Composition de Mathématiques

Le 27 février 2019 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ Problème ❖

Dans ce problème, E et F sont deux espaces euclidiens de dimensions supérieures à 2. Pour chacun d'eux, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x \,|\, y \rangle$ et la norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$.

On rappelle qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique : on pourra utiliser ce résultat sans le redémontrer.

Dans un premier temps, on caractérise la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une méthode de résolution approchée pour une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de **pseudo-solution**. La troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée en introduisant la notion de **pseudo-inverse** pour une matrice rectangulaire.

Partie A.

1. Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. On considère deux vecteurs x et y de E, représentés par les colonnes X et Y dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que

$$\langle x \,|\, y \rangle = {}^tXY = {}^tYX.$$

2. Soit H, un sous-espace vectoriel de F tel que

$$1 \leqslant \dim H < \dim F.$$

On note p, la projection orthogonale de F sur H et on choisit une base orthonormée

$$\mathscr{B}_H = (e_1, e_2, \dots, e_k)$$

de H.

2. a. Soit $z \in F$. Donner (sans justification) la décomposition de $p(z)$ dans la base $\mathscr{B}_H$.

2. b. Soit $\mathscr{C}$, une base orthonormée de F. On note $M(p)$, la matrice de p dans la base $\mathscr{C}$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, on note E_i, la colonne qui représente e_i dans la base $\mathscr{C}$. Démontrer que, pour tout vecteur $z \in F$ représenté par la colonne Z dans la base $\mathscr{C}$,

$$M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i Z$$

et en déduire que

$$M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i\,{}^tE_i.$$

2. c. Démontrer que

$$\forall\, z \in F, \quad \|p(z)\| \leqslant \|z\|.$$

3. Dans cette question, l'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on considère l'endomorphisme φ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a. Démontrer que φ est un projecteur orthogonal.

3. b. Donner une base orthonormée du noyau et une base orthonormée de l'image de φ.

4. Soient K, un sous-espace vectoriel de F et r, la projection orthogonale sur K. On considère une valeur propre λ non nulle de $p \circ r$ et u, un vecteur propre associé à λ.

4. a. Démontrer que $u \in H$ et que $r(u) - \lambda u \in H^{\perp}$.

4. b. Démontrer que

$$\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2.$$

4. c. En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ appartiennent au segment $[0, 1]$.

5. On suppose dans cette question que p et r commutent.

5. a. Démontrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

5. b. Dans le cas où $p \circ r$ n'est pas l'endomorphisme nul, déterminer son spectre.

5. c. Démontrer que

$$\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$$

et que

$$\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r.$$

6. On note $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormée de F telle que les matrices de p et de r dans cette base s'écrivent par blocs de la manière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k et A appartiennent à $\mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$ et D à $\mathfrak{M}_{m-k}(\mathbb{R})$.

6. a. Démontrer que les matrices A et D sont symétriques ; que ${}^tB = C$ et que

$$A^2 + BC = A,$$
$$AB + BD = B,$$
$$CB + D^2 = D.$$

6. b. Démontrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le spectre de $p \circ r$ est contenu dans $\{0, 1\}$.
2. La matrice ${}^tCC$ est nulle.
3. La matrice C est nulle.
4. Les projections p et r commutent.

(On précisera la taille des matrices C et ${}^tCC$.)

Partie B.

Dans cette partie, on fixe une application $f \in L(E, F)$ et un vecteur $v \in F$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation linéaire suivante.

$$f(x) = v \qquad (\star)$$

7. On note π, la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.
7. a. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Démontrer que

$$\|y - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\| \iff y = \pi(v).$$

7. b. En déduire qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

Dans la suite de ce problème, un tel vecteur x_0 sera appelé **une pseudo-solution** de l'équation $(\star)$.
8. On suppose que f est injective. Démontrer que l'équation $(\star)$ admet une pseudo-solution unique.
9. Démontrer que le vecteur x_0 est une pseudo-solution de l'équation $(\star)$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \left\langle f(x) \,\middle|\, f(x_0) - v \right\rangle = 0. \qquad (\dagger)$$

10. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, deux bases orthonormées de E et de F respectivement. On note $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $V = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(v)$ et $X_0 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x_0)$. Démontrer que x_0 est une pseudo-solution de l'équation $(\star)$ si, et seulement si,

$${}^tAAX_0 = {}^tAV.$$

☞ *On pourra écrire la relation $(\dagger)$ sous forme matricielle.*
11. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire canonique et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ désignent la base canonique. On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.
12. Dans cette deuxième application, on choisit un entier $n \geqslant 2$ et trois vecteurs

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n), \quad c = (c_1, \dots, c_n)$$

de $\mathbb{R}^n$. On cherche deux réels λ et μ tels que l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$$

soit minimale.
12. a. Ramener le problème posé à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $(\star)$: préciser les matrices du vecteur v et de l'application f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^n$.
12. b. Comment choisir les vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ pour que f soit injective ?
12. c. En supposant cette condition réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

Partie C.

Dans cette partie, l'application $f \in L(E, F)$ est toujours fixée.
13. Soit $y \in F$.
13. a. Démontrer qu'il existe deux vecteurs $x \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ et $y' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ tels que

$$y = f(x) + y'.$$

13. b. Démontrer qu'un tel couple (x, y') est unique.
14. On définit l'**application pseudo-inverse** de f, soit g, en posant

$$\forall\, y \in F, \quad g(y) = x$$

où $(x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ vérifie $y = f(x) + y'$.
14. a. Démontrer que g est linéaire.
14. b. Déterminer le noyau et l'image de g.
15. a. Démontrer que $g \circ f \in L(E)$ est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
15. b. Démontrer que $f \circ g \in L(F)$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.
16. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, tous deux munis de leur produit scalaire canonique. On suppose que la matrice de f relative aux bases canoniques de E et F est la suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de g relative aux bases canoniques de F et E.
17. Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.
17. a. Démontrer que

$$\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

17. b. Démontrer que tout vecteur propre de f est aussi un vecteur propre de g.
☞ *On discutera sur la nullité éventuelle de la valeur propre associée.*

17. c. En déduire que g est un endomorphisme symétrique de F.
18. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire canonique. On suppose que la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de g relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution ✿ Pseudo-solution d'un système linéaire

Partie A.

1. En notant x_i et y_i respectivement les composantes des colonnes X et Y, on a

$$^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

D'autre part, en notant $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}$, on a aussi

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e_i.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \langle x \,|\, y \rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i \,|\, e_j \rangle && \text{(bilinéarité)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \|e_i\|^2 && \text{(base orthogonale)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i && \text{(vecteurs unitaires)} \end{aligned}$$

et donc que

$$\langle x \,|\, y \rangle = {}^tXY = {}^tYX.$$

REMARQUE.— Il s'agit d'une question de cours, il faut donner tous les détails du calcul !

2. a. Comme $\mathscr{B}_H$ est une base orthonormée du sous-espace H sur lequel on projette, on *sait* que

$$p(z) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i \,|\, z \rangle \cdot e_i.$$

REMARQUE.— On n'entre pas dans les détails : l'énoncé demande le résultat seul.

2. b. Comme la base $\mathscr{C}$ est orthonormée, on peut appliquer la formule réétablie au **1.** :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant k, \quad \langle e_i \,|\, z \rangle = {}^tE_i Z.$$

Or $M(p)Z = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}\big(p(z)\big)$, donc

$$M(p)Z = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{({}^tE_i Z)}_{\in \mathbb{R}} E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i {}^tE_i Z$$

d'après **2.a.**

La relation précédente étant démontrée *pour toute* colonne Z, on en déduit que

$$M(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i {}^tE_i.$$

2. c. Soit $z \in F$. Par définition de p, les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux. D'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \big\|z - p(z) + p(z)\big\|^2 \\ &= \big\|z - p(z)\big\|^2 + \big\|p(z)\big\|^2 \geqslant \big\|p(z)\big\|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, z \in F, \quad 0 \leqslant \big\|p(z)\big\| \leqslant \|z\|.$$

3. a. On vérifie sans peine que $M^2 = M$, donc φ est bien un projecteur. D'autre part, la matrice M est symétrique et représente φ dans une base *orthonormée*, donc le projecteur φ est en fait un projecteur orthogonal.

3. b. Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de φ est au moins égal à 2. Les colonnes C_1 et C_3 d'une part, C_2 et C_4 d'autre part sont proportionnelles :

$$C_1 + C_3 = C_2 + C_4 = 0$$

donc le rang de φ est exactement égal à 2. L'image étant engendrée par les vecteurs colonnes, on en déduit que

$$\big((1, 0, -1, 0),\ (0, 1, 0, -1)\big)$$

est une base de Im φ. Il est clair que cette base est orthogonale. On en déduit que

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)\Big)$$

est une base orthonormée de Im φ.

❧ D'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} \varphi = 4 - 2 = 2.$$

D'après les relations de liaison remarquées plus haut, les vecteurs

$$(1, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad (0, 1, 0, 1)$$

appartiennent au noyau de φ. Ces deux vecteurs sont clairement orthogonaux, donc linéairement indépendants : ils forment donc une base orthogonale de Ker φ et par suite

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)\Big)$$

est une base orthonormée de Ker φ.

4. a. Par définition de p,

$$H = \operatorname{Im} p \quad \text{et} \quad H^\perp = \operatorname{Ker} p.$$

❧ Comme $\lambda \neq 0$,

$$u = \frac{1}{\lambda} \cdot (p \circ r)(u) = p\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot r(u)\Big) \in \operatorname{Im} p = H.$$

En particulier, comme p est un projecteur, $p(u) = u$.

❧ D'autre part,

$$\begin{aligned} p\big(r(u) - \lambda \cdot u\big) &= (p \circ r)(u) - \lambda \cdot p(u) \\ &= \lambda \cdot u - \lambda \cdot u = 0_E \end{aligned}$$

car u est un vecteur propre de $(p \circ r)$ et que $p(u) = u$. Cela prouve que

$$r(u) - \lambda u \in \operatorname{Ker} p = H^\perp.$$

4. b. D'après la question précédente,

$$0 = \langle u \mid r(u) - \lambda \cdot u \rangle = \langle u \mid r(u) \rangle - \lambda \|u\|^2.$$

Comme r est une projection orthogonale, les vecteurs $r(u)$ et $u - r(u)$ sont orthogonaux, donc

$$\begin{aligned}\langle u \mid r(u) \rangle &= \langle r(u) + u - r(u) \mid r(u) \rangle \\ &= \|r(u)\|^2 + \langle u - r(u) \mid r(u) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda\|u\|^2 = \|r(u)\|^2$ pour tout vecteur propre de r associé à la valeur propre λ.

4. c. Comme r est un projecteur orthogonal, on peut appliquer le résultat du **2.c.**

$$0 \leqslant \|r(u)\|^2 \leqslant \|u\|^2.$$

On peut alors déduire de l'inégalité précédente que

$$0 \leqslant \lambda\|u\|^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Or, par définition, un vecteur propre n'est pas nul, donc $\|u\|^2 > 0$ et donc

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

pour toute valeur propre λ de r.

5. a. Comme les projecteurs p et r commutent, alors

$$(p \circ r) \circ (p \circ r) = (p \circ p) \circ (r \circ r) = p \circ r$$

donc $p \circ r$ est un projecteur.

D'autre part, quels que soient x et y dans E,

$$\begin{aligned}\langle (p \circ r)(x) \mid y \rangle &= \langle p(r(x)) \mid y \rangle \\ &= \langle r(x) \mid p(y) \rangle \qquad \text{(symétrie de p)} \\ &= \langle x \mid r(p(y)) \rangle \qquad \text{(symétrie de r)} \\ &= \langle x \mid (p \circ r)(y) \rangle\end{aligned}$$

donc $p \circ r$ est un endomorphisme symétrique. En tant que projecteur, $p \circ r$ est donc un projecteur orthogonal.

5. b. Tout projecteur admet $X^2 - X = X(X-1)$ pour polynôme annulateur, donc $p \circ r$ est diagonalisable (il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples) et son spectre est contenu dans $\{0;1\}$. Il existe donc une base $\mathscr{B}_d$ et un entier $0 \leqslant r \leqslant n$ tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_d}(p \circ r) = \operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

Si 0 était la seule valeur propre (soit $r = 0$), alors $p \circ r$ serait l'endomorphisme nul, ce qui est faux par hypothèse.

Si 1 était la seule valeur propre (soit $r = n$), alors $p \circ r$ serait l'identité. Or $\operatorname{Im}(p \circ r) \subset \operatorname{Im} p = H$, donc $p \circ r$ n'est pas l'identité.

$$\operatorname{Sp}(p \circ r) = \{0;1\}$$

5. c. Si $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$, alors il existe deux vecteurs $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Ker} r$ tels que $x = y + z$ et

$$\begin{aligned}(p \circ r)(x) &= (r \circ p)(y) + (p \circ r)(z) \\ &= r(0_E) + p(0_E) = 0_E\end{aligned}$$

puisque p et r commutent. Donc $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker}(p \circ r)$.

Réciproquement, comme r est un projecteur,

$$\forall\, x \in E, \quad x = r(x) + \underbrace{[x - r(x)]}_{\in \operatorname{Ker} r}.$$

Si $x \in \operatorname{Ker}(p \circ r)$, alors $r(x) \in \operatorname{Ker} p$ et la décomposition précédente montre que $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$.

❧ Comme p et r commutent, quel que soit $x \in E$,

$$\operatorname{Im} p \ni p(r(x)) = (p \circ r)(x) = r(p(x)) \in \operatorname{Im} r$$

donc $\operatorname{Im}(p \circ r) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$, alors en particulier $x \in \operatorname{Im} r$, donc $r(x) = x$ (puisque r est un projecteur) et donc $(p \circ r)(x) = p(x) = x$ (puisque p est aussi un projecteur), ce qui prouve que $x \in \operatorname{Im}(p \circ r)$.

❧ On a donc démontré, deux fois par double inclusion, que

$$\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r.$$

6. a. On l'a rappelé au **5.b.**, il existe bien une base orthonormée dans laquelle la matrice de p est égale à P (avec $k = \operatorname{rg} p$).

Comme r est un projecteur orthogonal, c'est un endomorphisme *symétrique* et sa matrice dans une base *orthonormée* est aussi symétrique, ce qui prouve que

$${}^tA = A, \quad {}^tD = D, \quad {}^tB = C.$$

Par ailleurs, on a $R^2 = R$, donc

$$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D.$$

Le quatrième bloc donne $CA + DC = C$, relation qui n'est autre que la transposée de $AB + BD = B$ (puisque A et D sont symétriques et que $B = {}^tC$).

6. b. D'après la question précédente, la matrice A est symétrique réelle. D'après le Théorème spectral, elle est diagonalisable et par suite son polynôme minimal est scindé à racines simples, son polynôme caractéristique est scindé et leurs racines sont les valeurs propres de A.

D'après la matrice R, la matrice C a autant de colonnes que A et autant de lignes que D, donc

$$C \in \mathfrak{M}_{m-k,k}(\mathbb{R}).$$

On en déduit que

$${}^tCC \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R}).$$

❧ Supposons que $\operatorname{Sp}(p \circ r) \subset \{0, 1\}$. On vérifie facilement que

$$PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0_{m-k} \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice est triangulaire par blocs, on en déduit que

$$\chi_{PR} = \chi_A \times X^{m-k}$$

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal μ_A de A divise χ_A et donc χ_{PR}. Or μ_A est scindé à racines simples et les racines de χ_{PR} appartiennent à $\{0, 1\}$, donc μ_A divise $X(X-1)$, ce qui prouve que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A. D'après **6.a.**,

$${}^tCC = BC = A - A^2 = 0_k.$$

☙ Si ${}^tCC = 0_k$, alors $\mathrm{tr}({}^tCC) = 0$ et donc $C = 0_{k,m-k}$ (norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_{k,m-k}(\mathbb{R})$).

☙ Supposons que la matrice C soit nulle. Alors

$$RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PR$$

puisque $B = {}^tC = 0$ d'après **6.a.** Comme les matrices commutent, les endomorphismes représentés par ces matrices commutent, donc les projections p et r commutent.

☙ Si p et r commutent, alors on peut appliquer le résultat établi au **5.a.** : la composée $p \circ r$ est un projecteur orthogonal et en particulier

$$\mathrm{Sp}(p \circ r) \subset \{0, 1\}$$

comme on l'a rappelé au **5.b.**

Partie B.

7. a. Comme $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F, espace *euclidien*, la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, f$ est *bien définie* et, bien entendu, $\pi(v) \in \mathrm{Im}\, f$.

Pour tout vecteur $y \in \mathrm{Im}\, f$, on a donc

$$y - v = \underbrace{y - \pi(v)}_{\in \mathrm{Im}\, f} + \underbrace{\pi(v) - v}_{\in (\mathrm{Im}\, f)^\perp}$$

(comme $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel et que y et $\pi(v)$ appartiennent à $\mathrm{Im}\, f$, leur différence est encore dans $\mathrm{Im}\, f$). D'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|y - v\|^2 &= \|y - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - v\|^2 \\ &\geqslant \|\pi(v) - v\|^2 \end{aligned} \tag{‡}$$

ce qui prouve que

$$\forall\, y \in \mathrm{Im}\, f, \quad \|y - v\| \geqslant \|\pi(v) - v\|$$

et comme $\pi(v) \in \mathrm{Im}\, f$, on en déduit que

$$\|\pi(v) - v\| = \min_{y \in \mathrm{Im}\, f} \|y - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

En outre, l'inégalité (‡) est une égalité si, et seulement si,

$$\|y - \pi(v)\|^2 = 0$$

c'est-à-dire si $y = \pi(v)$.

On a ainsi démontré que, pour tout $y \in \mathrm{Im}\, f$,

$$\|y - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$$

si, et seulement si, $y = \pi(v)$.

7. b. Comme $\pi(v) \in \mathrm{Im}\, f$ (on projette sur $\mathrm{Im}\, f$!), il existe au moins un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\pi(v) = f(x_0)$ (c'est la définition de $\mathrm{Im}\, f$) et donc tel que

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

REMARQUE.— Il faut bien comprendre la notion qu'on définit ainsi !

L'équation $f(x) = v$ a (au moins) une **solution** si, et seulement si, le vecteur v est dans $\mathrm{Im}\, f$. En revanche, cette équation possède toujours (au moins) une **pseudo-solution**, quel que soit le vecteur $v \in F$.

Plus précisément, l'équation $f(x) = v$ admet une solution si, et seulement si, le minimum de $\|f(x) - v\|$ est nul et, *dans ce cas seulement, toute pseudo-solution est en fait une solution*.

C'est évidemment l'ordre de grandeur de $\|f(x_0) - v\|$ (rapporté à une valeur de référence) qui indique la qualité des pseudo-solutions. En pratique, si cet ordre de grandeur est assez petit (en comparaison à la valeur de référence), les pseudo-solutions sont aussi intéressantes que de vraies solutions.

8. Par **7.b.**, l'équation $(\star)$ admet au moins une pseudo-solution.

D'après **7.a.** et **7.b.**, le vecteur $x_0 \in E$ est une pseudo-solution de $(\star)$ si, et seulement si, $f(x_0) = \pi(v)$. S'il existe deux pseudo-solutions x_0 et x_1, alors

$$f(x_1) = \pi(v) = f(x_0).$$

Par linéarité de f, on en déduit que $(x_1 - x_0) \in \mathrm{Ker}\, f$ (Principe de superposition !) et comme f est injective, on en déduit que $x_1 - x_0 = 0_E$.

Ainsi, si f est injective, l'équation $(\star)$ admet une, et une seule, pseudo-solution.

9. Par **7.a.**, le vecteur $x_0 \in E$ est une pseudo-solution de $(\star)$ si, et seulement si, $f(x_0) = \pi(v)$. D'après le cours (Caractérisation du projeté orthogonal), $\pi(v)$ est l'unique vecteur $y \in F$ tel que

$$y \in \mathrm{Im}\, f \quad \text{et} \quad y - v \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp.$$

Or il est évident que $f(x_0) \in \mathrm{Im}\, f$. Donc $f(x_0) = \pi(v)$ si, et seulement si,

$$f(x_0) - v \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$$

et finalement $x_0 \in E$ est une pseudo-solution de $(\star)$ si, et seulement si,

$$\forall\, y \in \mathrm{Im}\, f, \quad \langle\, y \mid f(x_0) - v \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire si

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, f(x) \mid f(x_0) - v \,\rangle = 0.$$

10. Les matrices relatives à $\mathscr{C}$ des vecteurs $f(x)$ et $f(x_0) - v$ sont respectivement égales à AX et à $AX_0 - V$. Comme $\mathscr{C}$ est une **base orthonormée**, on en déduit que

$$\langle\, f(x) \mid f(x_0) - v \,\rangle = {}^t(AX)(AX_0 - V) = {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV)$$

et d'après **9.**, $x_0 \in E$ est une pseudo-solution de $(\star)$ si, et seulement si,

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV) = 0$$

c'est-à-dire si

$${}^tAAX_0 - {}^tAV = 0.$$

REMARQUE.— L'hypothèse que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormée est inutile !

11. On va appliquer la méthode établie au **10.**

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad {}^tAV = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation ${}^tAAX = {}^tAV$ admet une solution évidente :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme le noyau de la matrice ${}^tAA$ est (clairement !) la droite dirigée par V, on déduit du principe de superposition que $x \in \mathbb{R}^3$ est une pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(x) = X_0 + t \cdot V = \begin{pmatrix} t \\ 1/2 \\ t \end{pmatrix}$$

(le Principe de superposition à nouveau).

12. a. On cherche f et v tels que

$$\|f(x) - v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2.$$

Il suffit de choisir

$$v = (c_1, \dots, c_n) \in F = \mathbb{R}^n$$

et, pour tout $x = (\lambda, \mu) \in E = \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \in F,$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

12. b. Une matrice est injective si, et seulement si, ses colonnes sont linéairement indépendantes. Par conséquent, l'application linéaire f est injective si, et seulement si, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels.

12. c. L'espace $F = \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. D'après **12.a.**,

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a \mid b \rangle \\ \langle a \mid b \rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAV = \begin{pmatrix} \langle a \mid c \rangle \\ \langle b \mid c \rangle \end{pmatrix}.$$

D'après **10.**, il s'agit de résoudre le système

$${}^tAA \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = {}^tAV.$$

D'après **8.**, il s'agit d'un système de Cramer, donc on applique les formules de Cramer :

$$\lambda = \frac{\langle a \mid c \rangle \, \|b\|^2 - \langle a \mid b \rangle \, \langle b \mid c \rangle}{\delta}$$
$$\mu = \frac{\|a\|^2 \, \langle b \mid c \rangle - \langle a \mid b \rangle \, \langle a \mid c \rangle}{\delta}$$

où $\delta = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a \mid b \rangle^2$.

Partie C.

13. a. Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de l'espace *euclidien* F,

$$F = (\operatorname{Im} f) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} f)^\perp$$

et on peut décomposer le vecteur $y \in F$:

$$\exists\, y_0 \in (\operatorname{Im} f),\ \exists\, y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp, \quad y = y_0 + y'.$$

Comme $y_0 \in \operatorname{Im} f$, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et comme $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de l'espace *euclidien* E,

$$E = (\operatorname{Ker} f)^\perp \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} f)$$

et on peut décomposer le vecteur x_0 :

$$\exists\, x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp,\ \exists\, x' \in (\operatorname{Ker} f), \quad x_0 = x + x'.$$

Par linéarité de f,

$$y = f(x_0) = f(x) + f(x') = f(x).$$

On a ainsi démontré qu'il existait deux vecteurs

$$x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \quad \text{et} \quad y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$$

tels que

$$y = f(x) + y'.$$

13. b. Supposons qu'il existe deux vecteurs x_1, x_2 dans $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ et deux vecteurs y'_1, y'_2 dans $(\operatorname{Im} f)^\perp$ tels que

$$y = f(x_1) + y'_1 = f(x_2) + y'_2.$$

Alors, par linéarité de f et par structure vectorielle de $(\operatorname{Im} f)^\perp$,

$$\underbrace{f(x_1 - x_2)}_{\in \operatorname{Im} f} = \underbrace{y'_2 - y'_1}_{\in (\operatorname{Im} f)^\perp}.$$

Comme $\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^\perp = \{0_F\}$, on en déduit d'une part que $y'_1 = y'_2$ et d'autre part que $(x_1 - x_2) \in \operatorname{Ker} f$. Or x_1 et x_2 appartiennent au sous-espace vectoriel $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, donc

$$x_1 - x_2 \in (\operatorname{Ker} f) \cap (\operatorname{Ker} f)^\perp = \{0_E\}$$

ce qui prouve que $x_1 = x_2$. On a ainsi démontré l'unicité de la décomposition de y.

14. a. On a démontré au **13.** que g était bien une application de F dans $(\operatorname{Ker} f)^\perp \subset E$ (existence et unicité de la décomposition pour tout $y \in F$).

❧ Considérons deux vecteurs y_1 et y_2 dans F, ainsi qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons alors

$$x_1 = g(y_1) \in (\operatorname{Ker} f)^\perp, \quad x_2 = g(y_2) \in (\operatorname{Ker} f)^\perp.$$

Par **13.**, il existe y'_1 et y'_2 dans $(\operatorname{Im} f)^\perp$ tels que

$$y_1 = f(x_1) + y'_1 \quad \text{et} \quad y_2 = f(x_2) + y'_2.$$

Par linéarité de f,

$$\lambda y_1 + y_2 = f(\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{\in (\operatorname{Ker} f)^\perp}) + \underbrace{(\lambda y'_1 + y'_2)}_{\in (\operatorname{Im} f)^\perp}$$

puisque $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ sont stables par combinaison linéaire (structure d'espace vectoriel).

Par *unicité* de la décomposition (**13.b.**), on en déduit que
$$g(\lambda y_1 + y_2) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda g(y_1) + g(y_2)$$
et donc que $g : F \to E$ est bien linéaire.

14. b. Soit $y \in \operatorname{Ker} g$. On a $g(y) = 0_E$ et, par **13.**, il existe $y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que
$$y = f\big(g(y)\big) + y' = f(0_E) + y' = y'$$
donc $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Réciproquement, si $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, alors
$$y = f(0_E) + y$$
avec $0_E \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, donc (**13.b.**) $g(y) = 0_E$. On a ainsi démontré que
$$\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^\perp.$$

☙ Par définition (**13.**), $g(y) = x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ pour tout $y \in F$, donc $\operatorname{Im} g \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Réciproquement, si $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, alors $y = f(x) \in F$ et
$$y = f(\underbrace{x}_{\in(\operatorname{Ker} f)^\perp}) + \underbrace{0_E}_{\in(\operatorname{Im} f)^\perp}$$
donc (**13.b.**) $g(y) = x \in \operatorname{Im} g$. On a cette fois démontré que
$$\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp.$$

15. a. Notons π, la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ (cette projection existe bel et bien, puisque $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est un sous-espace d'un espace euclidien). Pour tout $x \in E$, on a donc
$$x = \underbrace{\pi(x)}_{\in(\operatorname{Ker} f)^\perp} + \underbrace{x - \pi(x)}_{\in\operatorname{Ker} f}$$
et par linéarité de f,
$$f(x) = f\big(\pi(x)\big) = f(\underbrace{\pi(x)}_{\in(\operatorname{Ker} f)^\perp}) + \underbrace{0_F}_{(\operatorname{Im} f)^\perp}.$$
Par **13.b.**, $g(f(x)) = \pi(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que $g \circ f$ est bien la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

15. b. Par **13.**, si $g(y) = x$, alors il existe $y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que
$$y = \underbrace{f(x)}_{\in\operatorname{Im} f} + \underbrace{y'}_{\in(\operatorname{Im} f)^\perp}$$
ce qui signifie exactement que $f(x) = f(g(y))$ est le projeté orthogonal de y sur $\operatorname{Im} f$! Cela étant vrai pour tous les vecteurs $y \in F$, on en déduit que $f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

16. On calcule dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Comme ces deux espaces sont munis de leur structure euclidienne canonique, les bases canoniques sont *orthonormées*.

On note $B \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, la matrice canonique de g.

☙ D'après la matrice A, il est clair que
$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1).$$
On sait que la matrice relative à une base orthonormée de la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot u$ est égale à
$$\frac{U\,{}^tU}{{}^tUU}.$$
Par conséquent, la matrice canonique de la projection orthogonale sur le plan $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est égale à
$$I_3 - \frac{U\,{}^tU}{{}^tUU} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, il est clair que l'application f est surjective, donc $\operatorname{Im} f = E$ et la matrice canonique de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ est donc I_2.

D'après **15.**, on a donc
$$AB = I_2 \quad \text{et} \quad BA = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
La matrice A étant particulièrement simple, on déduit de cette dernière relation que
$$B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

☙ On peut aussi procéder vectoriellement, en suivant pas à pas la méthode décrite au **13.a.**

On commence par décomposer $y \in \mathbb{R}^2$ dans la somme directe orthogonale $(\operatorname{Im} f) \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp$:
$$Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\in\operatorname{Im} f = F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in(\operatorname{Im} f)^\perp}.$$
On cherche ensuite un antécédent par f (ce qui est facile, étant donnés les coefficients de A) :
$$Y = A\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
et on projette orthogonalement cet antécédent sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ (droite vectorielle de laquelle nous avons calculé un vecteur directeur plus haut) :
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5\alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha + 5\beta \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$
donc
$$\begin{aligned} Y &= A \cdot \left[\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5\alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha + 5\beta \end{pmatrix} + \frac{\alpha + \beta}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot Y\right]}_{\in(\operatorname{Ker} f)^\perp} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in(\operatorname{Im} f)^\perp} \end{aligned}$$
et, avec **13.b.**, on retrouve bien la matrice B.

17. a. Soient $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$ et

$$\begin{aligned} \langle x \mid y \rangle &= \big\langle x \,\big|\, f(x_0) \big\rangle = \big\langle f(x) \,\big|\, x_0 \big\rangle && \text{(symétrie de f)} \\ &= \langle 0_E \mid x_0 \rangle && (x \in \operatorname{Ker} f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$, ce qui se traduit par

$$\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^{\perp} \quad \text{et par} \quad \operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, alors

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

donc (inclusion + égalité des dimensions)

$$\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

et, pour les mêmes raisons,

$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

17. b. Soit $x_0 \in E$, un vecteur propre de f. Il existe donc un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = \lambda x_0$.

❧ **Si la valeur propre λ n'est pas nulle :** en particulier,

$$x_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot f(x_0) = f\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot x_0\Big) \in \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$$

par **17.a.**. On en déduit que :

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda \cdot \Big(\frac{1}{\lambda} \cdot x_0\Big) + 0_E \\ &= \underbrace{f\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot x_0\Big)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{0_E}_{\in (\operatorname{Im} f)^{\perp}} \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\lambda} \cdot x_0 = \underbrace{\frac{1}{\lambda} \cdot x_0}_{\in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}} + \underbrace{0_E}_{\in \operatorname{Ker} f}.$$

D'après **13.**,

$$g(x_0) = \frac{1}{\lambda} \cdot x_0.$$

Comme $x_0 \neq 0_E$ (vecteur propre de f par hypothèse), on en déduit que x_0 est un vecteur propre de g, associé à la valeur propre (non nulle !) λ^{-1}.

❧ **Si la valeur propre λ est nulle :** alors $x_0 \in \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ (**17.a.**) et donc

$$x_0 = f(\underbrace{0_E}_{\in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}}) + \underbrace{x_0}_{\in (\operatorname{Im} f)^{\perp}}.$$

On peut alors déduire de **13.** que

$$g(x_0) = 0_E = 0 \cdot x_0.$$

Là encore, comme $x_0 \neq 0_E$, ce vecteur est un vecteur propre de g, associé à la valeur propre 0.

17. c. Comme f est un endomorphisme symétrique, d'après le Théorème spectral, il existe une base orthonormée

$$\mathscr{B}_0 = (x_1, x_2, x_3)$$

constituée de vecteurs propres (pour f). D'après la question précédente, il s'agit aussi d'une base orthonormée de vecteurs propres pour g, ce qui prouve que g est un endomorphisme symétrique.

18. Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$, la base canonique est une *base orthonormée*. Comme la matrice A est *symétrique réelle*, cela signifie donc que l'endomorphisme f est symétrique. On va pouvoir appliquer ce qui précède.

❧ **Première méthode.** Il est assez clair que $\operatorname{rg} f = 2$ et que

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot (2, -2, -1).$$

On déduit de **17.a.** que

$$\operatorname{Im} f = [2x - 2y - z = 0].$$

La matrice canonique de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ est donc égale à

$$I_3 - \frac{1}{2^2 + 2^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les notations de **13.a.**, on a donc

$$Y_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} Y.$$

Pour passer de y_0 à $f(x_0)$ (comme au **13.a.**), il faut maintenant calculer un antécédent de chaque colonne de cette matrice par A. C'est très facile pour la première et la troisième colonnes, il faut poser le système et le résoudre (en partie !) pour la deuxième. On trouve alors

$$Y_0 = A \times \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5/2 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

c'est-à-dire (toujours avec les notations du **13.a.**)

$$X_0 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

(il est poli de faire sortir les fractions de la matrice). Il reste à projeter orthogonalement ce vecteur sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f$ (nous remercions à nouveau le **17.a.** pour son aimable participation), donc

$$X = GY = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \times \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Comme la colonne Y est quelconque, on en déduit facilement que

$$G = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

❧ **Deuxième méthode.** On cherche une base orthonormée de vecteurs propres pour la matrice A. On calcule le polynôme caractéristique et, chance !, il est facile à factoriser (puisque 0 est valeur propre).

$$\chi_A = X(X^2 - 9X + 18) = X(X-3)(X-6).$$

La matrice A possède donc trois droites propres. Comme elle est symétrique réelle, ces trois droites propres sont deux à deux orthogonales et il suffit de trouver un vecteur directeur unitaire de chacune d'elles pour en déduire sans peine une base orthonormée de vecteurs propres.

On calcule des vecteurs propres associés respectivement associés à 0, 3 et 6 (en cherchant les noyaux de A, de $A-3I_3$ et de $A-6I_3$). On trouve dans un délai raisonnable :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il reste à normaliser ces vecteur pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres, donc la matrice

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale (matrice de passage de la base canonique, orthonormée par hypothèse, à une base orthonormée de vecteurs propres). En particulier, $P^{-1} = {}^tP$.

D'après **17.b.**,

$${}^tPBP = \mathrm{Diag}(0, 1/3, 1/6)$$

et donc

$$B = P\,\mathrm{Diag}(0, 1/3, 1/6)\,{}^tP.$$

On retrouve la même matrice après quelques efforts.

REMARQUE.— Les deux méthodes se valent, elles sont aussi calculatoires l'une que l'autre.

REMARQUE.— Il me paraît très compliqué de traiter significativement cette partie sans avoir parfaitement traité le **13.** : tout repose sur la compréhension précise de cette question !