ORAUX MPSI JUIN 2025

Exercice 1

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Démontrer que

$$\forall\, M \in E, \quad M^3 = 0.$$

3. On pose

$$\forall\, M \in E, \qquad \exp(M) = I + M + \frac{1}{2}M^2 \quad \text{et} \quad \ell n(I+M) = M - \frac{1}{2}M^2.$$

Vérifier que les matrices $\exp(M) - I$ et $\ell n(I+M)$ appartiennent toutes deux à E, puis que

$$\ell n\big(\exp(M)\big) = M \quad \text{et} \quad \exp\big(\ell n(I+M)\big) = I + M.$$

4. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp(kM) = \big[\exp(M)\big]^k.$$

Démontrer que $\exp(M)$ est inversible et que son inverse est $\exp(-M)$.

5. À quelle condition a-t-on

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \quad ?$$

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + {}^{k}\!/_{n}}}.$$

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $2(\sqrt{2}-1)$.

2. En comparant la somme à une intégrale, encadrer

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

3. En déduire que

$$u_n = 2(\sqrt{2}-1) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soient p et q, deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont deux fonctions de période $T > 0$, toutes deux solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

et que $f(0) = g'(0) = 1$, $f'(0) = g(0) = 0$.

1. Démontrer que la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) + p(x)W(x) = 0.$$

En déduire que la fonction W ne s'annule jamais.

2. Démontrer que

$$\int_0^T p(t)\,dt = 0$$

puis que p est une fonction de période T.

Exercice 4

On note $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^3$ est **stable par** u lorsque

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in F, \quad u(\boldsymbol{x}) \in F.$$

1. Montrer que la droite dirigée par le vecteur $\boldsymbol{e}_3$:

$$\mathscr{D} = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}_3$$

et le plan dirigé par les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$:

$$\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

sont deux sous-espaces stables par u.

2. Calculer le rang de $A + I_3$ et de $A - 3I_3$.

3. Vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, *sans calculer* P^{-1}, démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. Soient $0 \leqslant m < n$, deux entiers. En linéarisant, démontrer que

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt \, dt = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Démontrer qu'il existe des réels

$$(a_0, \dots, a_n)$$

tels que

$$\forall\, t \in [0, \pi], \quad \cos^n t = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt.$$

2. b. Démontrer que cette famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est unique.

2. c. Vérifier en particulier que

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3. En déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \cos^n t \cos nt \, dt.$$

Exercice 6

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme représenté par la matrice M dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus D$$

et qu'il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de E telle que $u_1 \in \operatorname{Ker} f$, $u_2 \in \operatorname{Ker} f$ et $u_3 \in D$.

2. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans E ? En déduire que la matrice de f relative à la base $\mathscr{B}$ est de la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Avec le moins de calculs possibles, démontrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x \ell n^2 t \, dt.$$

En déduire que

$$\int_1^x \ell n^2 t \, dt \sim x \, \ell n^2 x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ell n^2 k.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) diverge.

2. b. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \int_1^n \ell n^2 t \, dt \leqslant u_n \leqslant \int_1^{n+1} \ell n^2 t \, dt$$

et en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \det(A + xI_3).$$

1. Quel est le rang de A ?

2. Calculer $f(x)$ et en déduire $f'(0)$.

3. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, la matrice $A + xI_3$ est inversible.

Exercice 9

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire les matrices $A - I_3$ et $A - 2I_3$. En déduire que le produit
$$A(A - I_3)(A - 2I_3)$$
est égal à la matrice nulle et que
$$A^3 = 3A^2 - 2A.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A.$$

3. On pose maintenant
$$P_1 = 2A - A^2 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A.$$
Vérifier que
$$AP_1 = P_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = 2P_2$$
et en déduire que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P_1 + 2^n P_2.$$

Exercice 10

On considère la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et de la relation de récurrence suivante.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Représenter graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Pour quel réel α la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admet-elle une limite finie non nulle ?
4. En *admettant* que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha,$$
que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 11

Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On pose $S = X + Y$.
1. Calculer l'espérance de X et celle de Y.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour S ? Quelles sont les valeurs les plus probables pour S ? les moins probables ?
3. Quelle est l'espérance de S ?

Exercice 12

On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -14 & 28 & -20 \\ -18 & 36 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de u relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.
2. Justifier l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

3. Calculer les produits matriciels suivants.

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

En déduire la matrice $P^{-1}AP$.
4. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} u$.
5. Quel est le rang de u ? Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 13

1. Sur quel intervalle la fonction Arccos est-elle définie ? Sur quel intervalle est-elle continue ? Sur quel intervalle est-elle dérivable ? La fonction Arccos admet-elle un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 ?
2. Soient $0 < \varepsilon < x \leqslant 1$. Démontrer que

$$\operatorname{Arccos}(1-x) - \operatorname{Arccos}(1-\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{x} \frac{du}{\sqrt{2-u}\,\sqrt{u}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2x} \leqslant \operatorname{Arccos}(1-x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}.$$

3. Donner un équivalent simple de $\operatorname{Arccos}(1-x)$ pour x voisin de 0 et traduire graphiquement cet équivalent.

Exercice 14

Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9 : on tire au hasard trois de ces boules simultanément.
1. Proposer un modèle probabiliste pour cette expérience aléatoire.
2. Est-il plus probable que, parmi les trois boules tirées, trois boules portent un numéro impair ou que deux boules portent un numéro impair (la troisième portant donc un numéro pair) ?

Exercice 15

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2\\ -1 & -3 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A ? Cette matrice est-elle inversible ?
2. Vérifier que $\operatorname{Ker}(A+I_3)$ et $\operatorname{Ker}(A-I_3)$ sont des droites vectorielles. Proposer un vecteur directeur pour chacune d'elles.
3. Vérifier que le vecteur

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

appartient au plan $\operatorname{Ker}(A+I_3)^2$ mais pas à la droite $\operatorname{Ker}(A+I_3)$.
4. Démontrer que la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice $Q^{-1}AQ$ est triangulaire supérieure.

Exercice 16

Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1.$$

1. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad f'(x) \geqslant \frac{1}{2x}.$$

2. En déduire qu'il existe deux nombres $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad f(x) \geqslant A + B\,\ell n\, x$$

puis que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 17

Discuter en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}_+$:

1. Le comportement asymptotique de la suite de terme général nx^n ;

2. Le comportement asymptotique de la suite de terme général x^n/n ;

3. La nature de la série

$$\sum n^{(-1)^n} x^n.$$

Exercice 18

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide d'opérations de pivot sur les colonnes, montrer que la matrice A_λ a même rang que la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1-2\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le rang de la matrice B_λ peut-il être égal à 0 ? à 1 ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B_λ soit inversible.

4. En étudiant les variations de la fonction

$$\left[t \mapsto t^3 - 3t + 1\right],$$

déterminer le nombre de réels λ tels que le rang de la matrice A_λ soit égal à 2.

Exercice 19

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1. Étudier les variations de f.

2. Calculer la primitive F de f qui s'annule en $x = 1$. Tracer l'allure des graphes de f et de F sur une même figure.

3. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera. Sur quelle partie de J la bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^2$?

4. Indiquer comment tracer le graphe de f et celui de f^{-1} sur une même figure à l'aide du langage Python.

5. Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} est lipschitzienne.

Exercice 20

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{e^{-\pi}}^1 \frac{u^n}{1+u}\,du.$$

2. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que $(n+1)I_n$ tend vers $1/2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 21

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 2 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - a\,I)$ et compléter cette base pour obtenir une base de $\operatorname{Ker}(f - a\,I)^2$.

2. On pose $u_3 = (1,1,0)$. Calculer $(f - a\,I)(u_3)$ et $(f - a\,I)^2(u_3)$. En déduire une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 22

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3}\,dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire que

$$f(x) \sim \frac{x^4}{2}$$

lorsque x tend vers 0.

4. a. Démontrer qu'il existe une constante A telle que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) \leqslant A + \int_1^{x^2} \frac{dt}{t^2}.$$

4. b. En déduire que f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 23

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3\operatorname{Arctan} x + x^2 f(x) = 2x \int_1^x f(t)\,dt. \tag{E}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Que vaut $f(1)$?

3. Vérifier que

$$3x - 2x\int_1^x f(t)\,dt = \mathcal{O}(x^2)$$

lorsque x tend vers 0.

4. Vérifier que

$$\forall\, x > 0, \quad x^2 f''(x) + 2x f'(x) - 2f(x) = \frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 24

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que valent $\det A$ et $\det B$?

2. Calculer A^2 et B^2.
3. Existe-t-il une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP \quad ?$$

Exercice 25

1. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, la solution de l'équation différentielle

$$(t^2+1)y''(t) + 2y'(t) + (t-1)y(t) = \sin t$$

qui vérifie la condition initiale

$$\{f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}.$$

Que vaut $f''(0)$?
2. En déduire l'allure du graphe de f au voisinage de $t = 0$.

Exercice 26

On lance deux dés à 6 faces.
1. Modéliser cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité pour que la somme des deux résultats soit égale à 7 ?
3. Quelle est la probabilité pour que le résultat du premier dé soit égal à 3 ?
4. Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 27

1. a. Rappeler le théorème sur les sommes de Riemann.
1. b. En déduire la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{k}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Calculer la limite de

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad |\sin x - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

4. En déduire la limite de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

Exercice 28

On considère les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. a. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathrm{Ker}(u - \lambda I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
1. b. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u - I)$ et une base de $\mathrm{Ker}(u - 2I)$.
1. c. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble
$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ v(x) = \lambda x\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. b. Quel est le rang de $v - 2I$? En déduire qu'il n'existe aucune matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = B$.

Exercice 29

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence suivante :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}.$$
On pose également
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{n!}.$$
1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
2. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 30

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-x\sin t)\,dt.$$
1. a. Démontrer que la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
1. b. Démontrer que
$$\forall\, u, v \geqslant 0, \quad |e^{-u} - e^{-v}| \leqslant |u - v|.$$
1. c. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$f(x) = 2x - F(x).$$
2. a. Calculer $f(0)$.
2. b. Démontrer que
$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$$
et en déduire que $f(\sqrt{\pi}/2) > 0$.
2. c. En déduire que la fonction f s'annule une fois, et une seule, sur le segment $[0, \sqrt{\pi}/2]$.

Exercice 31

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 11 & 14 & -12 \\ 7 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$
et le vecteur $x_0 = (3, 0, 2)$.
1. Calculer les vecteurs $x_1 = u(x_0)$ et $x_2 = u^2(x_0)$.
2. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (x_0, x_1, x_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$? Comment obtenir la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique ? (On ne demande pas d'expliciter cette seconde matrice.)
3. On *admet* que $u^3(x_0) = -6x_0 + 7x_1$.
3. a. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. b. Calculer $\det u$ et $\operatorname{tr} u$.
4. Expliquer pourquoi la matrice A n'est semblable à aucune des matrices suivantes.
$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 32

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation

$$P_n(x) = 0$$

admet une, et une seule, solution dans $[0, 1]$. Cette solution sera dorénavant notée a_n.

2. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n}.$$

3. Calculer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

Exercice 33

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = x^2 - 1$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 34

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

et on note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Démontrer que le sous-espace F représenté par

$$[x - y + z = 0]$$

et la droite G dirigée par $\varepsilon_1 = (2, -1, -4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F et démontrer que F est stable par u, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F, \quad u(x) \in F.$$

3. Vérifier que G est stable par u.

4. Démontrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base $\mathscr{B}$?

5. Calculer $\det A$. La matrice A est-elle inversible ?

6. a. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme

$$P_0 = aX^2 + bX + c$$

tel que $P_0(0) = 0$ et $P_0(1) = P_0(3) = 1$.

6. b. En raisonnant dans la base $\mathscr{B}$, reconnaître l'endomorphisme

$$P_0(u) = au^2 + bu + c\,I.$$

6. c. Expliciter deux réels α et β tels que

$$A^{-1} = \alpha A + \beta I_3.$$

Exercice 35

On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x > 0, \quad xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Vérifier que l'équation différentielle (E) admet une solution de la forme $y(x) = x^\alpha$.

2. Soient y et z, deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$, liées par la relation suivante.

$$\forall\, x > 0, \qquad y(x) = xz(x)$$

2. a. Démontrer que y est une solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle (E′) qu'on précisera.

2. b. Indiquer comment résoudre l'équation (E′).

Exercice 36

1. On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\mathbf{P}(A) = 1/2, \qquad \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{25}{36} \qquad \text{et que} \qquad \mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{5}{6}.$$

NB : On note ici A^c, le complémentaire de A et $\mathbf{P}(B \mid A)$, la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant A : $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}_A(B)$.

1. a. Calculer $\mathbf{P}(B^c \mid A)$.

1. b. Calculer $\mathbf{P}(B^c)$.

1. c. Calculer $\mathbf{P}(A \mid B^c)$.

2. On joue à Pile ou Face. Si on obtient Pile, on lance un dé deux fois ; si on obtient Face, on ne lance le dé qu'une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

Exercice 37

1. On considère les quatre matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & -9 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. a. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times L$ où C est une matrice colonne et L une matrice ligne ?

1. b. Quelles matrices peut-on factoriser sous la forme $C \times C^\top$ où C est une matrice colonne ?

2. On considère deux matrices M et N dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} N, \quad \operatorname{Im} M = \operatorname{Im} N \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} M = 1.$$

2. a. Démontrer qu'il existe une matrice colonne C et six réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 et μ_3 tels que

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 C & \lambda_2 C & \lambda_3 C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \mu_1 C & \mu_2 C & \mu_3 C \end{pmatrix}.$$

2. b. Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} M$.

2. c. En déduire qu'il existe un scalaire α non nul tel que

$$N = \alpha M.$$

Exercice 38

Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt.$$

1. Justifier que l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et que la fonction F ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Étudier le sens de variation de F.

3. Comparer $F(x)$ et $F(1/x)$.

4. Soit $0 < x < 1$.

4. a. Démontrer que

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_1^x \ln t\, dt.$$

4. b. En déduire que F tend vers une limite $\ell \in [0, 1]$ au voisinage de 0.

5. Tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 39

1. On considère trois matrices

$$A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M$$

telles que

$$AMB = AB.$$

1. a. Quelle est la taille de la matrice M ?
1. b. On suppose que A est injective. Démontrer que $MB = B$.
1. c. On suppose en outre que B est surjective. Démontrer que M est la matrice identité.
2. a. Vérifier que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de projection.
2. b. Expliciter deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$U = AB.$$

2. c. Démontrer que, quelles que soient les matrices A et B choisies, le produit BA est la matrice identité.

Exercice 40

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Démontrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution x_n et que, pour tout entier $n \geqslant 2$, cette solution vérifie

$$0 < x_n < 1.$$

2. Comparer $P_n(x_n)$, $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers un réel ℓ compris entre 0 et x_2.
3. On pose

$$\forall\, x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{2x-1}{1-x}.$$

3. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0, x_2], \quad 0 \leqslant f(x) - P_n(x) \leqslant \frac{x_2^{n+1}}{1-x_2}.$$

3. b. En déduire que $\ell = {}^1\!/_2$.

Exercice 41

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que les coefficients diagonaux de A sont deux à deux distincts :

$$\forall\, j \neq k, \quad \lambda_j \neq \lambda_k.$$

1. Soient μ_1, …, μ_n, des nombres complexes. Démontrer qu'il existe une, et une seule, famille complexe $(a_0, \dots, a_{n-1})$ telle que

$$\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k.$$

2. Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a. Expliciter les coefficients des matrices AB et BA.
2. b. On suppose que $AB = BA$. Que peut-on en déduire sur B ?

Exercice 42

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3+2x+1}.$$

1. Démontrer que

$$f(x) = 2 - 2x + 5x^2 + o(x^2)$$

pour x voisin de 0. Interpréter géométriquement cette propriété.

2. On suppose que x tend vers $+\infty$.

2. a. Donner un équivalent simple de $f(x)$. En déduire la limite de $f(x)$.

2. b. Calculer les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

3. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \qquad \ell n\, \frac{x}{A} \leqslant \int_A^x f(t)\, dt \leqslant 2\, \ell n\, \frac{x}{A}.$$

Interpréter géométriquement cet encadrement.

Exercice 43

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel F représenté par l'équation cartésienne

$$[2x - y + 3z = 0].$$

1. Calculer une base du noyau de f.

2. Calculer une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f$.

3. Calculer une base de F.

4. Démontrer que l'image de F par f, c'est-à-dire l'ensemble F' défini par

$$F' = \big\{f(u),\ u \in F\big\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déduire de ce qui précède une base de F'.

Exercice 44

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt.$$

1. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^{3/2}}\, dt \leqslant \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

2. En intégrant par parties, démontrer que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}(n+1)(n+2)} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

3. En déduire deux constantes réelles a et b telles que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 45

On lance un dé (normal, à six faces) jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat déjà obtenu. On note alors N, le nombre de lancers effectués.

En notant x_1, x_2, ..., les résultats obtenus aux différents lancers, on a :

$$N = \min\big\{n \geqslant 2 \,:\, \exists\, 1 \leqslant k < n,\ x_n = x_k\big\}.$$

1. Démontrer que $2 \leqslant N \leqslant 7$.

2. Proposer un modèle probabiliste décrivant cette expérience aléatoire.

3. Quelle est la probabilité pour que N soit égal à 2 ? pour que N soit égal à 7 ?