Composition de Mathématiques

Le 1er mars 2017 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

❖ I – Problème ❖

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue alors deux tirages avec le protocole suivant :
– On tire une première boule au hasard ;
– Si la première boule tirée porte le numéro $1 \leqslant k \leqslant n$, on la remet dans l'urne avec k nouvelles boules numérotées k et on tire une deuxième boule au hasard dans l'urne.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules portant le numéro 3 dans l'urne avant de procéder au second tirage : la boule numéro 3 qui a été extraite lors du premier tirage et trois autres boules de numéro 3. On procède alors au second tirage dans une urne qui contient $(n+3)$ boules.

On note X (resp. Y), le numéro de la boule choisie lors du premier tirage (resp. du second tirage).

Pour modéliser l'expérience aléatoire, on considère que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $E_n = \{1, \dots, n\}$.

On rappelle que toute l'information disponible sur le couple de variables aléatoires (X, Y) est contenue dans sa loi conjointe, qui est (par définition) une mesure de probabilité discrète sur l'ensemble fini $E_n \times E_n$.

1. Comment la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires à valeurs dans E_n est-elle caractérisée habituellement ?

2. a. Pourquoi est-il légitime de supposer que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur E_n ?

2. b. Calculer l'espérance de X.

3. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$.

3. a. Expliquer pourquoi il est légitime de poser

$$\forall\, \ell \in E_n \setminus \{k\}, \quad \mathbf{P}(Y = \ell \mid X = k) = \frac{1}{n+k}.$$

3. b. Comment peut-on en déduire $\mathbf{P}(Y = k \mid X = k)$?

4. En déduire une caractérisation de la loi de Y.

5. Démontrer que Y est une variable aléatoire d'espérance finie et déduire de ce qui précède que

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+k}.$$

En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(Y)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Expliquer le sens du code Python suivant et démontrer que l'instruction `simulation(10)` permet d'estimer l'espérance de Y dans le cas $n = 10$.

```
from random import randint as unif

def tirages(n):
  X = unif(1, n)
  L = list(range(1,n+1))+[X]*X
  i = unif(1, len(L))
  Y = L[i-1]
  return [X, Y]

def simulation(n, N=10**5):
  ech_XY = [tirages(n) for k in range(N)]
  ech_Y = [t[1] for t in ech_XY]
  s = 0
  for Y in ech_Y:
    s += Y
  return s/N
```

❖ II – Problème ❖

Partie A. Étude d'une suite récurrente

On considère ici la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_1 = 3$$

et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{1}{2}\, u_{n+1} + \frac{1}{4}\, u_n \tag{1}$$

ainsi que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler (sans justification) le développement en série entière au voisinage de $x = 0$ de la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{1-x} \right].$$

On précisera le rayon de convergence.

2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Démontrer qu'elles appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note α et β, les valeurs propres de la matrice M.

3. a. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n.$$

3. b. Sans calculer A et B, démontrer les égalités suivantes.

$$A + B = 4 \tag{2}$$
$$A\alpha + B\beta = 3 \tag{3}$$
$$A\beta + B\alpha = -1 \tag{4}$$

3. c. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

et en déduire la valeur numérique de cette somme.

4. Écrire, en langage Python, une fonction `suite(N)` d'arguments $N \in \mathbb{N}$ qui retourne la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme de nombres rationnels. (On expliquera de quelle manière les nombres rationnels seront représentés. Les codes retournant une liste de flottants ne seront pas acceptés.)

Discuter la complexité temporelle de l'algorithme proposé en fonction des opérations effectuées (additions, multiplications...).

Partie B. Généralisation

On considère maintenant une suite réelle *positive* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = qv_{n+1} + pqv_n \tag{5}$$

où $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$ sont des réels fixés.

5. Démontrer que : si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est nulle.

6. Démontrer que la suite de terme général $v_{n+1} + pv_n$ est décroissante et positive.

7. En déduire que la suite de terme général v_{n+2} est convergente puis que

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} + pv_n = 0.$$

8. On suppose que la série $\sum v_n$ est convergente. Déduire de la relation de récurrence (5) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{pv_1 + v_2}{p^2}.$$

Règles du jeu

Dans la suite de ce problème, on étudie un jeu de hasard opposant deux joueurs, les célèbres Alice et Bob.

Alice et Bob jouent à Pile ou Face : une pièce est lancée plusieurs fois de suite, jusqu'à ce que trois lancers consécutifs amènent Pile-Pile-Face ou Face-Pile-Pile. Dans le premier cas, Alice remporte la partie et dans le second cas, Bob gagne.

Il s'agit de répondre aux questions suivantes.
– Est-on sûr que la partie finisse ?
– Quelle est la durée moyenne de la partie ?
– Quelle est la probabilité pour qu'Alice (resp. Bob) gagne ? Le jeu est-il équitable ?

Modélisation

On modélise le jeu de Pile ou Face par une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Ces variables aléatoires sont supposées indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = p$$
$$\mathbf{P}(X_n = 0) = q$$

où $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

On convient que l'événement $[X_n = 1]$ signifie que la pièce a donné Pile au n-ième lancer et que, par conséquent, l'événement $[X_n = 0]$ signifie que la pièce a donné Face au n-ième lancer.

On appellera **motif** tout élément de $\mathfrak{M} = \{0,1\}^3$, qui traduit le résultat de trois lancers successifs. Quel que soit le motif $m = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathfrak{M}$, on notera

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \text{au lieu de} \quad (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

On utilisera en particulier les motifs

$$m_A = 110 \qquad \text{et} \qquad m_B = 011$$

et l'ensemble

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \setminus \{m_A, m_B\}.$$

Une succession de sept lancers qui amène

Pile, Face, Pile, Face, Face, Pile, Pile

se traduit dans notre modèle par

$$X_1(\omega) = 1, \quad X_2(\omega) = 0, \quad X_3(\omega) = 1, \quad X_4(\omega) = 0,$$
$$X_5(\omega) = 0, \quad X_6(\omega) = 1, \quad X_7(\omega) = 1.$$

Les motifs qui apparaissent successivement sont alors 101, 010, 100, 001 et $011 = m_B$: la partie est donc terminée et Bob est vainqueur.

Certaines questions seront formulées en français. Seules les réponses qui exposent un raisonnement mathématique reposant sur le modèle précédent seront considérées comme rigoureuses — ce qui n'interdit pas de résumer ce raisonnement en français.

Partie C. Résultats préliminaires

9. Soient $k \geqslant 3$, un entier et $m \in \mathfrak{M}$, un motif. Démontrer que

$$\big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) = m\big] \in \mathcal{A}.$$

10. Démontrer que

$$\forall\, k \geqslant 3, \quad \big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) \in \mathfrak{M}'\big] \in \mathcal{A}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n, l'événement *Ni Alice, ni Bob n'ont gagné la partie au cours des n premiers lancers* ; on note A_n, l'événement *Le n-ième lancer fait gagner Alice* et B_n, l'événement *Le n-ième lancer fait gagner Bob.*

11. Exprimer E_n, A_n et B_n en fonction des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et en déduire que ce sont bien des événements :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad E_n \in \mathcal{A}, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \in \mathcal{A}.$$

12. Calculer $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(A_n)$ et $\mathbf{P}(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

13. Soient k et n, deux entiers naturels non nuls et

$$(x_0, \dots, x_k) \in \{0, 1\}^{k+1}.$$

Démontrer que les événements $E_n \cap [X_n = x_0]$ et

$$[X_{n+1} = x_1, X_{n+2} = x_2, \dots, X_{n+k} = x_k]$$

sont indépendants. Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement

$$E_n \cap [X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, X_{n+2} = x_2, \dots, X_{n+k} = x_k] \quad ?$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \mathbf{P}(E_n \cap [X_n = 0]) \quad \text{et} \quad w_n = \mathbf{P}(E_n \cap [X_n = 1]).$$

14. a. Pourquoi les nombres v_n et w_n sont-ils bien définis ? Que vaut la somme $v_n + w_n$?

14. b. Exprimer v_1, v_2, w_1 et w_2 en fonction de p et q.

14. c. En décomposant l'événement $E_n \cap [X_n = 0]$ sur le système complet d'événements associé à X_{n-1}, démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}.$$

14. d. Soit n, un entier naturel supérieur à 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Bob et qui se termine par un Pile. On suppose que lors de ces lancers, la pièce est tombée au moins une fois sur Face. On note k, l'indice du dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur Face. Démontrer que $k = n - 1$.

14. e. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad w_n = p^n + pv_{n-1}.$$

Partie D. Durée de la partie

15. On note T, la durée du jeu :
- Si l'un des deux joueurs gagne la partie au n-ième lancer, alors $T = n$;
- Si la partie ne se termine pas, on convient que $T = +\infty$.

La durée du jeu est donc une application de Ω dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [T > n] = E_n$$

et nous allons vérifier qu'il s'agit d'une variable aléatoire discrète.

15. a. Que dire de l'image réciproque $[T = n]$ lorsque l'entier naturel n est inférieur à 2 ?

15. b. Démontrer que $[T = n] \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

15. c. Vérifier enfin que $[T = +\infty] \in \mathcal{A}$.

16. Soit n, un entier supérieur à 2. Démontrer que

$$\mathbf{P}(T > n) = v_n + pv_{n-1} + p^n$$

17. Démontrer que $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$.

18. En déduire la loi de T.

Le résultat précédent permet de considérer T comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. En particulier, on *admettra* que T est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général $\sum \mathbf{P}(T > n)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n).$$

19. Démontrer que : si la série $\sum v_n$ est convergente, alors T est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)\Big(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n\Big).$$

20. *Dans cette question seulement,* on suppose que la pièce est équilibrée :

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Démontrer que T est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(T)$.

☞ *On pourra calculer v_2 et v_3.*

Partie E. Probabilités de victoire

21. Soit n, un entier supérieur à 3.

21. a. On considère une suite de n lancers successifs, telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $(n-1)$ premiers lancers, la pièce n'est jamais tombée sur Face.

21. b. En déduire la probabilité $\mathbf{P}(A_n)$, puis exprimer la probabilité $\mathbf{P}(B_n)$ en fonction de v_{n-2}.

22. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Bob gagne la partie.

23. Un jeu de hasard est dit **équitable** lorsque tous les participants ont la même probabilité de gagner.

Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

Solution I ❀ Un modèle d'urne

1. La loi conjointe de (X, Y) est caractérisée par la famille
$$\big(\mathbf{P}(X=i, Y=j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

2. a. La loi de X est une mesure de probabilité sur E_n qui indique avec quelles fréquences la variable X prend ses valeurs. Comme rien, dans l'énoncé, n'indique qu'une des boules a plus de chance qu'une autre d'être tirée, il est légitime de considérer que X suit la loi uniforme sur E_n.

2. b. Comme X est une variable aléatoire bornée, elle est d'espérance finie et comme, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$
alors
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

3. a. Comme $\mathbf{P}(X=k) = {}^1\!/_n > 0$, les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(Y=\ell \mid X=k)$ sont bien définies.

Conditionner par $[X=k]$ revient à supposer que la variable X a pris la valeur k, c'est-à-dire qu'on a tiré la boule numérotée k lors du premier tirage. Par conséquent, on va tirer la seconde boule dans une urne qui contient $(n+k)$ boules :
- une boule numérotée i pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$ différent de k ;
- et $(k+1)$ boules numérotées k.

Une fois encore, rien n'indique qu'une boule a plus de chance qu'une autre d'être tirée, donc chaque boule numérotée $i \in E_n \setminus \{k\}$ a une chance sur $(n+k)$ d'être choisie.

Autrement dit,
$$\forall\, \ell \in E_n \setminus \{k\}, \quad \mathbf{P}(Y=\ell \mid X=k) = \frac{1}{n+k}.$$

3. b. La famille $([Y=\ell])_{\ell\in E_n}$ est un système complet d'événements (puisque Y est une variable aléatoire à valeurs dans E_n) et $\mathbf{P}_{[X=k]}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$, donc
$$\sum_{\ell=1}^{n} \mathbf{P}_{X=k}(Y=\ell) = 1.$$
D'après la question précédente,
$$\mathbf{P}_{X=k}(Y=k) + \sum_{\ell\in E_n\setminus\{k\}} \frac{1}{n+k} = 1$$
et donc
$$\mathbf{P}(Y=k \mid X=k) = 1 - \frac{n-1}{n+k} = \frac{k+1}{n+k}.$$

4. D'après la formule des probabilités totales et les questions précédentes,
$$\begin{aligned}\forall\, \ell \in E_n, \quad \mathbf{P}(Y=\ell) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(Y=\ell \mid X=k)\,\mathbf{P}(X=k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k\in E_n\setminus\{\ell\}} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n}\frac{\ell+1}{n+\ell}\\ &= \frac{\ell}{n(n+\ell)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$
et comme Y est une variable aléatoire à valeurs dans E_n, on sait que la famille de probabilités
$$\big(\mathbf{P}(Y=\ell)\big)_{\ell\in E_n}$$
caractérise la loi de Y.

5. Comme la variable aléatoire Y est bornée, elle est d'espérance finie et d'après ce qui précède,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell\,\mathbf{P}(Y=\ell)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ell}{n(n+k)} + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell^2}{n(n+\ell)}\\ &= \frac{n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell^2}{n+\ell}.\end{aligned}$$
On peut expliciter deux sommes de Riemann.
$$\mathbf{E}(Y) = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+{}^k\!/_n} + n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{{}^{k^2}\!/_{n^2}}{1+{}^k\!/_n}.$$
Les fonctions
$$\Big[t\mapsto\frac{1}{1+t}\Big] \quad\text{et}\quad \Big[t\mapsto\frac{t^2}{1+t}\Big]$$
sont continues sur le segment $[0, 1]$, donc
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+{}^k\!/_n} \to \int_0^1\frac{dt}{1+t} = \ln 2$$
et
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{{}^{k^2}\!/_{n^2}}{1+{}^k\!/_n} \to \int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t} = \int_0^1 t-1+\frac{1}{1+t}\,dt = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$
Par conséquent,
$$\mathbf{E}(Y) \sim \Big(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\Big)\cdot n$$
lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Étude de la fonction `tirages`

On donne à `X` une valeur comprise entre 1 et n au sens large (choisie au hasard suivant la loi uniforme).

En notant k, la valeur attribuée à `X`, on construit ensuite la liste `L` égale à
$$(1, 2, \ldots, k, \ldots, n, \underbrace{k, \ldots, k}_{k\text{ exemplaires}}).$$
La longueur de cette liste est donc égale à $n+k$.

On choisit ensuite un indice `i` compris entre 1 et $n+k$ au sens large (choisi au hasard suivant la loi uniforme) et on attribue à `Y` la valeur de `L[i-1]`.

La valeur de `Y` est donc égale à $\ell \neq k$ lorsque `i` prend la valeur $\ell+1$ et égal à k lorsque `i` prend la valeur $k+1$ ou une valeur comprise entre $n+1$ et $n+k$.

Donc Y prend une valeur $\ell \neq k$ avec probabilité $\frac{1}{n+k}$ et prend la valeur k (la valeur de X) avec probabilité $\frac{k+1}{n+k}$.

La liste `[X,Y]` retournée par `tirages` est une simulation de (X, Y) qui est conforme à la loi conjointe du couple (X, Y) définie plus haut.

❧ Étude de la fonction `simulation`

La fonction `simulation` effectue N appels successifs à la fonction `tirages` avec $N = 10^5$ par défaut.

La liste `ech_XY` contient donc une réalisation de l'échantillon

$$\big((X_n, Y_n)\big)_{0\leqslant n<N}$$

et la liste `ech_Y` une réalisation de l'échantillon

$$(Y_n)_{0\leqslant n<N}$$

où les variables Y_n sont indépendantes et suivent toutes la loi de Y.

La variable `s` sert à calculer la somme des éléments de la liste `ech_Y` et la fonction `simulation` retourne le quotient de cette somme par le nombre `N` de termes, c'est-à-dire la *moyenne* de l'échantillon `ech_Y`.

Comme la variable Y est bornée, elle est de carré intégrable et la Loi des grands nombres peut s'appliquer : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{Y_0 + \cdots + Y_{N-1}}{N} - \mathbf{E}(Y)\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

En admettant que $N = 10^5$ soit assez grand, on en déduit que la moyenne de l'échantillon retournée par la fonction `simulation` est proche de $\mathbf{E}(Y)$ avec une probabilité assez forte.

REMARQUE.— On peut rendre la discussion précédente plus précise grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

REMARQUE.— Pour $n = 10$, on a $\mathbf{E}(Y) \approx 5,866$ et en exécutant dix fois l'instruction `simulation(10)`, on obtient les résultats suivants.

5,865	5,863	5,872	5,879	5,859
5,883	5,870	5,873	5,855	5,855

C'est probant !

Solution II ❁ Paradoxe de Penney

Partie A. Étude d'une suite récurrente

1. Le rayon de convergence est égal à 1 et

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

2. Le polynôme caractéristique de M est

$$\begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1/4 & 1/2 - X \end{vmatrix} = X(X - 1/2) - 1/4 = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

Son discriminant est égal à $1/4 + 1 = 5/4$, donc ses racines (qui sont les valeurs propres de la matrice M) sont

$$\frac{1/2 \pm \sqrt{5/4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$, donc

$$\frac{-1}{2} = \frac{1-3}{4} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1+3}{4} = 1.$$

Les valeurs propres de la matrice M appartiennent bien à l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

❧ Comme $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable : il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

3. a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = MU_n$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0.$$

Comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}Q^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} M^n &= Q\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= \alpha^n Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} + \beta^n Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} \end{aligned}$$

et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} M^n U_0 = A\,\alpha^n + B\,\beta^n$$

en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}U_0$$

$$\text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1}U_0.$$

3. b. D'après la question précédente,

$$4 = u_0 = A + B \quad \text{et} \quad 3 = u_1 = A\alpha + B\beta.$$

Comme α et β sont les racines de $X^2 - 1/2X - 1/4$, qui est un polynôme *unitaire*, on a $\alpha + \beta = 1/2$ et $\alpha\beta = -1/4$, donc

$$2 = (A+B)(\alpha+\beta) = (A\alpha + B\beta) + (A\beta + B\alpha)$$

et finalement $A\beta + B\alpha = 2 - 3 = -1$.

3. c. Comme α et β appartiennent à $]-1,1[$, les séries géométriques $\sum \alpha^n$ et $\sum \beta^n$ sont absolument convergentes. Par combinaison linéaire, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = A\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n + B\sum_{n=0}^{+\infty}\beta^n = \frac{A}{1-\alpha}+\frac{B}{1-\beta} = \frac{A(1-\beta)+B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

En développant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(A+B)-(A\beta+B\alpha)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{4-(-1)}{1-1/2-1/4} = 20.$$

4. Le plus simple est de représenter un rationnel positif r sous la forme d'un couple d'entiers naturels (n,q) tel que $r = n/q$.

La relation de récurrence qui définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut aussi s'écrire

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad 2^{n+2}u_{n+2} = 2^{n+1}u_{n+1} + 2^n u_n.$$

Comme $2^0u_0 = 4$ et $2^1u_1 = 6$ sont des entiers, on en déduit que la suite de terme général $v_n = 2^n u_n$ est une suite d'entiers naturels qui vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci : on est ainsi ramené à un problème bien connu.

☙ Il s'agit de calculer la famille : $\big((v_n,2^n)\big)_{0\leqslant n\leqslant N}$.

Si $N=0$ ou $N=1$, la liste à retourner est déjà connue.

Pour $N \geqslant 2$, on initialise la liste `V` avec les deux couples $(v_0,1)$ et $(v_1,2)$. Pour tout $1\leqslant n<N$ (c'est-à-dire : lorsque le paramètre `n` parcourt `range(1,N)`), on suppose connue la liste

$$V = \big((v_0,1),(v_1,2),\dots,\underbrace{(v_{n-1},2^{n-1})}_{\texttt{V[-2]}},\underbrace{(v_n,2^n)}_{\texttt{V[-1]}}\big)$$

et on applique la formule de récurrence :

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$$

pour calculer `num` et la formule de récurrence $2^{n+1} = 2\cdot 2^n$ pour calculer `den`. On ajoute ensuite le couple $(v_{n+1},2^{n+1})$ à la liste déjà connue avec `V.append((num, den))`.

```
def suite(N):
    """
    Entrée : N, entier naturel
    Sortie : liste des (N+1) premiers termes
      de la suite (u_n)_{n∈N} sous la forme de
      couples (numérateur, dénominateur)
    """
    if (N==0):
        return [(4,1)]
    else:
        V = [(4,1),(6,2)] # u_0 = 4/1, u_1 = 6/2
        for n in range(1, N):
            num = V[-1][0]+V[-2][0]
            den = 2*V[-1][1]
            V.append((num, den))
        return V
```

Partie B. Généralisation

5. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}_+$, alors les suites de termes généraux v_{n+1} et v_{n+2} convergent aussi vers ℓ (en tant que suites extraites d'une suite convergente).

En passant à la limite dans la relation (5), on en déduit que

$$\ell = q\ell + pq\ell$$

c'est-à-dire

$$(1-q-pq)\ell = p(1-q)\ell = p^2\ell = 0.$$

Comme $0<p<1$, on en déduit que $\ell = 0$.

6. Comme p, v_n et v_{n+1} sont positifs par hypothèse, il est clair que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}+pv_n \geqslant 0.$$

D'après la relation de récurrence (5), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(v_{n+1}+pv_n)-(v_{n+2}+pv_{n+1}) = pv_n + qv_{n+1} - v_{n+2} = p^2v_n \geqslant 0$$

donc la suite de terme général $v_{n+1}+pv_n$ est décroissante.

7. À nouveau par la relation de récurrence (5),

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad v_{n+2} = q(v_{n+1}+pv_n).$$

D'après ce qui précède, la suite de terme général v_{n+2} est décroissante et minorée, donc convergente. D'après **5.**, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc la suite de terme général

$$v_{n+1}+pv_n = \frac{v_{n+2}}{q}$$

tend vers 0.

8. Si on suppose que la série $\sum v_n$ converge, on peut sommer terme à terme la relation de récurrence (5) pour $n\in\mathbb{N}^*$. On en déduit que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} v_n = q\sum_{n=2}^{+\infty} v_n + pq\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n - v_1 - v_2\right) = q\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n - v_1\right) + pq\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

donc

$$(1-q-pq)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = v_1+v_2-qv_1$$

et finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{pv_1+v_2}{p^2}.$$

Remarque.— On peut démontrer (ce qui est plus fastidieux que difficile) que, pour tout $0<p<1$, les deux racines de l'équation caractéristique liée à (5) sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue. La série $\sum v_n$ est donc absolument convergente pour tout $0<p<1$.

Partie C. Résultats préliminaires

9. Comme les X_i sont des variables aléatoires, alors

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, \varepsilon \in \{0,1\},\quad [X_i = \varepsilon] \in \mathcal{A}.$$

Comme $m \in \mathfrak{M}$, il existe $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1\}^3$ tel que

$$\begin{aligned}\big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) = m\big] &= \big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\big]\\ &= [X_{k-2} = \varepsilon_0] \cap [X_{k-1} = \varepsilon_1] \cap [X_k = \varepsilon_2] \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{A}$, en tant que tribu, est stable par intersection finie ou dénombrable.

10. Il est clair que

$$\mathfrak{M}' = \bigsqcup_{m \in \mathfrak{M}'} \{m\}.$$

D'après les propriétés des images réciproques et la question précédente,

$$\big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) \in \mathfrak{M}'\big] = \bigsqcup_{m \in \mathfrak{M}'} \big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) = m\big] \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$, en tant que tribu, est stable par union finie ou dénombrable.

11. Les n premiers lancers permettent d'observer exactement $(n-2)$ motifs :

$$X_1X_2X_3,\ X_2X_3X_4,\ \ldots\ , X_{n-3}X_{n-2}X_{n-1},\ X_{n-2}X_{n-1}X_n.$$

❧ Pour $n = 1$ et $n = 2$, on n'observe aucun motif, donc aucun des deux joueurs n'a gagné et le jeu continue :

$$E_n = \Omega \in \mathcal{A}, \qquad A_n = B_n = \varnothing \in \mathcal{A}.$$

❧ Par définition, l'événement[1] E_n est réalisé lorsque ni le motif m_A, ni le motif m_B ne sont apparus lors des n premiers lancers, donc

$$E_n = \bigcap_{3 \leqslant k \leqslant n} \big[(X_{k-2}, X_{k-1}, X_k) \in \mathfrak{M}'\big].$$

En tant qu'intersection finie d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$ (d'après **10.**), l'ensemble E_n appartient à $\mathcal{A}$ et est bien un événement[2].

❧ L'événement A_n est réalisé lorsque ni le motif m_A, ni le motif m_B ne sont apparus lors des $(n-1)$ premiers lancers (de telle sorte qu'aucun des deux joueurs n'ont gagné avant le n-ième lancer) et que le motif m_A apparaît lors du n-ième lancer (marquant alors la victoire d'Alice).

Autrement dit, l'ensemble A_n est l'intersection de

$$E_{n-1} = \Bigg(\bigcap_{3 \leqslant k < n} [X_{k-2}X_{k-1}X_k \in \mathfrak{M}']\Bigg) \in \mathcal{A}$$

et de $[X_{n-2}X_{n-1}X_n = m_A] \in \mathcal{A}$, donc $A_n \in \mathcal{A}$.

❧ De manière analogue,

$$B_n = E_{n-1} \cap [X_{n-2}X_{n-1}X_n = m_B] \in \mathcal{A}.$$

12. D'après la question précédente, les probabilités $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(A_n)$ et $\mathbf{P}(B_n)$ sont bien définies (puisque la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est une application définie sur la tribu $\mathcal{A}$).

❧ Pour $n = 1$ et $n = 2$,

$$\mathbf{P}(E_n) = 1, \qquad \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(B_n) = 0.$$

❧ Pour $n = 3$, les événements

$$E_3 = [X_1X_2X_3 \in \mathfrak{M}'], \qquad A_3 = [X_1X_2X_3 = m_A] \quad \text{et} \quad B_3 = [X_1X_2X_3 = m_B]$$

forment un système complet d'événements, donc

$$\mathbf{P}(E_3) = 1 - \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}(B_3).$$

Comme les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_3) &= \mathbf{P}(X_1X_2X_3 = 110)\\ &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = 1)\,\mathbf{P}(X_3 = 0) = p^2q.\end{aligned}$$

De même, $\mathbf{P}(B_3) = p^2q$ et donc $\mathbf{P}(E_3) = 1 - 2p^2q$.

13. Par hypothèse, les variables aléatoires (réelles)

$$X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}$$

sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires (vectorielles)

$$(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$$

sont indépendantes.

D'après **11.**, l'événement

$$E_n \cap [X_n = x_0] = \bigcap_{3 \leqslant i \leqslant n} [X_{i-2}X_{i-1}X_i \in \mathfrak{M}'] \cap [X_n = x_0]$$

s'exprime en fonction de la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ tandis que l'événement

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} [X_{n+i} = x_i] = \big[(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) = (x_1, \ldots, x_k)\big]$$

s'exprime en fonction de la v.a. $(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$: ces deux événements sont donc indépendants.

On en déduit que la probabilité

$$\mathbf{P}\big(E_n \cap [X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, X_{n+2} = x_2, \ldots, X_{n+k} = x_k]\big)$$

est égale au produit

$$\mathbf{P}\big(E_n \cap [X_n = x_0]\big) \times \mathbf{P}\big(X_{n+1} = x_1, X_{n+2} = x_2, \ldots, X_{n+k} = x_k\big)$$

et donc au produit

$$\mathbf{P}\big(E_n \cap [X_n = x_0]\big) \times \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X_{n+i} = x_i)$$

1. Le terme *événement* est ici utilisé au sens usuel, non mathématique.
2. Cette fois, le terme *événement* est employé au sens de Kolmogorov et ses amis.

puisque les variables aléatoires $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$ sont indépendantes.

14. a. Comme X_n est une variable aléatoire, les images réciproques $[X_n = 0]$ et $[X_n = 1]$ sont des événements et comme la tribu $\mathcal{A}$ est stable par intersection,

$$E_n \cap [X_n = 0] \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad E_n \cap [X_n = 1] \in \mathcal{A}.$$

La mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathcal{A}$, donc les probabilités v_n et w_n sont bien définies.

Comme les événements $[X_n = 0]$ et $[X_n = 1]$ forment un système complet,

$$E_n = \big(E_n \cap [X_n = 0]\big) \sqcup \big(E_n \cap [X_n = 1]\big)$$

donc

$$\mathbf{P}(E_n) = v_n + w_n.$$

14. b. D'après **11.**, on a $E_n = \Omega$ pour $n = 1$ et $n = 2$, donc

$$E_n \cap [X_n = 0] = [X_n = 0] \quad \text{et} \quad E_n \cap [X_n = 1] = [X_n = 1]$$

et donc $v_1 = v_2 = q$, $w_1 = w_2 = p$.

14. c. Comme X_{n-1} est une variable aléatoire de Bernoulli, les événements $[X_{n-1} = 0]$ et $[X_{n-1} = 1]$ forment un système complet et

$$E_n \cap [X_n = 0] = E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0] \\ \sqcup E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$$

(où, comme d'habitude, le signe $\sqcup$ indique l'union d'ensemble deux à deux disjoints).

❧ D'après **11.**, l'événement $E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]$ est égal à

$$E_{n-1} \cap [X_{n-2}X_{n-1}X_n \in \mathfrak{M}'] \cap [X_{n-1} = 0, X_n = 0]$$

(ce qui a un sens car $n \geqslant 3$).

Si les entiers $X_{n-1}(\omega)$ et $X_n(\omega)$ sont tous les deux nuls, alors le motif $X_{n-2}(\omega)X_{n-1}(\omega)X_n(\omega)$ est à la fois différent du motif $m_A = 110$ et du motif $m_B = 011$, donc

$$[X_{n-1} = 0, X_n = 0] \subset [X_{n-2}X_{n-1}X_n \in \mathfrak{M}']$$

et par conséquent l'événement

$$[X_{n-2}X_{n-1}X_n \in \mathfrak{M}'] \cap [X_{n-1} = 0, X_n = 0]$$

est égal à $[X_{n-1} = 0, X_n = 0]$, donc

$$E_n \cap [X_{n-1} = 0, X_n = 0] = E_{n-1} \cap [X_{n-1} = 0, X_n = 0].$$

D'après **13.**,

$$\mathbf{P}(E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]) \\ = \mathbf{P}(E_{n-1} \cap [X_{n-1} = 0])\,\mathbf{P}(X_n = 0) = v_{n-1}q.$$

❧ D'après **11.**, l'événement $E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$ est égal à

$$E_{n-1} \cap [X_{n-2}X_{n-1}X_n \in \mathfrak{M}'] \cap [X_{n-1} = 1, X_n = 0].$$

Si $X_{n-1}(\omega) = 1$ et $X_n(\omega) = 0$, alors le motif

$$X_{n-2}(\omega)X_{n-1}(\omega)X_n(\omega)$$

ne peut pas être égal au motif $m_B = 011$ et il est différent du motif $m_A = 110$ si, et seulement si, $X_{n-2}(\omega) \neq 1$. Par conséquent,

$$[X_{n-2}X_{n-1}X_n \in \mathfrak{M}'] \cap [X_{n-1} = 1, X_n = 0] \\ = [X_{n-2}X_{n-1}X_n = 010].$$

Toujours par **11.**, l'événement $E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$ est donc égal à

$$E_{n-2} \cap [X_{n-3}X_{n-2}X_{n-1} \in \mathfrak{M}'] \cap [X_{n-2}X_{n-1}X_n = 010].$$

Si $X_{n-2}(\omega) = 0$, alors $X_{n-3}(\omega)X_{n-2}(\omega)X_{n-1}(\omega)$ ne peut être égal ni au motif $m_A = 110$, ni au motif $m_B = 011$, donc

$$[X_{n-2}X_{n-1}X_n = 010] \subset [X_{n-3}X_{n-2}X_{n-1} \in \mathfrak{M}']$$

et finalement

$$E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0] = E_{n-2} \cap [X_{n-2}X_{n-1}X_n = 010].$$

On peut alors déduire de **13.** que

$$\mathbf{P}(E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]) \\ = \mathbf{P}(E_{n-2} \cap [X_{n-2} = 0])\,\mathbf{P}(X_{n-1} = 1)\,\mathbf{P}(X_n = 0) \\ = v_{n-2}pq.$$

❧ Comme la probabilité de l'union de deux événements disjoints est la somme de leurs probabilités, on en déduit enfin que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}.$$

14. d. On s'intéresse ici à l'événement

$$E_n \cap [X_n = 1] \cap \Big(\bigcup_{1 \leqslant k < n} [X_k = 0]\Big)$$

c'est-à-dire

$$\bigcup_{1 \leqslant k < n} E_n \cap [X_k = 0] \cap [X_n = 1].$$

Soit $1 \leqslant k \leqslant n-2$ (ce qui est possible puisqu'on a supposé $n \geqslant 3$). Alors $k < n-1$ et en discutant sur les valeurs possibles de X_{n-1} on voit que l'événement

$$E_n \cap [X_k = 0] \cap [X_n = 1]$$

est l'union des événements

$$E_n \cap [X_k = 0, X_{n-1} = 0, X_n = 1] \\ \text{et} \quad E_n \cap [X_k = 0, X_{n-1} = 1, X_n = 1].$$

Considérons $\omega \in [X_k = 0, X_{n-1} = 1, X_n = 1]$. L'ensemble

$$\big\{k \leqslant i \leqslant n \,:\, X_i(\omega) = 0\big\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $i = k$) et majorée (par n et même par $(n-2)$), donc elle admet un plus grand élément i_0. On a alors $X_{i_0}(\omega) = 0$ et

$$\forall\, i_0 < i \leqslant n, \quad X_i(\omega) = 1.$$

Comme $X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega) = 1$, on en déduit que

$$X_{i_0}(\omega)X_{i_0+1}(\omega)X_{i_0+2}(\omega) = 011 = m_B \notin \mathfrak{M}'.$$

D'après **11.**,

$$E_n \cap [X_k = 0, X_{n-1} = 1, X_n = 1] = \varnothing$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E_n \cap [X_k = 0, X_n = 1] &= E_n \cap [X_k = 0, X_{n-1} = 0, X_n = 1] \\ &\subset E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1] \end{aligned}$$

pour tout $1 \leqslant k < n$. Finalement,

$$E_n \cap [X_n = 1] \cap \bigcup_{1 \leqslant k < n} [X_k = 0] = E_n \cap [X_{n-1} = 0, X_n = 1].$$

En pratique, cela signifie que : dans une suite de n lancers qui ne fait gagner ni Alice, ni Bob et terminée par Pile, si la pièce n'a pas toujours donné Pile, alors elle a donné Face au $(n-1)$-ième lancer.

14. e. Soit $n \geqslant 3$.

On décompose l'événement $E_n \cap [X_n = 1]$ en deux sous-événements :

– Ou bien la pièce n'a pas toujours donné Pile ;
– Ou bien la pièce a toujours donné Pile.

D'après la question précédente, $E_n \cap [X_n = 1]$ est l'union de

$$E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]$$

et de

$$E_n \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1] = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1],$$

qui sont visiblement des événements disjoints.

De manière analogue à ce qu'on a fait au **14.c.**, on déduit de **13.** que

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(E_n \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]) \\ &\quad = \mathbf{P}(E_{n-1} \cap [X_{n-1} = 0])\,\mathbf{P}(X_n = 1) = v_n p. \end{aligned}$$

D'autre part, comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(E_n \cap [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 1]) = p^n.$$

Finalement, pour tout $n \geqslant 3$,

$$w_n = \mathbf{P}(E_n \cap [X_n = 1]) = p^n + p v_{n-1}.$$

Partie D. Durée de la partie

15. a. La partie ne peut pas se terminer avant le troisième lancer ($E_1 = E_2 = \Omega$), donc

$$[T = 0] = [T = 1] = [T = 2] = \varnothing \in \mathcal{A}.$$

15. b. Soit $n \geqslant 3$. Comme T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

$$[T > n-1] = [T = n] \sqcup [T > n]$$

et donc

$$[T = n] = [T > n-1] \cap [T > n]^c = E_{n-1} \cap E_n^c.$$

Comme E_n et E_{n-1} sont des événements (d'après **11.**) et que la tribu $\mathcal{A}$ (comme il se doit) est stable par intersection et par passage au complémentaire,

$$\forall\, n \geqslant 3, \qquad [T = n] \in \mathcal{A}.$$

15. c. L'équivalence évidente

$$T(\omega) = +\infty \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T(\omega) > n$$

se traduit en termes ensemblistes par l'égalité

$$[T = +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [T > n].$$

Or $[T > n] \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{A}$, en tant que tribu, est stable par intersection dénombrable, donc

$$[T = +\infty] \in \mathcal{A}.$$

16. Comme X_n est une variable aléatoire de Bernoulli,

$$[T > n] = E_n = (E_n \cap [X_n = 0]) \sqcup (E_n \cap [X_n = 1]).$$

Comme ces événements sont disjoints,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T > n) &= \mathbf{P}(E_n \cap [X_n = 0]) + \mathbf{P}(E_n \cap [X_n = 1]) \\ &= v_n + w_n \\ &= v_n + p v_{n-1} + p^n \end{aligned}$$

pour tout $n \geqslant 3$ (par définition de v_n et w_n et d'après la relation établie au **14.e.**).

17. La famille

$$\big([T > n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite décroissante d'événements. D'après **15.c.**,

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \downarrow \mathbf{P}(T > n)$$

par continuité décroissante de la mesure $\mathbf{P}$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive qui, d'après **14.c.**, vérifie la relation de récurrence (5). D'après **7.** et l'hypothèse $0 < p < 1$, la suite de terme général

$$v_n + p v_{n-1} + p^n$$

tend donc vers 0. D'après la question précédente,

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = 0.$$

18. La variable T prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On sait par **15.a.** que

$$\mathbf{P}(T = 0) = \mathbf{P}(T = 1) = \mathbf{P}(T = 2) = 0$$

et par **17.** que

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = 0.$$

Supposons maintenant que $n \geqslant 3$. Par **15.b.**,

$$E_{n-1} = E_n \sqcup [T = n]$$

et par **14.a.**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T = n) &= \mathbf{P}(E_{n-1}) - \mathbf{P}(E_n) \\ &= (v_{n-1} + w_{n-1}) - (v_n + w_n). \end{aligned}$$

On déduit alors de **14.e.** et de la relation de récurrence (5) que

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \mathbf{P}(T = n) = p^{n-1}q + p^2 v_{n-2}.$$

19. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la relation du **16.** :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \mathbf{P}(T > n) = v_n + p v_{n-1} + p^n$$

montre que la série $\sum \mathbf{P}(T > n)$ est une combinaison linéaire de trois séries convergentes : $\sum v_n$, $\sum v_{n-1}$ et $\sum p^n$ (puisque $0 < p < 1$). Donc la série $\sum \mathbf{P}(T > n)$ converge et, d'après le résultat (classique) admis par l'énoncé, la variable T est une variable aléatoire d'espérance finie.

❧ D'après **11.**, $[T > 2] = E_2 = \Omega$. On en déduit (par décroissance) que

$$[T > 0] = [T > 1] = [T > 2] = \Omega.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n) &= 3 + \sum_{n=3}^{+\infty} (v_n + p v_{n-1} + p^n) \\ &= 3 + \sum_{n=3}^{+\infty} v_n + p \sum_{n=2}^{+\infty} v_n + \frac{p^3}{1-p} \\ &= 3 - v_2 + \frac{p^3}{1-p} + (1+p) \sum_{n=2}^{+\infty} v_n.\end{aligned}$$

On déduit alors de **14.b.** et de la formule de $\mathbf{E}(T)$ donnée par l'énoncé que

$$\mathbf{E}(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p) \sum_{n=2}^{+\infty} v_n.$$

20. Pour $p = q = 1/2$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie la relation de récurrence (1) à partir de $n = 2$. Or $v_2 = 1/2 = 4/8$ d'après **14.b.** et $v_3 = 3/8$ d'après (5) et **14.b.** Comme la relation de récurrence (1) est *linéaire*, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad v_n = \frac{1}{8} u_{n-2}$$

et on déduit de **3.c.** que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{5}{2}.$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}(T) = \frac{13}{2}.$$

REMARQUE.— La durée moyenne du jeu est courte : il faut lancer la pièce au moins *trois* fois avant qu'un des joueurs puisse gagner et le nombre moyen de lancers est un peu plus grand que *six* !

Partie E. Probabilités de victoire

21. a. On étudie ici l'événement A_n et on va raisonner de manière analogue au **14.d.** Pour tout $\omega \in A_n$, on a

$$X_{n-2}(\omega) = X_{n-1}(\omega) = 1, \quad X_n(\omega) = 0.$$

S'il existe un indice $1 \leqslant i < n$ tel que $X_i(\omega) = 0$, l'ensemble

$$\{1 \leqslant i < n \;:\; X_i(\omega) = 0\}$$

est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$: il admet donc un plus grand élément i_0 et $i_0 < n - 2$ (puisque $X_{n-2}(\omega) = X_{n-1}(\omega) = 1$). On a donc

$$X_{i_0}(\omega) = 0, \quad X_{i_0+1}(\omega) = 1, \quad X_{i_0+2}(\omega) = 1$$

c'est-à-dire $X_{i_0}(\omega)X_{i_0+1}(\omega)X_{i_0+2}(\omega) = m_A$, ce qui contredit le fait que

$$A_n \subset [X_{i_0}X_{i_0+1}X_{i_0+2} \in \mathfrak{M}'].$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, \omega \in A_n,\ \forall\, 1 \leqslant i < n, \quad X_i(\omega) = 1$$

et donc que

$$A_n \subset [X_1 = \cdots = X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0].$$

REMARQUE.— L'inclusion réciproque est évidente (le motif m_B n'apparaît jamais et le motif m_A apparaît pour la première fois lors du n-ième lancer), donc

$$A_n = \Big(\bigcap_{1\leqslant i<n} [X_i = 1] \Big) \cap [X_n = 0].$$

21. b. Soit $n \geqslant 3$.

❧ D'après la question précédente,

$$A_n = [X_1 = \cdots = X_{n-1} = 1, X_n = 0].$$

Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(A_n) = \Big(\prod_{1\leqslant k<n} \mathbf{P}(X_k = 1) \Big) \times \mathbf{P}(X_n = 0) = p^{n-1}q.$$

❧ Comme la partie ne peut s'achever que par la victoire d'Alice ou par la victoire de Bob et que les deux joueurs ne peuvent être vainqueurs en même temps,

$$[T = n] = A_n \sqcup B_n$$

donc

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(T = n) - \mathbf{P}(A_n) = p^2 v_{n-2}$$

d'après **18.**

22. Notons A, l'événement : *Alice gagne la partie* et B, l'événement : *Bob gagne la partie*. Si l'un des joueurs gagne, alors la partie se termine, donc

$$A \subset [T < +\infty] \quad \text{et} \quad B \subset [T < +\infty].$$

On en déduit que

$$A = \bigsqcup_{n\geqslant 3} \big(A \cap [T = n]\big) \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{n\geqslant 3} \big(B \cap [T = n]\big)$$

et, par définition, $A \cap [T = n] = A_n$ et $B \cap [T = n] = B_n$, donc

$$A = \bigsqcup_{n\geqslant 3} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{n\geqslant 3} B_n \in \mathcal{A}$$

d'après **11.** Les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ sont donc bien définies.

❧ Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on déduit de la question précédente que

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q = \frac{qp^2}{1-p} = p^2$$

et de **8.** que

$$\mathbf{P}(B) = p^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n) = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = pv_1 + v_2.$$

D'après **14.b.**,

$$\mathbf{P}(B) = (p+1)q = 1 - p^2.$$

Remarque.— On peut conclure plus vite en remarquant que

$$[T < +\infty] = A \sqcup B$$

(la partie ne se termine que s'il y a un gagnant et il ne peut y avoir qu'un seul gagnant) et donc que

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(T < +\infty) - \mathbf{P}(A) = 1 - p^2.$$

23. Le jeu est équitable si, et seulement si,

$$p^2 = 1 - p^2 = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire pour $p = 1/\sqrt{2}$.

Complément informatique

La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ est aussi la loi binomiale $\mathcal{B}(1, 1/2)$. On définit une fonction `piece()` qui permet de simuler un jeu de Pile ou Face équilibré.

Les listes `mA` et `mB` correspondent aux motifs m_A et m_B.

On lance deux fois la pièce et tant que le booléen `continuer` le permet, on relance la pièce. Après chaque lancer, on compare le motif obtenu sur les trois derniers résultats (c'est-à-dire $X_{n-2}X_{n-1}X_n$) aux motifs m_A et m_B.

Lorsque la partie est terminée, le booléen `gagnant` est égal à `True` lorsque Alice a gagné (et donc à `False` lorsque Bob a gagné). La longueur de la liste `J` est le nombre de fois où la pièce a été lancée : c'est donc la durée T de la partie.

Avec la fonction `simulation(N)`, on simule le déroulement de N parties (avec $N = 10^5$ par défaut). On obtient ainsi une liste de couples dont on calcule la somme composante par composante. En divisant par la longueur de la liste, on obtient la valeur moyenne de la première composante (c'est-à-dire la durée moyenne) et la valeur moyenne de la deuxième composante (c'est-à-dire la fréquence avec laquelle Alice a gagné).

```
from numpy.random import binomial as Bernoulli

def piece():
    return Bernoulli(1,0.5)

mA, mB = [1,1,0], [0,1,1]

def jeu():
    J = [piece(), piece()]
    continuer = True
    while (continuer):
        J.append(piece())
        motif = J[-3:]
        continuer = (motif!=mA) and (motif!=mB)
    gagnant = (motif==mA)
    duree = len(J)
    return duree, gagnant

def simulation(N=10**5):
    from numpy import sum
    S = [jeu() for k in range(N)]
    return sum(S, axis=0)/N
```

En exécutant dix fois la fonction `simulation()`, on obtient les résultats suivants, qui sont bien en accord avec la théorie.

Durée moyenne d'une partie $\mathbf{E}(T) = 13/2$				
6,506	6,503	6,539	6,494	6,512
6,500	6,500	6,490	6,510	6,522

Fréquence de victoire d'Alice $\mathbf{P}(A) = 1/4$				
0,250	0,250	0,249	0,250	0,250
0,252	0,248	0,249	0,250	0,251