir ce qu'on cherche : un ordre de grandeur juste ou un résultat rigoureusement justifié...

Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9 : on tire au hasard trois de ces boules simultanément.

1. Proposer un modèle probabiliste pour cette expérience aléatoire.
2. Est-il plus probable que, parmi les trois boules tirées, trois boules portent un numéro impair ou que deux boules portent un numéro impair (la troisième portant donc un numéro pair) ?

1. Si on ne cherche pas à faire preuve d'originalité, on peut modéliser cette expérience en considérant la loi de probabilité uniforme sur l'ensemble $E_{3,9}$ des parties de trois éléments choisis dans l'ensemble $\llbracket 1, 9 \rrbracket$.

Selon ce modèle, on appelle *évènement* toute partie de l'ensemble $E_{3,9}$ et la probabilité d'un évènement $A \subset E_{3,9}$ est donnée par

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(E_{3,9})} = \frac{\#(A)}{\binom{9}{3}}.$$

2. Notons A, l'évènement "les trois boules portent un numéro impair". Il y a 5 boules qui portent un numéro impair (1, 3, 5, 7 et 9), donc le cardinal de A est égal à $\binom{5}{3}$.

On compte le nombre de parties de cardinal 3 dans un ensemble de cardinal 5.

Par conséquent,

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!6!}{9!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{5}{42}.$$

Notons B, l'évènement "exactement deux boules portent un numéro impair". Il y a $\binom{5}{2}$ manières de choisir les deux boules qui portent un numéro impair et $\binom{4}{1}$ manières de choisir la boule qui porte un numéro pair. Donc

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{21}.$$

La probabilité de B est donc sensiblement plus grande que celle de A.

On peut vérifier avec Python que les probabilités calculées sont correctes. (Le code qui suit est assez crypté. Désolé.)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

G = np.random.default_rng()
a = list(range(1,10))
N = 100000
tirages = np.array([G.choice(a, replace=False, size=3) for _ in range(N)])

def proportions(T):
    nb_impairs = np.sum(T%2==1, axis=1)
    Pr_A = (nb_impairs==3).mean()
    Pr_B = (nb_impairs==2).mean()
    return Pr_A, Pr_B
```

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A ? Cette matrice est-elle inversible?
2. Vérifier que $\text{Ker}(A + I_3)$ et $\text{Ker}(A - I_3)$ sont des droites vectorielles. Proposer un vecteur directeur pour chacune d'elles.
3. Vérifier que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

appartient au plan $\text{Ker}(A + I_3)^2$ mais pas à la droite $\text{Ker}(A + I_3)$.

4. Démontrer que la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice $Q^{-1}AQ$ est triangulaire supérieure.

1. On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$ pour y voir plus clair. La matrice A est donc équivalente à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de A' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de A' est supérieur à 2) et la troisième colonne de A' n'est pas une combinaison linéaire des deux premières (donc le rang de A' est supérieur à 3).

Les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A' ont même rang (elles sont équivalentes), donc le rang de A est égal à 3 et par conséquent la matrice A est inversible.

2. Écrivons les deux matrices :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

✎ Pour la première matrice, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles (donc le rang est supérieur à 2) et $C_2 = 2C_3$ (donc le rang est inférieur à 2). D'après le Théorème du rang, le rang de $(A + I_3)$ est égal à 2 et le noyau de $(A + I_3)$ est une droite vectorielle.

✎ D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes de la matrice.

La relation $C_2 = 2C_3$ peut aussi s'écrire $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + (-2) \cdot C_3 = 0$, ce qui prouve que le vecteur $(0, 1, -2)$ appartient au noyau de $(A + I_3)$.

Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, donc

$$\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

✎ Pour la deuxième matrice, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles tandis que $C_3 = C_1$. En procédant de même, on conclut que le noyau de $(A - I_3)$ est aussi une droite vectorielle et que

$$\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie sans peine que

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

et que

$$(A + I_3)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

4. On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, ce qui démontre que la matrice Q est équivalente à la matrice

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La première et la troisième colonne de Q' ne sont pas proportionnelles et la deuxième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux autres, donc le rang de Q' (qui est aussi le rang de Q) est égal à 3 et la matrice Q est donc inversible.

• Considérons l'endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^3)$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

Comme la matrice Q est inversible, alors la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = (1, 0, -1), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, -2), \quad \varepsilon_3 = (1, 0, -2)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice Q est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à cette autre base.

On obtient la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ en écrivant colonne par colonne les coordonnées relatives à $\mathcal{B}_0$ des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

D'après la formule du changement de base, la matrice $Q^{-1}AQ$ représente l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$:

$$Q^{-1}AQ = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)). \quad (*)$$

D'après la question 2.,

$$\varepsilon_1 \in \text{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 \in \text{Ker}(f + I)$$

donc

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2. \quad (\dagger)$$

D'après la question précédente,

$$(f + I)(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$$

c'est-à-dire

$$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3. \quad (\ddagger)$$

On déduit alors de $(*)$, $(\dagger)$ [pour les deux premières colonnes] et de $(\ddagger)$ [pour la troisième colonne] que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Et on constate que cette matrice est bien triangulaire supérieure.

Soit f , une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1.$$

1. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq a, \quad f'(x) \geq \frac{1}{2x}.$$

2. En déduire qu'il existe deux nombres $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq A + B \ln x$$

puis que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

1. Par définition de la limite, comme $1/2 < 1$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall t \geq a, \quad t f'(t) \geq \frac{1}{2}.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall x \geq a, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \geq \int_a^x \frac{dt}{2t} = \frac{\ln x - \ln a}{2}.$$

On a établi une minoration de $f'(t)$ qui n'est valable que sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On ne peut donc intégrer cette inégalité que sur un segment contenu dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

Finalement,

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq \left(f(a) - \frac{\ln a}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln x.$$

Comme $B = 1/2 > 0$ convient, on en déduit par comparaison que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

En reprenant les calculs de manière plus précise (à la manière de la démonstration du Théorème de Cesaro), on peut démontrer que $f(x) \sim \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.

Discuter en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}_+$:

1. Le comportement asymptotique de la suite de terme général nx^n ;
2. Le comportement asymptotique de la suite de terme général x^n/n ;
3. La nature de la série

$$\sum n^{(-1)^n} x^n.$$

1. Si $x \geq 1$, alors $nx^n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et nx^n tend vers $+\infty$.

Si $0 \leq x < 1$, alors n tend vers $+\infty$ et x^n tend vers 0. Par croissances comparées, le produit nx^n tend vers 0.

2. Si $x \leq 1$, alors $0 \leq x^n/n \leq 1/n$ pour tout $n \geq 1$ et x^n/n tend vers 0.

Si $x > 1$, alors $1/n$ tend vers 0 et x^n tend vers $+\infty$. Par croissances comparées, le produit x^n/n tend vers $+\infty$.

3. Supposons que $x \geq 1$. Pour tout entier **pair** $n = 2k$,

$$n^{(-1)^n} x^n = 2kx^{2k} \geq 2k$$

donc la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$ diverge (très) grossièrement.

♣ Supposons que $x < 1$. Alors

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq n^{(-1)^n} x^n \leq nx^n = \frac{1}{n^2} \cdot n^3 x^n$$

et (toujours par croissances comparées)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 x^n = 0,$$

donc

$$nx^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (*)$$

On sait que la série (de Riemann) $\sum 1/n^2$ est absolument convergente. Par comparaison, la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$ converge absolument.

🔍 La comparaison (*) a permis de conclure.

♣ On peut procéder différemment : comme $x < 1$, il existe un réel r tel que $x < r < 1$ ("quand deux défenseurs ne se touchent pas, on peut prendre l'intervalle entre les deux") et

$$nx^n = n\left(\frac{x}{r}\right)^n \cdot r^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(r^n).$$

Comme $0 < r < 1$, la série (géométrique) $\sum r^n$ converge absolument et, par comparaison, la série $\sum nx^n$ converge absolument.

♣ Cette comparaison a ma préférence : la série $\sum nx^n$ est plus proche d'une série géométrique que d'une série de Riemann, il me semble plus pertinent de la comparer à une série géométrique qu'à une série de Riemann.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide d'opérations de pivot sur les colonnes, montrer que la matrice A_λ a même rang que la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - 2\lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le rang de la matrice B_λ peut-il être égal à 0 ? à 1 ?
 3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B_λ soit inversible.
 4. En étudiant les variations de la fonction

$$[t \mapsto t^3 - 3t + 1],$$

déterminer le nombre de réels λ tels que le rang de la matrice A_λ soit égal à 2.

1. On effectue d'abord $C_3 \leftarrow C_3 - \lambda C_2$ et ensuite $C_2 \leftrightarrow C_3$.
 Les opérations de pivot conservent le rang, donc $\text{rg } B_\lambda = \text{rg } A_\lambda$.
 2. La matrice B_λ n'est pas la matrice nulle (indépendamment de la valeur du paramètre λ), donc le rang de B_λ n'est jamais nul.

✎ La seule matrice dont le rang est nul est la matrice nulle.

✎ La première colonne de B_λ n'est pas nulle et elle n'est pas proportionnelle à la troisième colonne de B_λ , donc le rang de B_λ est au moins égal à 2. Comme $\text{rg } A_\lambda = \text{rg } B_\lambda$, le rang de A_λ ne peut pas être égal à 1.

3. La matrice B_λ est inversible si, et seulement si, son déterminant est différent de 0. En développant par la dernière ligne,

$$\det B_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda & 1 - 2\lambda \\ 1 & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 1.$$

Donc la matrice B_λ est inversible si, et seulement si,

$$\lambda^3 - 3\lambda + 1 \neq 0.$$

4. Appelons f , cette fonction polynomiale. Il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 3t^2 - 3t = 3t(t - 1).$$

On en déduit que f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. Enfin, la fonction f tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

En appliquant trois fois le Théorème de la bijection monotone, on conclut que la fonction f s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$: une fois sur $]-\infty, 0[$, une fois sur $]0, 1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$.

Il existe donc exactement trois réels pour lesquels la matrice A_λ n'est pas inversible. Comme le rang de A_λ n'est jamais nul, ni égal à 1, il existe donc exactement trois réels pour lesquels le rang de A_λ est égal à 2.

✎ Et pour tous les autres réels, le rang de A_λ est égal à 3 (la matrice est inversible).

On considère la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Calculer la primitive F de f qui s'annule en $x = 1$. Tracer l'allure des graphes de f et de F sur une même figure.
3. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera. Sur quelle partie de J la bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^2$?
4. Indiquer comment tracer le graphe de f et celui de f^{-1} sur une même figure à l'aide du langage Python.
5. Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} est lipschitzienne.

1. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \geq 1 > 0,$$

donc f est strictement croissante.

✎ Il ne sert à rien de calculer le signe de la dérivée si on n'a pas au préalable précisé qu'on étudie la fonction sur un **intervalle**.

Il est aussi clair que la fonction f tend vers $-\infty$ au voisinage (droit) de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

✎ Plus précisément, comme $-1/x$ tend vers 0 par valeurs négatives au voisinage de $+\infty$, la droite $y = x$ est asymptote au graphe de f et le graphe de f est situé sous l'asymptote (au moins au voisinage de $+\infty$).

2. Comme f est continue, on déduit du Théorème fondamental de l'analyse que

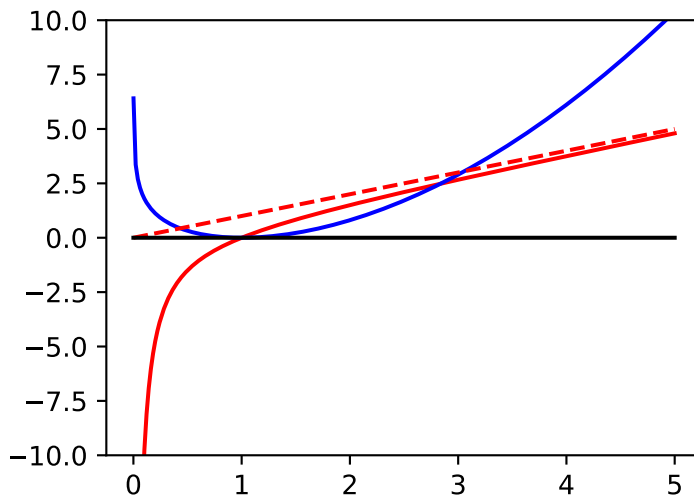
$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \frac{x^2 - 1}{2} - \ln x.$$

✎ Comme f est strictement croissante, la fonction F est convexe.

Les deux fonctions f et F s'annulent toutes les deux pour $x = 1$, donc la fonction croissante f est du signe de $(x - 1)$. Sa primitive F est donc décroissante sur $]0, >]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et toujours positive.

Enfin,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x \quad \text{et} \quad F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$



3. On a constaté que f était continue et strictement croissante sur l'intervalle I . De plus, elle tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. D'après le Théorème de la bijection monotone, la fonction f réalise une bijection de I sur $J = \mathbb{R}$.

Toujours d'après le Théorème de la bijection monotone,

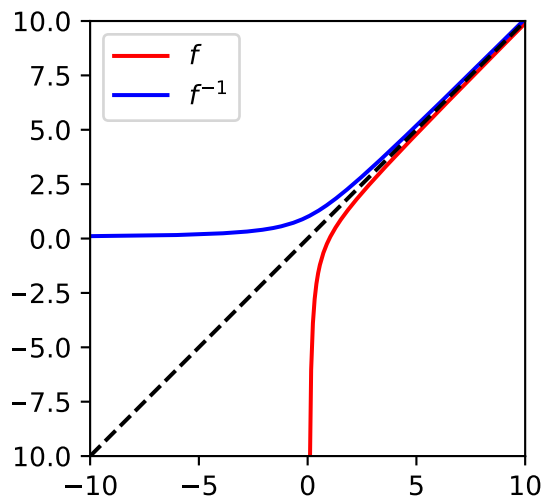
- la bijection réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle J ;
- comme f' ne s'annule pas sur I et que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J .

4.

```
def f(x):
    return x-1/x

def F(x):
    return (x**2-1)/2-np.log(x)
```

```
x = np.linspace(0.001, 20, 250)
y = f(x)
plt.plot(x, y, 'r', label="f")
plt.plot(y, x, 'b', label="f⁻¹")
t = np.linspace(-10, 10, 3)
plt.plot(t, t, 'k--')
plt.axis("square")
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-10, 10)
plt.legend()
```



5. On sait que

$$\forall x \in J = \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

et on a constaté plus haut que

$$\forall u > 0, \quad f'(u) \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in J, \quad 0 \leq (f^{-1})'(x) \leq 1$$

et la fonction (croissante) f^{-1} est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité des accroissements finis.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^n}{1+u} du.$$

2. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que $(n+1)I_n$ tend vers $1/2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. En déduire un équivalent de I_n .

1. L'application $[x \mapsto u = e^{-x}]$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui réalise une bijection (décroissante) de $[0, \pi]$ sur $[e^{-\pi}, 1]$. On déduit de la formule du changement de variable que

$$\int_0^\pi \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx = \int_0^\pi \frac{(e^{-x})^n}{e^{-x}+1} e^{-x} dx = \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^n}{u+1} du.$$

2. Il est clair que

$$\forall 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq u^n \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < 1+u \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\forall u \in [e^{-\pi}, 1] \subset [0, 1], \quad 0 \leq \frac{u^n}{u+1} \leq u^n$$

et en intégrant cet encadrement (les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit (par encadrement) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} (n+1)I_n &= \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{1}{1+u} \cdot (n+1)u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{1+u} \right]_{e^{-\pi}}^1 + \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{(1+u)^2} du \\ &= \frac{1}{2} - \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} + \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{1+u} du \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} = 0$$

et, pour les mêmes raisons que plus haut,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^{n+1}}{1+u} du \leq \frac{1}{n+2}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{2}.$$

4. On en déduit que

$$nI_n = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

et donc que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2\alpha - 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)$ et compléter cette base pour obtenir une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)^2$.
2. On pose $u_3 = (1, 1, 0)$. Calculer $(f - \alpha I)(u_3)$ et $(f - \alpha I)^2(u_3)$. En déduire une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. L'endomorphisme $(f - \alpha I)$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$$A - \alpha I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⚠ Attention ! Il faut éviter le piège tendu par le facteur $1/2$!

Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang est au moins égal à 2. Les deux dernières colonnes sont proportionnelles (opposées même), donc le rang est au plus égal à 2.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes de la matrice. Par conséquent, le noyau de $(f - \alpha I)$ est une droite vectorielle et, de ce fait, chaque vecteur non nul de ce noyau est un vecteur directeur de cette droite.

On a remarqué que $C_3 = -C_2$, c'est-à-dire $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$, donc le vecteur $(0, 1, 1)$ appartient au noyau de $(f - \alpha I)$ et finalement

$$\text{Ker}(f - \alpha I) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 1).$$

⚠ Les coefficients de la relation de liaison $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$ nous donnent les coordonnées relatives à la base canonique d'un vecteur du noyau.

- L'endomorphisme $(f - \alpha I)^2$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$$(A - \alpha I_3)^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas nulle et toutes ses colonnes sont proportionnelles entre elles, donc le rang de cette matrice est égal à 1 et (Théorème du rang) la dimension de son noyau est égale à 2.

Le noyau de cette matrice a pour équation cartésienne

$$x + y - z = 0.$$

⚠ Il suffit d'écrire l'équation $(A - \alpha I_3)^2 X = 0$ sous forme d'un système : la première ligne est nulle et les deux autres sont égales.

Il est clair que les coordonnées du vecteur $(0, 1, 1)$ vérifient cette équation. De même, le vecteur $(1, 0, 1)$ vérifie cette équation et comme il n'est pas proportionnel au précédent, le couple

$$((0, 1, 1), (1, 0, 1))$$

est une famille libre du noyau de $(f - \alpha I)^2$. Et comme ce noyau est un plan vectoriel, on en déduit que cette famille libre est en fait une base de $\text{Ker}(f - \alpha I)^2$.

2. Le vecteur u_3 est représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la colonne

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette même base, l'endomorphisme $(f - aI)$ est représenté par la matrice $(A - aI_3)$. Donc les vecteurs $(f - aI)(u_3)$ et $(f - aI)^2(u_3)$ sont représentés dans cette base par les colonnes

$$(A - aI_3)u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - aI_3)^2 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♣ En posant

$$u_2 = (f - aI)(u_3) = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad u_1 = (f - aI)^2(u_3) = (f - aI)(u_2) = (0, 1, 1), \quad (*)$$

on définit une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ car la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

🔗 L'opération de pivot $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ démontre que le rang de cette matrice est égal au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et la troisième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premières, donc cette matrice est bien inversible.

La matrice de $(f - aI)$ relative à la base $\mathcal{B}$ est très simple à calculer : par définition (*),

$$(f - aI)(u_2) = u_1, \quad (f - aI)(u_3) = u_2$$

et on a remarqué à la première question que

$$u_1 = (0, 1, 1) \in \text{Ker}(f - aI).$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lll} f(u_1) = a \cdot u_1 & = a \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 & \text{(première colonne)} \\ f(u_2) = u_1 + a \cdot u_2 & = 1 \cdot u_1 + a \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 & \text{(deuxième colonne)} \\ f(u_3) = u_2 + a \cdot u_3 & = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + a \cdot u_3 & \text{(troisième colonne)} \end{array}$$

et par conséquent

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3} dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire que

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2}$$

lorsque x tend vers 0.

4. a. Démontrer qu'il existe une constante A telle que

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) \leq A + \int_1^{x^2} \frac{dt}{t^2}.$$

4. b. En déduire que f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer l'allure du graphe de f .

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le segment $[0, x^2]$ est contenu dans l'intervalle $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle, le dénominateur $1+t^3$ ne s'annule pas, donc l'intégrande

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{t}{1+t^3} \right]$$

est une fonction continue sur $[0, x^2]$.

Il suffit qu'une fonction soit continue pour qu'elle soit intégrable sur un segment. (Selon le programme de première année, il faut qu'elle soit continue par morceaux.)

Ici, l'intégrande est une fonction rationnelle et on sait qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est une fonction paire.

2. Puisque la fonction φ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle et toute primitive Φ de φ vérifie

$$\forall x \geq 0, \quad \Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \varphi(t) dt.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \Phi(x^2) - \Phi(0).$$

Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\Phi'(x^2) = 2x\varphi(x^2) = \frac{2x^3}{1+x^6}.$$

Comme on a remarqué que la fonction f était paire, on n'est pas surpris que sa dérivée f' soit impaire.

3. D'après la question précédente,

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x^3 + o(x^3).$$

Comme on peut primitiver un développement limité, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \frac{2x^4}{4} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{2}$$

puisque $f(0) = 0$.

4.a. Avec la relation de Chasles,

$$f(x) = f(1) + \int_1^{x^2} \frac{t}{1+t^3} dt.$$

Pour tout $t \geq 1$, il est clair que

$$\frac{t}{1+t^3} \leq \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2},$$

donc (intégration bornes croissantes)

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) \leq f(1) + \int_1^{x^2} \frac{dt}{t^2}.$$

4.b. Il est clair que la dérivée de f (calculée ci-dessus) est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Elle tend donc vers une limite (finie ou infinie) au voisinage de $+\infty$.

La majoration établie à la question précédente nous donne :

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + f(1)$$

donc f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

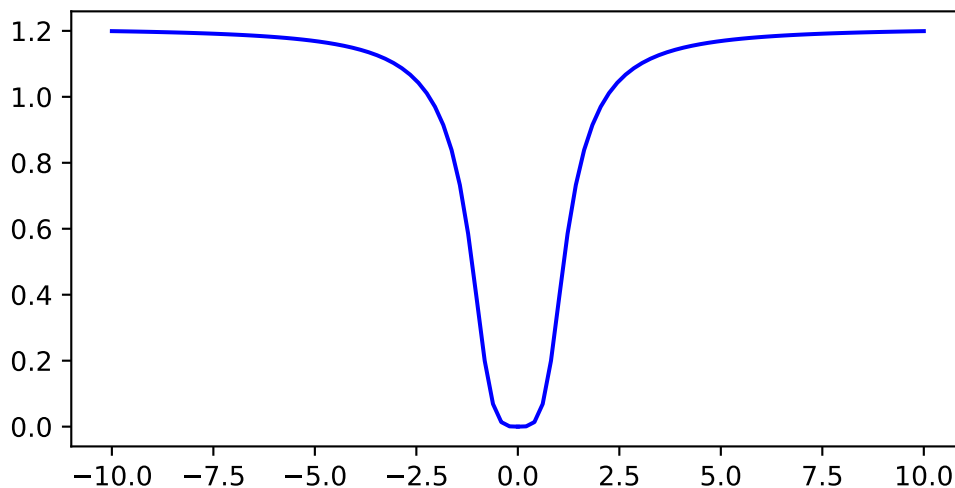
Cela se traduit par une asymptote horizontale et le graphe de f (fonction croissante !) est situé sous cette asymptote.

5.

```
import scipy.integrate as integr

def phi(t):
    return t/(1+t**3)
def f(x):
    return integr.quad(phi, 0, x**2)[0]

plt.figure(figsize=(6,3))
X = np.linspace(0, 10)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X, Y, 'b')
plt.plot(-X, Y, 'b') # fonction paire
```



On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3 \operatorname{Arctan} x + x^2 f(x) = 2x \int_1^x f(t) dt. \quad (E)$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Que vaut $f(1)$?

3. Vérifier que

$$3x - 2x \int_1^x f(t) dt = \mathcal{O}(x^2)$$

lorsque x tend vers 0.

4. Vérifier que

$$\forall x > 0, \quad x^2 f''(x) + 2x f'(x) - 2f(x) = \frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse), on déduit du Théorème fondamental de l'analyse que la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_1^x f(t) dt \right]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors déduire de l'équation (E) que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{2}{x} \int_1^x f(t) dt - \frac{3 \operatorname{Arctan} x}{x^2}. \quad (\dagger)$$

Il est alors clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

✎ En revanche, sans calcul supplémentaire, on ne voit pas pourquoi la fonction f serait dérivable en $x = 0$.

♣ On conclut alors par récurrence.

Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$ pour un entier $n \geq 1$.

Si $x > 0$, alors le segment $[1 \leftrightarrow x]$ est contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$ sur lequel la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$. On déduit alors du Théorème fondamental que F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]0, +\infty[$.

Si $x < 0$, il faut d'abord appliquer la relation de Chasles (ce qui est possible car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas seulement sur $\mathbb{R}^*$) :

$$F(x) = F(-1) + \int_{-1}^x f(t) dt.$$

Le segment $[-1 \leftrightarrow x]$ est contenu dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ sur lequel la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ (par hypothèse de récurrence). On déduit alors du Théorème fondamental que

$$\left[x \mapsto \int_{-1}^x f(t) dt \right]$$

est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty, 0[$ et il en va de même pour F .

✎ Le Théorème fondamental s'applique sur un intervalle. Seulement sur un **intervalle**. Vu ? Vu aussi la manière de contourner l'obstacle ?

On déduit alors de $(\dagger)$ que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Finalement, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

✎ Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \geq 1$.

2. En substituant 1 à x dans l'équation fonctionnelle (E), on obtient

$$3 \operatorname{Arctan} 1 + f(1) = 2 \int_1^1 f(t) dt = 0$$

et donc $f(1) = -3\pi/4$.

✎ Sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, on peut écrire (E) sous la forme

$$2 \int_1^x f(t) dt - xf(x) = \frac{3 \operatorname{Arctan} x}{x}.$$

En dérivant par rapport à x , on obtient

$$\forall x > 0, \quad f(x) - xf'(x) = \frac{3}{x(1+x^2)} - \frac{3 \operatorname{Arctan} x}{x^2}. \quad (*)$$

Toute solution de (E) sur $]0, +\infty[$ est donc une solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (*) et de la condition initiale $f(1) = -3\pi/4$. On en déduit que l'équation (E) admet une, et une seule, solution sur $]0, +\infty[$.

3. On sait que $\operatorname{Arctan} x = x + \mathcal{O}(x^3)$ lorsque x tend vers 0. On déduit alors de l'équation fonctionnelle (E) que

$$x^2 f(x) = 2x \int_1^x f(t) dt - 3 \operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x \int_1^x f(t) dt - 3x + \mathcal{O}(x^3).$$

Par continuité de f , on sait que $f(x) = f(0) + o(1) = \mathcal{O}(1)$ pour x voisin de 0. Donc

$$3x - 2x \int_1^x f(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2).$$

4. On dérive l'équation (E) deux fois sur $]0, +\infty[$ (puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$).

$$\frac{d^2}{dx^2} (3 \operatorname{Arctan} x) = 3 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{-6x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^2 f(x)) = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) \quad (\text{Leibniz!})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(2x \int_1^x f(t) dt \right) = 4f(x) + 2xf'(x) \quad (\text{Leibniz encore!})$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad x^2 f''(x) + 2xf'(x) - 2f(x) = \frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

✎ La relation (*) nous donne la valeur $f'(1)$ (puisque on connaît déjà $f(1)$). On retrouve ainsi le fait que l'équation (E) admet une, et une seule, solution sur $]0, +\infty[$: cette fois, on l'identifie à la solution du problème de Cauchy associée à une équation différentielle linéaire du second ordre avec la condition initiale associée à l'instant $t = 1$.

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que valent $\det A$ et $\det B$?
2. Calculer A^2 et B^2 .
3. Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP \quad ?$$

1. Les deux matrices ont au moins une colonne nulle, donc elles ne sont pas inversibles et leur déterminant est nul.
2. La matrice A^2 est nulle et

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A^2.$$

3. Si A et B étaient semblables, alors A^2 et B^2 seraient aussi semblables. Or seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle, donc $A^2 = 0_3$ et $B^2 \neq 0_3$ ne sont pas semblables. Donc A et B ne sont pas semblables.

➤ Plus précisément, si $B = P^{-1}AP$, alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$ pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Variante. Si A et B étaient semblables, elles auraient même rang. Or le rang de A est égal à 1 (deux colonnes nulles, donc le rang est inférieur à 1 et matrice non nulle, donc rang supérieur à 1) et le rang de B est égal à 2 (une colonne nulle, donc le rang est inférieur à 2 et deux colonnes non proportionnelles, donc le rang est supérieur à 2) ?

1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la solution de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y''(t) + 2y'(t) + (t - 1)y(t) = \sin t$$

qui vérifie la condition initiale

$$\{f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

Que vaut $f''(0)$?

2. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de $t = 0$.

1. Pour $t = 0$, en tenant compte de la condition initiale, l'équation différentielle nous donne

$$0 = 1 \cdot f''(0) + 2 \cdot f'(0) - f(0) = f''(0) + 2$$

donc $f''(0) = -2$.

2. D'après la formule de Taylor-Young (la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$),

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2} \cdot t^2 + o(t^2) = t - t^2 + o(t^2).$$

Le développement limité à l'ordre 1 nous donne la tangente au graphe de f : c'est la droite d'équation $y = t$.

Le terme quadratique nous donne la position du graphe de f par rapport à la tangente : comme $-t^2 < 0$ pour $t \neq 0$, le graphe de f est situé sous la tangente (au voisinage de $t = 0$).

▮ Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, la dérivée f' et la dérivée seconde f'' sont des fonctions continues. Comme $f'(0) > 0$ et que $f''(0) < 0$, on déduit de la continuité qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \quad f'(t) > 0 \quad \text{et} \quad f''(t) < 0.$$

Par conséquent, la fonction f est croissante et concave sur $]-\alpha, \alpha[$.

On lance deux dés à 6 faces.

1. Modéliser cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité pour que la somme des deux résultats soit égale à 7 ?
3. Quelle est la probabilité pour que le résultat du premier dé soit égal à 3 ?
4. Ces deux événements sont-ils indépendants ?

1. Allons au plus simple et modélisons cette expérience par la donnée de deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

$$\forall 1 \leq i, j \leq 6, \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

2. La somme $S = X + Y$ est une variable aléatoire discrète (en tant que somme de deux variables aléatoires discrètes). Pour étudier l'évènement $[S = 7]$, on le décompose sur le système complet d'évènements associé à X (par exemple) :

$$[S = 7] = \bigsqcup_{i=1}^6 [S = 7, X = i] = \bigsqcup_{i=1}^6 [X = i, Y = 7 - i].$$

Lorsque i varie de 1 à 6, la différence $7 - i$ varie de 6 à 1, donc

$$\mathbf{P}(S = 7) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(X = i, Y = 7 - i) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

3. Comme X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{6}.$$

4. Simplifions l'intersection des deux évènements :

$$[S = 7, X = 3] = [X + Y = 7, X = 3] = [X = 3, Y = 4].$$

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(S = 7, X = 3) = \mathbf{P}(X = 3) \mathbf{P}(Y = 4) = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(S = 7) \mathbf{P}(X = 3).$$

Les évènements $[S = 7]$ et $[X = 3]$ sont donc indépendants.

1. a. Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann.

1. b. En déduire la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la limite de

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6}.$$

4. En déduire la limite de

$$U_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}.$$

1. a. Si la fonction f est **continue** (ou au moins continue par morceaux) sur le **segment** $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

✎ L'astuce taupinale permet d'en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

1. b. La fonction $\sin$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} = \int_0^1 \sin t dt = [-\cos t]_0^1 = 1 - \cos 1.$$

✎ Un détour par les complexes permet d'expliciter la somme S_n :

$$S_n = \frac{1}{n} \Im \sum_{k=1}^n (e^{i/n})^k = \Im \left(\frac{e^{i/n}}{n} \cdot \frac{1 - e^i}{1 - e^{i/n}} \right)$$

et on conclut sachant que $e^u - 1 \sim u$ lorsque u tend vers 0 (que u soit réel ou complexe n'est pas la question ici).

2. On sait bien que

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

✎ La fonction $[t \mapsto t]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, ce qui nous permet également d'interpréter T_n comme une somme de Riemann :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

3. La fonction $f = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée troisième : $f^{(3)} = -\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 \right| \leq \frac{|x-0|^3}{3!} \|f^{(3)}\|_{\infty}$$

(inégalité de Taylor-Lagrange). Plus clairement, sachant que $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ et $f''(0) = -\sin 0 = 0$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}.$$

4. D'après l'inégalité triangulaire et l'encadrement précédent,

$$|U_n - T_n| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{k}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{6n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3.$$

Comme $1 \leq k \leq n$, on a $0 \leq k/n \leq 1$ et on peut donc appliquer l'encadrement précédent.

La fonction $[t \mapsto t^3]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3 = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4},$$

ce qui prouve que le majorant tend vers 0 (à cause du facteur $1/n^2$). $1/2$ encore.

Comme la différence $U_n - T_n$ tend vers 0, on en déduit que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge vers $1/2$.

On ne peut pas interpréter U_n comme une somme de Riemann.

Cela dit, le détour habituel par les complexes permet de calculer explicitement U_n en faisant apparaître une série géométrique et en factorisant par l'angle moitié.

$$U_n = \Im \sum_{k=1}^n (e^{i/n^2})^k = \Im \frac{e^{i/n^2} \cdot (e^{i/n} - 1)}{e^{i/n^2} - 1} = \sin\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \cdot \frac{\sin(1/2n)}{\sin(1/2n^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^2}{(2n)^2} = \frac{1}{2}$$

Il n'est pas sûr que ce soit vraiment plus simple que la méthode que nous avons suivie !

On considère les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. a. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\text{Ker}(u - \lambda I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. b. Donner une base de $\text{Ker}(u - I)$ et une base de $\text{Ker}(u - 2I)$.

1. c. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : v(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. b. Quel est le rang de $v - 2I$? En déduire qu'il n'existe aucune matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = B$.

1. a. Comme u et I sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, la combinaison linéaire $u - \lambda I$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On sait que le noyau d'un endomorphisme de E est toujours un sous-espace de E , donc $\text{Ker}(u - \lambda I)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

Variante

Si on a oublié cet important théorème, on peut appliquer le théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels : il suffit de vérifier que l'ensemble $\text{Ker}(u - \lambda I)$ est contenu dans un espace vectoriel (lequel ?), qu'il contient le vecteur nul et qu'il est stable par combinaison linéaire.

1. b. Dans la base canonique, les endomorphismes $(u - I)$ et $(u - 2I)$ sont respectivement représentés par les matrices

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Les deux premières colonnes de $A - I_3$ ne sont pas proportionnelles, donc le rang de cette matrice est supérieur à 2. Les deux dernières lignes sont proportionnelles, donc le rang de cette matrice est inférieur à 2.

Le rang est donc égal à 2 et (Théorème du rang) la dimension du noyau de $A - I_3$ est égale à 1.

On constate que $2C_2 - C_3 = C_1$, c'est-à-dire $1 \cdot C_1 - 2 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$. Donc la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de $A - I_3$. Comme cette matrice représente $u - I$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que le vecteur $\varepsilon_3 = (1, -2, 1)$ appartient à $\text{Ker}(u - I)$.

Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, donc

$$\text{Ker}(u - I) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1).$$

En particulier, $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$.

• Les trois colonnes de la matrice $A - 2I_3$ sont proportionnelles et la matrice n'est pas la matrice nulle, donc le rang de cette matrice est égal à 1. La dimension du noyau est donc égale à 2 (Théorème du rang).

On constate que $C_1 = C_2 - C_3 = 0$, donc les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de $A - 2I_3$. Comme ces colonnes ne sont pas proportionnelles et appartiennent à un sous-espace de dimension 2, elles constituent une base de ce sous-espace.

On en déduit que le couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (0, 1, -1),$$

est une base de $\text{Ker}(u - 2I)$.

En particulier, $u(\varepsilon_1) = 2 \cdot \varepsilon_1$ et $u(\varepsilon_2) = 2 \cdot \varepsilon_2$.

🔗 Comme toutes les matrices dont le rang est égal à 1, on peut factoriser cette matrice.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe alors que l'image de cette matrice est la droite dirigée par la colonne et que son noyau est l'hyperplan d'équation $y + z = 0$ (la ligne représente dans la base canonique la forme linéaire dont le noyau est cet hyperplan).

1.c. Considérons la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. La matrice qui représente cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (en développant par la première colonne, on trouve que son déterminant est égal à -1 et donc non nul). Par conséquent, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

On a déjà remarqué que

$$u(\varepsilon_1) = 2 \cdot \varepsilon_1, \quad u(\varepsilon_2) = 2 \cdot \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.a. L'équation $v(x) = \lambda x$ équivaut à $(v - \lambda I)(x) = 0$. Par conséquent, l'ensemble étudié est le noyau de l'endomorphisme $(v - \lambda I)$ et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.b. Comme l'endomorphisme v est représenté par la matrice B dans la base canonique, l'endomorphisme $v - 2I$ est représenté (dans la base canonique) par la matrice

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $B - 2I_3$ sont échelonnées, donc le rang de cette matrice est supérieur à 2.

Par ailleurs, on trouve assez facilement (grâce à l'échelonnement des deux premières colonnes!) que

$$2C_1 - 3C_2 + C_3 = 0$$

ce qui prouve que le vecteur $(2, -3, 1) \neq (0, 0, 0)$ appartient au noyau de $(v - 2I)$. Donc le rang de $(v - 2I)$ est inférieur à 2 et finalement, il est égal à 2.

• Par conséquent, la dimension du noyau de $(v - 2I)$ est égale à 1 (Théorème du rang).

• S'il existait une matrice inversible Q telle que $B = Q^{-1}AQ$, alors

$$B - 2I_3 = Q^{-1}AQ - 2I_3 = Q^{-1}(A - 2I_3)Q.$$

Or deux matrices semblables ont même rang et $\text{rg}(B - 2I_3) = 2 \neq 1 = \text{rg}(A - 2I_3)$, donc c'est impossible.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}.$$

On pose également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{n!}.$$

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n .
2. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

1. D'après la relation entre u_n et u_{n+1} ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)u_n + (-1)^{n+1}}{n! \cdot (n+1)} = \frac{u_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. La suite de terme général $1/n!$ est décroissante et tend vers 0, donc la série alternée $\sum (-1)^n/n!$ est convergente.

3. On a démontré pour commencer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis que la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ était convergente. Par conséquent, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{\ell=1}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} = e^{-1}$$

en se souvenant que $v_0 = u_0 = 1$ et en reconnaissant la série exponentielle.

1. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-x \sin t) dt.$$

1. a. Démontrer que la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. b. Démontrer que

$$\forall u, v \geq 0, \quad |e^{-u} - e^{-v}| \leq |u - v|.$$

1. c. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = 2x - F(x).$$

2. a. Calculer $f(0)$.

2. b. Démontrer que

$$\forall 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t$$

et en déduire que $f(\sqrt{\pi}/2) > 0$.

2. c. En déduire que la fonction f s'annule une fois, et une seule, sur le segment $[0, \sqrt{\pi}/2]$.

1. a. Soient deux réels $0 \leq x \leq y$.

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on sait que $\sin t \geq 0$. Comme la fonction $\exp$ est croissante, on en déduit que

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, \quad 0 \leq \exp(-y \sin t) \leq \exp(-x \sin t)$$

puis, en intégrant bornes croissantes, que

$$0 \leq F(y) \leq F(x).$$

La fonction F est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

✎ On n'a pas toujours besoin de savoir calculer la dérivée d'une fonction pour étudier ses variations !

1. b. La fonction $f = [t \mapsto \exp(-t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f'(t) = -\exp(-t) \in [-1, 0[.$$

On déduit de l'inégalité des accroissements finis que cette fonction f est 1-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire

$$\forall u, v \geq 0, \quad |e^{-u} - e^{-v}| \leq |u - v|.$$

1. c. Toute fonction lipschitzienne est continue (et même uniformément continue).

2. a. Par construction, $f(0) = -F(0) = -\pi/2$.

2. b. On sait que la fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi/2]$. Son graphe est donc situé au-dessus du graphe de la sécante qui relie le point d'abscisse 0 (et d'ordonnée nulle) au point d'abscisse $\pi/2$ (dont l'ordonnée est égale à 1). Donc

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t.$$

✎ On en déduit que, pour $x = \sqrt{\pi}/2 > 0$,

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, \quad \exp(-x \sin t) \leq \exp(-2x/\pi \cdot t).$$

En intégrant (bornes croissantes!),

$$F(x) \leq \int_0^{\pi/2} \exp(-2x/\pi \cdot t) dt < \int_0^{+\infty} \exp(-2x/\pi \cdot t) dt = \frac{\pi}{2x} = \sqrt{\pi}$$

et donc $f(x) = 2x - F(x) > 2x - \sqrt{\pi} = 0$.

2. c. La fonction f est **continue** (différence de deux fonctions continues) sur l'intervalle $[0, \sqrt{\pi}/2]$. De plus, elle est **strictement croissante** (différence d'une fonction *strictement* croissante et d'une fonction décroissante au sens large). Donc elle réalise une bijection de $[0, \sqrt{\pi}/2]$ sur $[f(0), f(\sqrt{\pi}/2)]$.

✎ Il n'est pas nécessaire de savoir dériver une fonction pour démontrer qu'elle est strictement monotone.
(Air connu.)

Comme $f(0) < 0 < f(\sqrt{\pi}/2)$, on en déduit que la fonction f s'annule une fois, et une seule sur le segment $[0, \sqrt{\pi}/2]$.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 11 & 14 & -12 \\ 7 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $x_0 = (3, 0, 2)$.

1. Calculer les vecteurs $x_1 = u(x_0)$ et $x_2 = u^2(x_0)$.

2. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, x_1, x_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$? Comment obtenir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique? (On ne demande pas d'explicitier cette seconde matrice.)

3. On admet que $u^3(x_0) = -6x_0 + 7x_1$.

3.a. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.b. Calculer $\det u$ et $\text{tr } u$.

4. Expliquer pourquoi la matrice A n'est semblable à aucune des matrices suivantes.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On effectue successivement les produits matriciels

$$X_1 = A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = AX_1$$

et on trouve : $x_1 = (-5, 9, 7)$, $x_2 = (19, -13, -3)$.

Il n'est pas nécessaire de calculer A^2 !

2. Écrivons la matrice représentant la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 19 \\ 0 & 9 & -13 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

L'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1$ démontre que cette matrice P est équivalente à

$$P' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 19 \\ 0 & 9 & -13 \\ 0 & 31 & -47 \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières lignes de P' ne sont pas proportionnelles.

Si les deux dernières lignes de P' étaient proportionnelles, alors

$$\begin{vmatrix} 9 & -13 \\ 31 & -47 \end{vmatrix} = -9 \times 47 + 13 \times 31 = 0.$$

On aurait donc $13 \times 31 = 9 \times 47$. Or le nombre premier 13 est premier à 9 et à 47 (qui ne sont pas des multiples de 13), donc il est premier au produit 9×47 , ce qui contredit l'égalité.

On perdrait temps et énergie à calculer ces deux produits !

De plus, la première ligne de P' n'est pas une combinaison linéaire des deux autres, donc la matrice P' est inversible et comme P et P' sont équivalentes, la matrice P est bien inversible.

• La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice P est la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}$.

• La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est alors la matrice P^{-1} .

3.a. On a démontré à la question précédente que la famille

$$\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), u^2(x_0))$$

était une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de u relative à cette base est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

• L'image par u du premier vecteur de $\mathcal{B}$ est le second vecteur de $\mathcal{B}$; l'image du second vecteur de $\mathcal{B}$ est le troisième vecteur de $\mathcal{B}$.

Deux matrices semblables ayant même trace, on peut déjà en déduire que le troisième coefficient diagonal est nul.

Pour trouver la troisième colonne de la matrice, il faut décomposer le vecteur $u(u^2(x_0))$ (= l'image par u du troisième vecteur de la base $\mathcal{B}$) dans la base $\mathcal{B}$. Or l'énoncé admet que

$$u(u^2(x_0)) = u^3(x_0) = -6x_0 + 7x_1 = (-6) \cdot x_0 + 7 \cdot u(x_0) + 0 \cdot u^2(x_0),$$

donc la matrice de u relative à la base $\mathcal{B}$ est bien la matrice F de l'énoncé.

3.b. Deux matrices semblables ont même déterminant et même trace.

• La trace de u est nulle (il est clair que la trace de A et la trace de F sont nulles).

• En développant par la première colonne (ou par la dernière ligne), on trouve

$$\det F = -1 \times [-1 \times (-6)] = -6,$$

donc $\det u = -6$.

• Le déterminant de A est assez pénible à calculer !

4. On passe de F à B_1 avec l'opération $C_3 \leftarrow -C_3$, donc $\det B_1 = -\det F = -\det A \neq 0$. Deux matrices semblables ayant même déterminant, on en déduit que B_1 et A ne sont pas semblables.

• La trace de B_2 est égale à 1 et donc différente de la trace de A (qui est nulle). Deux matrices semblables ayant même trace, on en déduit que B_2 et A ne sont pas semblables.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation

$$P_n(x) = 0$$

admet une, et une seule, solution dans $[0, 1]$. Cette solution sera dorénavant notée a_n .

2. Démontrer que

$$\forall n \geq 3, \quad 0 \leq a_n \leq \frac{2}{n}.$$

3. Calculer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum a_n$ est-elle convergente?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction (polynomiale) P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) \leq 0$$

donc la fonction P_n est décroissante sur $[0, 1]$. Mieux, comme sa dérivée ne s'annule qu'en un seul point (seulement en $x = 1$), la fonction P_n est en fait *strictement* décroissante sur $[0, 1]$.

✎ **Rappel :** Une fonction dérivable et monotone est **strictement monotone** si, et seulement si, il n'existe pas d'intervalle de longueur strictement positive sur lequel sa dérivée est identiquement nulle (= il n'y a pas de "palier" sur le graphe).

De plus, $P_n(0) = 1 > 0$ et $P_n(1) = 2 - n$, donc P_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[2 - n, 1]$.

✎ Pour tout $n \geq 2$, le réel 0 appartient au segment image $[2 - n, 1]$, donc l'équation $P_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution sur $[0, 1]$.

2. On sait déjà que $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$.

✎ Comme la fonction P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et que les réels a_n et $2/n$ appartiennent à $[0, 1]$ pour tout $n \geq 2$,

$$a_n \leq \frac{2}{n} \iff P_n(a_n) \geq P_n(2/n).$$

✎ Il faut invoquer la monotonie stricte de P_n pour justifier l'équivalence entre ces deux inégalités larges.

Or $P_n(a_n) = 0$ (par définition de a_n) et

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(2/n) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \leq 0.$$

Donc on a bien $a_n \leq 2/n$ pour tout $n \geq 2$.

✎ Pour $n \geq 3$, on a même $a_n < 2/n$ (alors que $a_2 = 1$).

3. Pour $n \geq 3$, on déduit de l'encadrement précédent que

$$0 \leq a_n^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$1 - na_n = P_n(a_n) - a_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c'est-à-dire

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Comme $a_n \sim 1/n$ et que la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, la série $\sum a_n$ est divergente.

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = x^2 - 1$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui peut s'écrire sous forme résoluble sur $]0, +\infty[$:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad y'(x) + \frac{x^2 - 1}{x} y(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

• Sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$\int^x t - \frac{1}{t} dt \equiv \frac{x^2}{2} - \ln x.$$

Une fonction $y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ est donc une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = A \exp\left(\ln x - \frac{x^2}{2}\right) = A x e^{-x^2/2}.$$

• Une solution particulière évidente est $y_0 = [x \mapsto 1]$.

• D'après le principe de superposition, une fonction $y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ est une solution de l'équation différentielle complète si, et seulement si, il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = 1 + A x e^{-x^2/2}.$$

🔗 Si on n'a pas les yeux assez ouverts pour voir la solution particulière constante, il faut se lancer dans la méthode de variation de la constante et, il faut le reconnaître, c'est assez moche ici.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Démontrer que le sous-espace F représenté par

$$[x - y + z = 0]$$

et la droite G dirigée par $\varepsilon_1 = (2, -1, -4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F et démontrer que F est stable par u , c'est-à-dire :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

3. Vérifier que G est stable par u .

4. Démontrer que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$?

5. Calculer $\det A$. La matrice A est-elle inversible?

6. a. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme

$$P_0 = aX^2 + bX + c$$

tel que $P_0(0) = 0$ et $P_0(1) = P_0(3) = 1$.

6. b. En raisonnant dans la base $\mathcal{B}$, reconnaître l'endomorphisme

$$P_0(u) = au^2 + bu + cI.$$

6. c. Expliciter deux réels α et β tels que

$$A^{-1} = \alpha A + \beta I_3.$$

1. Le sous-espace F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, puisque c'est le noyau de la forme linéaire

$$\varphi = [(x, y, z) \mapsto x - y + z]$$

(qui n'est pas identiquement nulle : l'image des vecteurs de la base canonique est non nulle), et le vecteur ε_1 , qui est un vecteur directeur de la droite G , n'appartient pas à cet hyperplan (puisque $\varphi(\varepsilon_1) = -1 \neq 0$).

Par conséquent, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Comme $\dim F = 2$, une base de F est une famille libre de 2 vecteurs de F , c'est-à-dire un couple de vecteurs de F qui ne sont pas proportionnels.

La famille

$$(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

est donc une base de F .

• On vérifie sans peine que

$$u(\varepsilon_2) = 3 \cdot \varepsilon_2 \in F \quad \text{et que} \quad u(\varepsilon_3) = 3 \cdot \varepsilon_3 \in F. \quad (\dagger)$$

Par linéarité de u ,

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad u(\alpha \cdot \varepsilon_2 + \beta \cdot \varepsilon_3) = \alpha u(\varepsilon_2) + \beta u(\varepsilon_3) = 3(\alpha \cdot \varepsilon_2 + \beta \cdot \varepsilon_3) \in F.$$

On a ainsi démontré que le plan F était stable par u .

3. On remarque que

$$u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \quad (\ddagger)$$

et on en déduit que

$$\forall x \in G, \quad u(x) = x \in G.$$

En effet, pour tout $x \in G$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha \cdot \varepsilon_1$ et, toujours par linéarité de u ,

$$u(x) = \alpha u(\varepsilon_1) = \alpha \cdot \varepsilon_1 = x.$$

La droite G est donc stable par u .

4. La matrice de la famille $\mathcal{B}$ relative à la base canonique est

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2$ démontre que la matrice Q a même rang que la matrice

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première et la troisième colonnes de Q' ne sont pas proportionnelles (donc le rang de Q' est supérieur à 2) et la deuxième colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux autres colonnes (donc le rang de Q' est supérieur à 3).

La matrice Q' est inversible, donc la matrice Q est inversible elle aussi et par conséquent la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De ce fait, la matrice Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

D'après la définition des matrices,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(\varepsilon_1), u(\varepsilon_2), u(\varepsilon_3)).$$

D'après (†) et (‡),

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(première colonne)} \\ u(\varepsilon_2) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 3 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 && \text{(deuxième colonne)} \\ u(\varepsilon_3) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 3 \cdot \varepsilon_3 && \text{(troisième colonne)} \end{aligned}$$

et finalement

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Deux matrices semblables ont même déterminant et comme la matrice A est semblable à la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, on en déduit que $\det A = 9$.

Quoi de plus simple à calculer que le déterminant d'une matrice diagonale?

Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Donc la matrice A est inversible.

6.a. Les trois abscisses 0, 1 et 3 sont deux à deux distinctes. Par conséquent, il existe un, et un seul, polynôme P_0 de degré strictement inférieur à 3 tel que $P_0(0) = 0$, $P_0(1) = 1$ et $P_0(3) = 1$ (Interpolation de Lagrange).

La question n'est pas posée, mais $P_0 = -1/3X^2 + 4/3X$.

Le moyen le plus simple de déterminer ce polynôme consiste à remarquer que $P_0 - 1$ est un polynôme de degré inférieur à 2 qui admet 1 et 3 pour racines, donc il existe un scalaire α tel que

$$P_0 = 1 + \alpha \cdot (X - 1)(X - 3) = \alpha X^2 - 4\alpha X + (1 + 3\alpha)$$

et la condition $P_0(0) = 0$ nous donne $1 + 3\alpha = 0$.

6.b. La matrice relative à la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme P_0 est

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(1) & 0 & 0 \\ 0 & P_0(3) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(3) \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc $P_0(u) = I$.

6. c. *Si on n'a pas déjà calculé P_0 , il faut s'y mettre !*

La relation précédente montre que

$$I_3 = \frac{-1}{3}A^2 + \frac{4}{3}A = A\left(\frac{-1}{3}A + \frac{4}{3}I_3\right) \quad \text{et donc que} \quad A^{-1} = \frac{-1}{3}A + \frac{4}{3}I_3.$$

*Avec le Théorème du rang, pour démontrer qu'une matrice carrée A est inversible, il **suffit** de trouver une matrice B telle que*

$$AB = I_n.$$

(Il n'est pas nécessaire de vérifier que le produit BA est aussi égal à I_n .)

Cela dit, ici, on a déjà démontré que la matrice A était inversible et on sait qu'il n'y a qu'un seul inverse. On n'a donc même pas besoin d'invoquer le Théorème du rang pour conclure.

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall x > 0, \quad xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation différentielle (E) admet une solution de la forme $y(x) = x^\alpha$.

2. Soient y et z , deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$, liées par la relation suivante.

$$\forall x > 0, \quad y(x) = xz(x)$$

2.a. Démontrer que y est une solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle (E') qu'on précisera.

2.b. Indiquer comment résoudre l'équation (E').

1. Si $y(x) = x^\alpha$, alors $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, donc

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad xy''(x) + xy'(x) - y(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + \alpha x^\alpha - x^\alpha \\ &= x^{\alpha-1}(\alpha-1)(\alpha+x). \end{aligned}$$

Par conséquent, y est solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha = 1$.

La fonction $[x \mapsto x]$ est une solution particulière de (E).

2.a. Sur $]0, +\infty[$, la relation qui existe entre y et z montre que y est de classe $\mathcal{C}^2$ si, et seulement si, z est de classe $\mathcal{C}^2$.

De plus,

$$y'(x) = z(x) + xz'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$$

donc

$$xy''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2z''(x) + 2xz'(x) + x^2z'(x) + xz(x) - xz(x) = x[xz''(x) + (x+2)z'(x)].$$

Par conséquent, y est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z vérifie

$$\forall x > 0, \quad xz''(x) + (x+2)z'(x) = 0. \quad (E')$$

☞ Deux interprétations sont possibles pour cette question : on réalise un changement d'inconnue pour se ramener à une équation qu'on espère plus simple ; on met en œuvre la méthode de variation de la constante (avec $z(x)$ dans le rôle de la constante qui varie) pour terminer la résolution de (E).

2.b. L'équation (E') est en fait une équation linéaire homogène du **premier** ordre en $z'(x)$. On sait donc résoudre une telle équation, ce qui nous donne l'expression de $z'(x)$ (à une constante multiplicative près). Il reste ensuite à primitiver cette expression (ce qui ajoute une seconde constante d'intégration) et pour finir, il faut penser à multiplier par x pour trouver l'expression générale de $y(x)$.

☞ Si on mène les calculs, on trouve

$$z'(x) = A \cdot \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Cette fonction est bien continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc elle admet des primitives, mais ces primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles (Théorème de Liouville).

On doit donc se contenter d'écrire

$$z(x) = A \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt + B$$

et finalement

$$\forall x > 0, \quad y(x) = Ax \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt + Bx.$$

1. On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\mathbf{P}(A) = 1/2, \quad \mathbf{P}(B | A) = \frac{25}{36} \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(B | A^c) = \frac{5}{6}.$$

NB : On note ici A^c , le complémentaire de A et $\mathbf{P}(B | A)$, la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant A : $\mathbf{P}(B | A) = \mathbf{P}_A(B)$.

1.a. Calculer $\mathbf{P}(B^c | A)$.

1.b. Calculer $\mathbf{P}(B^c)$.

1.c. Calculer $\mathbf{P}(A | B^c)$.

2. On joue à Pile ou Face. Si on obtient Pile, on lance un dé deux fois ; si on obtient Face, on ne lance le dé qu'une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

1.a. La mesure de probabilité conditionnelle sachant A , c'est-à-dire $\mathbf{P}_A$, est une mesure de probabilité comme les autres, donc

$$\mathbf{P}(B^c | A) = \mathbf{P}_A(B^c) = 1 - \mathbf{P}_A(B) = \frac{11}{36}.$$

1.b. Pour les mêmes raisons,

$$\mathbf{P}(B^c | A^c) = \mathbf{P}_{A^c}(B^c) = 1 - \mathbf{P}_{A^c}(B) = \frac{1}{6}.$$

♣ D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B^c) = \mathbf{P}(B^c | A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B^c | A^c) \cdot \mathbf{P}(A^c) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{72}.$$

1.c. Par définition des probabilités conditionnelles (Formule de Bayes),

$$\mathbf{P}(A | B^c) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B^c)}{\mathbf{P}(B^c)} = \frac{\mathbf{P}(B^c | A) \mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B^c)} = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{72}{17} = \frac{11}{17}.$$

2. On modélise l'expérience par trois variables aléatoires X , Y_1 et Y_2 définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces trois variables aléatoires sont indépendantes, que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ et que Y_1 et Y_2 suivent toutes les deux la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

♣ Autrement dit, la variable aléatoire X modélise le lancer de la pièce (avec $X = 1$ si on obtient Pile) et les variables aléatoires Y_1 et Y_2 modélisent le lancer des deux dés.

On considère l'évènement $A = [X = 1]$ (= obtenir Pile) et l'évènement

$$B = ([X = 1] \cap [Y_1 \neq 6] \cap [Y_2 \neq 6]) \cup ([X = 0] \cap [Y_1 \neq 6]).$$

♣ L'évènement B est réalisé lorsqu'on n'obtient pas 6 (qu'on ait lancé un seul dé ou les deux).

Les évènements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ sont disjoints, donc

$$B = ([X = 1] \cap [Y_1 \neq 6] \cap [Y_2 \neq 6]) \sqcup ([X = 0] \cap [Y_1 \neq 6]). \quad (\star)$$

♣ Ces évènements constituent même le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire de Bernoulli X .

♣ On a donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/2$. De plus,

$$\mathbf{P}(B | A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = 2 \mathbf{P}(A \cap B)$$

et d'après $(\star)$

$$A \cap B = [X = 1] \cap B = [X = 1] \cap [Y_1 \neq 6] \cap [Y_2 \neq 6].$$

Par indépendance,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(X = 1) \mathbf{P}(Y_1 \neq 6) \mathbf{P}(Y_2 \neq 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

et donc

$$\mathbf{P}(B | A) = \frac{25}{36}.$$

• De même,

$$\mathbf{P}(B | A^c) = \frac{\mathbf{P}(A^c \cap B)}{\mathbf{P}(A^c)} = 2 \mathbf{P}(A^c \cap B)$$

et, toujours d'après (*),

$$A^c \cap B = [X = 0] \cap B = [X = 0] \cap [Y_1 \neq 6].$$

Par indépendance,

$$\mathbf{P}(A^c \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$$

et donc

$$\mathbf{P}(B | A^c) = \frac{5}{6}.$$

• On est donc ramené à la situation précédente et nous cherchons la probabilité d'obtenir 6, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(B^c) = \frac{17}{72}$$

d'après 1.b.

1. On considère les quatre matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1.a. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times L$ où C est une matrice colonne et L une matrice ligne ?

1.b. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times C^\top$ où C est une matrice colonne ?

2. On considère deux matrices M et N dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\text{Ker } M = \text{Ker } N, \quad \text{Im } M = \text{Im } N \quad \text{et} \quad \text{rg } M = 1.$$

2.a. Démontrer qu'il existe une matrice colonne C et six réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ et μ_3 tels que

$$M = (\lambda_1 C \quad \lambda_2 C \quad \lambda_3 C) \quad \text{et} \quad N = (\mu_1 C \quad \mu_2 C \quad \mu_3 C).$$

2.b. Donner une équation cartésienne de $\text{Ker } M$.

2.c. En déduire qu'il existe un scalaire α non nul tel que

$$N = \alpha M.$$

1.a. Si $A = C.L$, alors toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C . Par conséquent, il est impossible de factoriser la matrice A_2 (les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles).

En revanche, les autres matrices (dont le rang est égal à 1) sont toutes factorisables.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} (-2 \quad 2 \quad 3) \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 2)$$

1.b. Le produit $CC^\top$ est une matrice symétrique.

En effet, $(C.C^\top)^\top = (C^\top)^\top.C^\top = C.C^\top$.

Donc A_1 et A_4 ne peuvent se factoriser sous la forme $C.C^\top$.

En revanche, comme on l'a vu à la question précédente, la matrice A_4 peut être factorisée sous la forme $C.C^\top$.

2.a. Le sous-espace $\text{Im } M$ est une droite vectorielle. Il existe donc une colonne **non nulle** qui dirige cette droite : $\text{Im } M = \mathbb{R} \cdot C$. Les colonnes de M sont donc toutes proportionnelles à la colonne C et il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$M = (\lambda_1 C \quad \lambda_2 C \quad \lambda_3 C).$$

Comme $\text{Im } N = \text{Im } M$, alors $\text{Im } N = \mathbb{R} \cdot C$. De même, il existe trois réels μ_1, μ_2 et μ_3 tels que

$$N = (\mu_1 C \quad \mu_2 C \quad \mu_3 C).$$

2.b. Il est temps de faire le lien avec les premières questions ! On a obtenu deux factorisations :

$$M = C \times (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) = C.L_1 \quad \text{et} \quad N = C \times (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) = C.L_2.$$

Quelle que soit la colonne X ,

$$M.X = (C.L_1)X = C.(L_1.X).$$

Le produit $L_1.X$ est en fait un scalaire (produit d'une ligne par une colonne) et la colonne C n'est pas nulle, donc la colonne $M.X$ est nulle si, et seulement si, le scalaire $L_1.X$ est nul. Autrement dit, $X \in \text{Ker } M$ si, et seulement si,

$$L_1.X = 0.$$

On a ainsi démontré que le noyau de M était représenté par l'équation cartésienne

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0. \quad (\dagger)$$

✎ D'après le théorème du rang, le noyau d'une application linéaire de rang 1 est un hyperplan de l'espace de départ.

Toute matrice M de rang 1 peut se factoriser sous la forme $C.L$ où la colonne (non nulle) C dirige l'image de M et où la ligne (non nulle) L représente la forme linéaire φ telle que $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } M$.

2.c. Par symétrie, le noyau de N est représenté par l'équation cartésienne

$$\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z = 0. \quad (\ddagger)$$

Comme $\text{Ker } M = \text{Ker } N$, on en déduit que les équations cartésiennes $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ sont proportionnelles.

✎ Deux formes linéaires (non nulles) sont proportionnelles si, et seulement si, leurs noyaux sont égaux.

Il existe donc un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que

$$L_2 = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) = \alpha (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) = \alpha \cdot L_1.$$

Par conséquent,

$$N = C.L_2 = C.(\alpha \cdot L_1) = \alpha \cdot (C.L_1) = \alpha \cdot M.$$

Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

1. Justifier que l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et que la fonction F ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Étudier le sens de variation de F .
3. Comparer $F(x)$ et $F(1/x)$.
4. Soit $0 < x < 1$.
- 4.a. Démontrer que

$$0 \leq F(x) \leq \int_1^x \ln t dt.$$

- 4.b. En déduire que F tend vers une limite $\ell \in [0, 1]$ au voisinage de 0.
5. Tracer l'allure du graphe de F .

1. La fonction f définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. L'intégrale $F(x)$ est donc définie pour tout $x > 0$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment $[1 \leftrightarrow x]$ contenu dans $]0, +\infty[$) et, d'après le Théorème fondamental, la fonction F est la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.

La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, la fonction F est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

2. La fonction f est clairement négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$, donc la fonction F (qui est une primitive de f) est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

En particulier, $F(1) = 0$ est le minimum de F , ce qui prouve que la fonction F est positive.

3. Soit $0 < x < 1$.

L'application $[t \mapsto u = 1/t]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et réalise une bijection (décroissante) de $[x, 1]$ sur $[1, 1/x]$. D'après la formule du changement de variable,

$$\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_1^x \frac{-\ln(1/t)}{(1/t)^2 + 1} \frac{dt}{t^2} = \int_1^{1/x} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du$$

ce qui nous donne

$$\forall 0 < x < 1, \quad F(x) = F(1/x).$$

Comme $0 < x < 1$, dans le membre de gauche, les bornes sont dans l'ordre décroissant et la fonction intégrande est négative, donc l'intégrale est positive.

Dans le membre de droite, les bornes sont dans l'ordre croissant et la fonction intégrande est positive, donc l'intégrale est positive.

Si le résultat était faux (il ne l'est pas!), au moins le signe serait correct.

Il est clair que cette égalité est vraie aussi pour $x \geq 1$ (par symétrie!).

- 4.a. On a déjà démontré (deux fois!) que $F(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

Pour $0 < x < 1$, on sait que

$$\forall t \in [x, 1], \quad \ln t < 0 \quad \text{et} \quad 1+t^2 > 1 \quad \text{donc} \quad \forall t \in [x, 1], \quad \ln t \leq \frac{\ln t}{1+t^2}.$$

En intégrant **bornes décroissantes** (pour une fois!),

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \ln t dt. \quad (\dagger)$$

- 4.b. On peut calculer le majorant sans difficulté :

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1 \quad (\ddagger)$$

et en déduire que ce majorant reste borné lorsque x tend vers 0.

La fonction F est donc décroissante et majorée sur $]0, 1]$, ce qui prouve qu'elle tend vers une limite finie au voisinage de 0.

✎ On étudie une limite à droite en 0, donc il s'agit bien de vérifier que F est décroissante et majorée au voisinage de 0 pour pouvoir invoquer le Théorème de la limite monotone.

♣ En passant à la limite dans (†) et (‡), on obtient

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} F(x) \leq 1.$$

5.

```
import scipy.integrate as integr
```

```
def phi(t):
    return np.log(t)/(1+t**2)
```

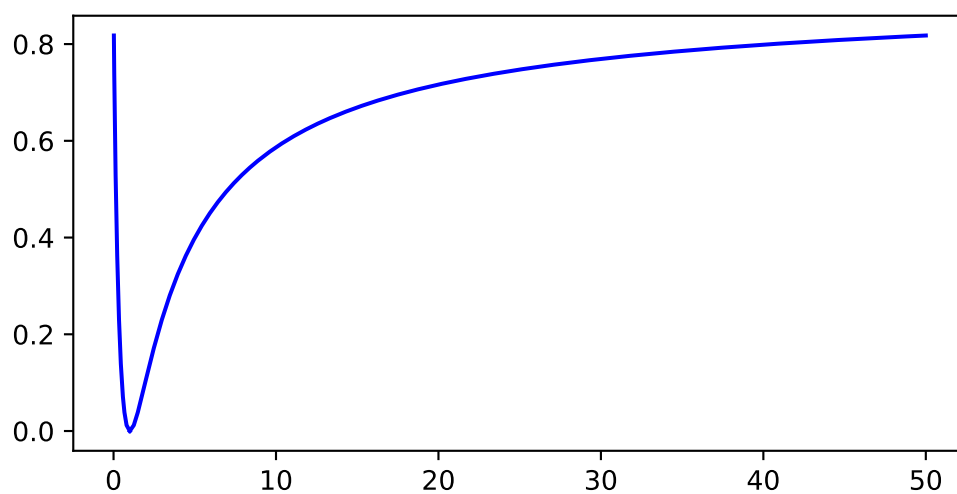
```
def f(x):
    return integr.quad(phi, 1, x)[0]
```

```
X = np.linspace(1, 50, 200)
```

```
Y = [f(x) for x in X]
```

```
plt.plot(X, Y, 'b')
```

```
plt.plot(1/X, Y, 'b') # symétrie F(x) = F(1/x)
```



1. On considère trois matrices

$$A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M$$

telles que

$$AMB = AB.$$

1. a. Quelle est la taille de la matrice M ?

1. b. On suppose que A est injective. Démontrer que $MB = B$.

1. c. On suppose en outre que B est surjective. Démontrer que M est la matrice identité.

2. a. Vérifier que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de projection.

2. b. Expliciter deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$U = AB.$$

2. c. Démontrer que, quelles que soient les matrices A et B choisies, le produit BA est la matrice identité.

1. a. Pour que le produit AMB soit défini, il faut que le nombre de lignes de M soit égal au nombre de colonnes de A (soit : 2) et que le nombre de colonnes de M soit égal au nombre de lignes de B (soit : 2). Donc $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. b. L'équation $AMB = AB$ équivaut à $A(MB - B) = 0_3$, ce qui signifie que les trois colonnes de la matrice $MB - B$ appartiennent au noyau de A . Si A est injective, alors le noyau de A est réduit à la colonne nulle et de ce fait, il faut que les trois colonnes de $MB - B$ soient nulles. Donc $MB = B$.

1. c. L'équation $MB = B$ équivaut à $(M - I_3)B = 0_3$, ce qui signifie que les trois colonnes de la matrice B appartiennent au noyau de $(M - I_3)$.

Si B est surjective, alors les trois colonnes de B engendrent l'espace $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes et comme le noyau de $(M - I_3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\text{Ker}(M - I_3) = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $M - I_3 = 0_3$, c'est-à-dire $M = I_3$.

✎ La seule application linéaire $f \in L(E, F)$ dont le noyau est égal à E est l'application identiquement nulle.

2. a. Il suffit de vérifier que $U^2 = U$.

✎ La question n'est pas posée, mais il faut y répondre pour pouvoir continuer : quel est le noyau de cette projection ? quelle est l'image de cette projection ?

Comme les deux premières colonnes de U ne sont pas proportionnelles, le rang de U est supérieur à 2. Comme $C_1 + C_2 = C_3$, alors le vecteur $(1, 1, -1)$ est un vecteur non nul du noyau, donc le rang de U est inférieur à 2.

Par conséquent, le rang de U est égal à 2 et (Théorème du rang) le noyau de U est une droite vectorielle.

✎ Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, donc

$$\text{Ker } U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

✎ L'image d'une matrice est engendrée par ses colonnes. Comme les deux premières colonnes de U ne sont pas proportionnelles et que le rang de U est égal à 2, ces deux colonnes constituent une base de $\text{Im } U$. Donc

$$\text{Im } U = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2.b. Si $U = AB$, alors l'image de U est contenue dans l'image de A et le noyau de B est contenu dans le noyau de U .

• Le rang de U est égal à 2 et le rang de A est inférieur à 2, donc les colonnes de A forment une base de l'image de U .

✎ *Le rang d'une matrice est majoré par le nombre de ses lignes et par le nombre de ses colonnes. On en déduit que le rang de A est inférieur à 2, que le rang de B est inférieur à 2 également et donc (Théorème du rang) que la dimension du noyau de B est supérieure à 1.*

• La dimension du noyau de U est égale à 1 et celle du noyau de B est supérieure à 1, donc la dimension du noyau de B est égale à 1 et (Théorème du rang) le rang de B est égal à 2. En particulier, le noyau de B est égal au noyau de U .

✎ *Les remarques qui précèdent, pour intéressantes qu'elles soient, ne nous font pas vraiment avancer...*

• On déduit des remarques précédentes qu'il faut lire la matrice A en colonnes (puisqu'elle décrit l'image de U) et la matrice B en lignes (puisqu'elle décrit le noyau de U). Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}, \quad L_1 = (b_{1,1} \quad b_{1,2} \quad b_{1,3}), \quad L_2 = (b_{2,1} \quad b_{2,2} \quad b_{2,3})$$

On a donc

$$AB = C_1 L_1 + C_2 L_2.$$

✎ *Les colonnes de B donnent la décomposition des colonnes de U comme combinaisons linéaires des colonnes de A .*

En développant la matrice U (selon les idées qui précèdent)

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut choisir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

✎ *C'est un choix possible, sans doute le plus simple, mais on peut imaginer de nombreux autres choix. (Il y a "beaucoup" de bases possibles dans un plan donné!)*

2.c. Comme $U^2 = U$, on a $(AB)(AB) = A(BA)B = AB$.

On a justifié précédemment que le rang de A était égal à 2 (et donc, d'après le théorème du rang, que la matrice A était injective) et que le rang de B était égal à 2 (et donc que la matrice B était surjective).

D'après la première question, la matrice $M = BA$ est égale à I_2 .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k.$$

1. Démontrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution x_n et que, pour tout entier $n \geq 2$, cette solution vérifie

$$0 < x_n < 1.$$

2. Comparer $P_n(x_n)$, $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers un réel ℓ compris entre 0 et x_2 .

3. On pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{2x-1}{1-x}.$$

3.a. Démontrer que

$$\forall x \in [0, x_2], \quad 0 \leq f(x) - P_n(x) \leq \frac{x_2^{n+1}}{1-x_2}.$$

3.b. En déduire que $\ell = 1/2$.

1. Pour $n \geq 1$, la fonction (polynomiale) P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} \geq 1 > 0$$

donc P_n est strictement croissante. De plus, $P_n(0) = -1$ et P_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ (le coefficient dominant est positif), donc P_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$ (Théorème de la bijection monotone).

Comme $0 \in [-1, +\infty[$, on en déduit que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution $x_n \in [0, +\infty[$.

• Comme $P_n(0) \neq 0$, on sait que $x_n > 0$. D'autre part, $P_n(1) = n - 1 > 0$ pour tout entier $n \geq 2$, donc $0 < x_n < 1$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

⚠ Attention, le raisonnement précédent ne vaut pas pour $n = 1$, car $x_1 = 1$.

2. Par définition, $P_n(x_n) = P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. D'autre part,

$$P_{n+1}(x_n) = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k = -1 + \sum_{k=1}^n x_n^k + x_n^{n+1} = P_n(x_n) + x_n^{n+1} = x_n^{n+1} > 0.$$

On a donc

$$\forall n \geq 1, \quad P_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < P_{n+1}(x_n)$$

et comme la fonction P_{n+1} est croissante, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} < x_n.$$

⚠ On sait que la fonction P_{n+1} est strictement décroissante, mais on n'a pas besoin de la monotonie stricte de la fonction P_{n+1} pour conclure à la monotonie stricte de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$: la conclusion serait la même si P_{n+1} était seulement croissante au sens large.

• Comme la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) décroissante et minorée (par 0), elle est convergente. En passant à la limite dans l'encadrement

$$\forall n \geq 2, \quad 0 < x_{n+1} < x_n \leq x_2,$$

on obtient que la limite ℓ de cette suite est comprise entre 0 et x_2 .

3.a. Pour $x \in [0, 1[$ (et a fortiori pour $x \in [0, x_2]$), on reconnaît une somme géométrique dont la raison est différente de 1 :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{2x-1}{1-x} + 1 - x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Le numérateur est une fonction croissante et positive de $x \in [0, 1[$; le dénominateur est une fonction décroissante et strictement positive de $x \in [0, 1[$, donc le quotient est une fonction croissante et positive de x . Comme $x \in [0, x_2]$, on en déduit que

$$\forall x \in [0, x_2], \quad 0 \leq f(x) - P_n(x) \leq \frac{x_2^{n+1}}{1-x_2}.$$

▮ Quand on travaille avec deux paramètres, il faut s'assurer que c'est le bon paramètre qui varie : ici, l'entier n est fixé, c'est le réel x qui varie.

3.b. L'inégalité a été établie pour tout $x \in [0, x_2]$ et tout $n \geq 2$, on peut donc choisir $x = x_n$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq f(x_n) - P_n(x_n) = f(x_n) \leq \frac{x_2^{n+1}}{1-x_2}.$$

Comme $0 < x_2 < 1$, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

• Comme la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est comprise entre 0 et x_2 , on sait que f est continue en ℓ .

▮ Comme toutes les fonctions rationnelles, la fonction rationnelle f est continue sur son ensemble de définition.

Par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \frac{2\ell - 1}{1 - \ell}.$$

On a démontré que $f(x_n)$ tendait vers 0, on en déduit finalement que $\ell = 1/2$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice diagonale :

$$A = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que les coefficients diagonaux de A sont deux à deux distincts :

$$\forall j \neq k, \quad \lambda_j \neq \lambda_k.$$

1. Soient $\mu_1, \dots, \mu_n$, des nombres complexes. Démontrer qu'il existe une, et une seule, famille complexe $(a_0, \dots, a_{n-1})$ telle que

$$\text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k.$$

2. Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

2.a. Expliciter les coefficients des matrices AB et BA .

2.b. On suppose que $AB = BA$. Que peut-on en déduire sur B ?

1. En identifiant les coefficients diagonaux des deux matrices, on est ramené au système suivant.

$$\forall 1 \leq \ell \leq n, \quad \mu_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_\ell^k.$$

Nous disposons de n abscisses λ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, deux à deux distinctes et de n ordonnées μ_ℓ , $1 \leq \ell \leq n$. D'après la théorie de l'interpolation de Lagrange, il existe un, et un seul, polynôme

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

tel que $P_0(\lambda_\ell) = \mu_\ell$ pour tout $1 \leq \ell \leq n$.

2.a. Avec les notations habituelles,

$$AB = (\lambda_i b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad BA = (b_{i,j} \lambda_j)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

✎ Le moyen le plus efficace pour trouver ce résultat consiste à interpréter le produit des matrices comme des opérations de pivot.

Multiplier la matrice B à gauche par la matrice A , c'est effectuer du pivot sur les lignes de B .

Multiplier la matrice B à droite par la matrice A , c'est effectuer du pivot sur les colonnes de B .

Et comme la matrice A est diagonale, ces opérations de pivot sont des dilatations.

L'éventualité d'un scalaire λ_ℓ nul n'est pas une difficulté : on ne cherche pas une matrice équivalente à la matrice B , donc on a le droit d'effectuer des opérations normalement interdites.

2.b. Les matrices AB et BA sont donc égales si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \lambda_i b_{i,j} = b_{i,j} \lambda_j$$

c'est-à-dire

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad (\lambda_i - \lambda_j) b_{i,j} = 0.$$

Comme $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ pour tout $i \neq j$, il faut donc que la matrice B soit diagonale :

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad b_{i,j} = 0.$$

Réciproquement, deux matrices diagonales commutent quoi qu'il arrive, donc : si B est diagonale, on a bien $AB = BA$.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2x + 1}.$$

1. Démontrer que

$$f(x) = 2 - 2x + 5x^2 + o(x^2)$$

pour x voisin de 0. Interpréter géométriquement cette propriété.

2. On suppose que x tend vers $+\infty$.

2.a. Donner un équivalent simple de $f(x)$. En déduire la limite de $f(x)$.

2.b. Calculer les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad \ln \frac{x}{A} \leq \int_A^x f(t) dt \leq 2 \ln \frac{x}{A}.$$

Interpréter géométriquement cet encadrement.

1. Pour x voisin de 0,

$$f(x) = (2 + 2x + x^2) \cdot \frac{1}{1 + (2x + x^3)}.$$

🔗 Règle d'or des développements limités : les grands devant, les petits derrière.

On reconnaît la forme

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

avec $u = 2x + x^3$. Par conséquent, $u \sim 2x$ et $o(u^n) = o(x^n)$. Pour obtenir un développement limité à $o(x^2)$ près, il suffit donc de choisir $n = 2$.

Comme

$$u^2 = (2x + x^3)^2 = (2x + o(x^2))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x^2 + o(x^2)$$

(inutile d'aller plus loin), on a donc

$$\frac{1}{1 + 2x + x^3} = 1 - [2x + o(x^2)] + [4x^2 + o(x^2)] = 1 - 2x + 4x^2 + o(x^2).$$

🔗 Il reste à effectuer le produit.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (2 + 2x + x^2)[1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)] \\ &= 2 + (2x - 4x) + (x^2 - 4x^2 + 8x^2) + o(x^2) = 2 - 2x + 5x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2.a. Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

donc f tend vers 0.

2.b. Il s'agit cette fois de calculer un développement limité selon les puissances de l'infiniment petit $h = 1/x$.

🔗 Un développement limité ou un développement asymptotique doit commencer par l'expression de l'infiniment petit de référence (tous les développements usuels sont donnés au voisinage de 0).

🔗 On procède de la même manière qu'à la première question, en commençant par la règle d'or.

Pour x tendant vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{1 + 2h + 2h^2}{1 + 2h^2 + h^3} = h \cdot (1 + 2h + 2h^2) \cdot \frac{1}{1 + (2h^2 + h^3)}.$$

▮ Avec le facteur h , il suffit de calculer un développement asymptotique du quotient à $\mathcal{O}(h^2)$ près pour obtenir $f(x)$ à $\mathcal{O}(1/x^3)$ près.

On retrouve le motif

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \dots + (-1)^n u^n + \mathcal{O}(u^{n+1})$$

avec $u = 2h^2 + h^3$, si bien que $\mathcal{O}(u^n) = \mathcal{O}(h^{2n})$. Avec $n = 1$, on obtiendra un résultat en $\mathcal{O}(h^2)$ et donc en $\mathcal{O}(h^2)$, ce qui nous suffira. On a donc :

$$\frac{1}{1 + 2h^2 + h^3} = 1 - [2h^2 + \mathcal{O}(h^2)] + \mathcal{O}(h^2) = 1 - 2h^2 + \mathcal{O}(h^2)$$

et donc :

$$(1 + 2h + 2h^2) \cdot \frac{1}{1 + (2h^2 + h^3)} = [1 + 2h + 2h^2] [1 - 2h^2 + \mathcal{O}(h^2)] = 1 + 2h + (2h^2 - 2h^2) + \mathcal{O}(h^2).$$

Finalement,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} h + 2h^2 + \mathcal{O}(h^3) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3. Le développement asymptotique précédent nous montre en particulier que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$$

et plus précisément que $xf(x)$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

▮ La différence $xf(x) - 1$ est asymptotiquement du signe de $ax = 2x$ et donc positive.

Par conséquent, il existe $A > 0$ suffisamment grand pour que

$$\forall t \geq A, \quad 1 \leq tf(t) \leq 2.$$

En intégrant cet encadrement sur le segment $[A, x]$ (avec $x \geq A$ bien entendu), on obtient :

$$\forall x \geq A, \quad \int_A^x \frac{dt}{t} \leq \int_A^x f(t) dt \leq 2 \int_A^x \frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq A, \quad \ln \frac{x}{A} \leq \int_A^x f(t) dt \leq 2 \ln \frac{x}{A}.$$

▮ Comme f est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, toute primitive de f sur cet intervalle est de la forme

$$F(x) = B + \int_A^x f(t) dt$$

(Théorème fondamental de l'analyse). On déduit de l'encadrement précédent que toutes les primitives de f tendent vers $+\infty$ avec une branche parabolique d'axe (Ox) , c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel F représenté par l'équation cartésienne

$$[2x - y + 3z = 0].$$

1. Calculer une base du noyau de f .
2. Calculer une équation cartésienne de $\text{Im } f$.
3. Calculer une base de F .
4. Démontrer que l'image de F par f , c'est-à-dire l'ensemble F' défini par

$$F' = \{f(u), u \in F\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Dédurre de ce qui précède une base de F' .

1. On effectue les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3$ pour y voir plus clair. Cela démontre que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Les deux premières lignes de A' ne sont pas proportionnelles (donc le rang est supérieur à 2) et les deux premières colonnes de A' sont proportionnelles (donc le rang est inférieur à 2). Le rang de A (qui est égal à celui de A') est donc égal à 2 et, d'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de A est égale à 1.

• D'après la matrice A' , on constate que

$$C_1 + 2C_3 = C_2 + 3C_3$$

c'est-à-dire

$$C_1 - C_2 - C_3 = 0.$$

(On parle ici des colonnes de la matrice A .) Les coefficients de cette relation de liaison nous donnent les coordonnées d'un vecteur non nul du noyau de A . Comme tout vecteur non nul d'une droite vectorielle est un vecteur directeur de cette droite, on en déduit que

$$\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot (1, -1, -1).$$

2. On a démontré que le rang de f était égal à 2, donc son image est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Il existe donc trois réels a , b et c tels que

$$(x, y, z) \in \text{Im } f \iff ax + by + cz = 0.$$

L'image de la matrice A est engendrée par les colonnes de A . Comme ce sous-espace est un plan, on en déduit que

$$\text{Im } f = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 = (2, -1, -1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (-1, 1, 2).$$

(On a pris des vecteurs colinéaires à la première et à la troisième colonne de A .)

En résolvant le système

$$\{2a - b - c = 0, \quad -a + b + 2c = 0\} \quad (*)$$

on obtient que

$$\text{Im } f = [x + 3y - z = 0].$$

✎ Le système $(*)$ signifie que les vecteurs ε_1 et ε_2 appartiennent au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
 Comme il s'agit d'un système de deux équations en trois inconnues, il existe une infinité de solutions. C'est normal : un même plan peut être représenté par une infinité d'équations cartésiennes (toutes proportionnelles).
 Dit autrement : deux formes linéaires ont même noyau si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

3. Le sous-espace F est le noyau de la forme linéaire

$$\varphi = [(x, y, z) \mapsto 2x - y + 3z] : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

donc c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. (En bon français : c'est un plan.)

Pour trouver une base de F , il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires qui vérifient l'équation cartésienne. Le couple

$$(u_1, u_2) = ((1, 2, 0), (0, 3, 1))$$

est donc une base de F .

✎ Bien entendu, il y a une infinité de réponses possibles à cette question !

4. Pour tout endomorphisme f de E , l'image par f d'un sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace vectoriel de E , donc F' est bien un sous-espace vectoriel.

✎ Bien évidemment, il faut être capable de démontrer ce théorème en appliquant le théorème de caractérisations des sous-espaces vectoriels.

♣ Comme (u_1, u_2) est une base de F , le sous-espace F' est engendré par le couple $(f(u_1), f(u_2))$. On déduit de la matrice A que

$$f(u_1) = f(u_2) = (24, -15, -21) = 3 \cdot (8, -5, -7)$$

et donc que F' est la droite dirigée par $(8, -5, -7)$.

✎ Si on avait remarqué que $(1, -1, -1)$, qui dirige $\text{Ker } f$, vérifiait l'équation cartésienne de F , on aurait pu choisir le couple

$$((1, -1, -1), (1, 2, 0))$$

comme base de F et en déduire sans calcul que l'image F' de F par f était une droite vectorielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} \, dt.$$

1. Démontrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}} \, dt \leq \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq 1$.

2. En intégrant par parties, démontrer que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En déduire deux constantes réelles a et b telles que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}} \leq t^{n+2}.$$

En intégrant (bornes croissantes!) cet encadrement, on obtient

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}} \, dt \leq \int_0^1 t^{n+2} \, dt = \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n}.$$

2. Intégrons (deux fois) par parties.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \sqrt{1+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 t^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{-1}{2(1+t)^{3/2}} \, dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}} \, dt \end{aligned}$$

D'après la première question,

$$\frac{1}{4(n+1)(n+2)} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}} \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le réel $h = 1/n$ tend vers 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+h} = h \cdot (1-h+o(h)) = h - h^2 + o(h^2) \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(1+h)(1+2h)} = h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} I_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{2}(h - h^2 + o(h^2)) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (h^2 + o(h^2)) + o(h^2) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On lance un dé (normal, à six faces) jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat déjà obtenu. On note alors N , le nombre de lancers effectués.

En notant $x_1, x_2, \dots$, les résultats obtenus aux différents lancers, on a :

$$N = \min\{n \geq 2 : \exists 1 \leq k < n, x_n = x_k\}.$$

1. Démontrer que $2 \leq N \leq 7$.
2. Proposer un modèle probabiliste décrivant cette expérience aléatoire.
3. Quelle est la probabilité pour que N soit égal à 2 ? pour que N soit égal à 7 ?

1. Pour obtenir un résultat déjà obtenu, il faut avoir effectué au moins deux lancers...
Comme il n'y a que six résultats possibles, on est sûr d'obtenir un résultat déjà obtenu à l'issue du septième lancer ("principe des tiroirs").

Donc $2 \leq N \leq 7$.

2. Puisque tout se joue en sept lancers au plus, on modélise cette expérience en considérant une famille de sept variables aléatoires discrètes $(X_k)_{1 \leq k \leq 7}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qu'on suppose indépendantes et qui suivent toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

La variable aléatoire X_k représente le résultat du k -ième lancer.

Nous avons choisi, faute d'information supplémentaire, le modèle le plus simple (= un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi).

Bien entendu, on pourrait choisir un autre modèle, mais les calculs seraient sans doute plus compliqués.

• Variante.

On pourrait aussi modéliser cette expérience avec le même modèle présenté sous une autre forme : on considère l'ensemble $\mathcal{S} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^6$ des 6-listes d'éléments choisis entre 1 et 6 qu'on munit de la loi uniforme (il s'agit d'un ensemble fini, de cardinal 6^6).

Il s'agit du même modèle puisque chaque événement décrit à l'aide de ces deux modèles a la même probabilité pour chacun des deux modèles. Mais ce n'est pas une mince affaire de justifier rigoureusement qu'il s'agit bien du même modèle !

3. Le rang N est égal à 2 si, et seulement si, $X_1 = X_2$.

Pour calculer la probabilité de l'évènement $[X_1 = X_2]$, on le décompose sur le système complet d'évènements associé à X_1 :

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{i=1}^6 [X_1 = X_2] \cap [X_1 = i] = \bigsqcup_{i=1}^6 [X_1 = i] \cap [X_2 = i].$$

Ces événements sont deux à deux disjoints et les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes, donc

$$\mathbf{P}(N = 2) = \mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(X_1 = i) \mathbf{P}(X_2 = i) = \frac{1}{6}.$$

Avec la variante du modèle, il faut dénombrer les six listes $(i_k)_{1 \leq k \leq 6} \in \mathcal{S}$ telles que $i_1 = i_2$. Il y a six choix possibles pour i_1 et 6^4 choix possibles pour (i_3, i_4, i_5, i_6) , donc

$$\mathbf{P}(N = 2) = \frac{6 \cdot 6^4}{6^6} = \frac{1}{6}.$$

Le rang N est égal à 7 si, et seulement si, les valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_6$ sont deux à deux distinctes.

Et la valeur prise par X_7 n'a aucune importance !

Il faut alors considérer le système complet d'évènements associé au vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_6)$, c'est-à-dire la famille

$$([X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, X_4 = i_4, X_5 = i_5, X_6 = i_6])_{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) \in \mathcal{S}} \quad \text{où} \quad \mathcal{S} = [1, 6]^6.$$

L'évènement $[N = 7]$ peut alors s'écrire

$$[N = 7] = \bigsqcup_{(i_1, \dots, i_6) \in \mathcal{S}_0} [X_1 = i_1, \dots, X_6 = i_6]$$

où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des listes de $\mathcal{S}$ constituées de 6 éléments distincts.

Puisque les évènements sont deux à deux disjoints, on en déduit que

$$\mathbf{P}(N = 7) = \sum_{(i_1, \dots, i_6) \in \mathcal{S}_0} \mathbf{P}(X_1 = i_1, \dots, X_6 = i_6)$$

et comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_6$ sont indépendantes, on obtient

$$\mathbf{P}(N = 7) = \sum_{(i_1, \dots, i_6) \in \mathcal{S}_0} \mathbf{P}(X_1 = i_1) \cdots \mathbf{P}(X_6 = i_6) = \#(\mathcal{S}_0) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6.$$

Il est clair que $\#(\mathcal{S}_0) = \#(\mathfrak{S}_6) = 6!$, donc

$$\mathbf{P}(N = 7) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5} \approx 1,54\%.$$

✎ Contrairement à l'évènement $[N = 2]$, la deuxième version du modèle est sans doute plus simple à utiliser ici : on sait tout de suite qu'il s'agit de dénombrer les 6-listes constituées d'éléments deux à deux distincts de $[1, 6]$, c'est-à-dire de dénombrer l'ensemble $\mathfrak{S}_6$ des permutations sur 6 éléments.

✎ Alors : quel modèle choisir ?

Peu importe ! La seule chose qui compte est de choisir un modèle et d'effectuer tous les calculs avec ce modèle (afin que les résultats obtenus soient cohérents).

Et si, par commodité, on cherche à substituer un modèle à un autre, il faut d'abord démontrer que ces modèles sont équivalents, ce qui n'est pas une mince affaire (air connu).