Composition de Mathématiques

Le 31 janvier 2018 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Exercice ❖

On *rappelle* que : si une fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a, a[$, alors cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$; son développement en série entière est unique et donné par la série de Taylor de f :

$$\forall\, x \in\,]-a, a[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

1. On suppose dans cette question que la fonction f est développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$$

1. a. Démontrer que la série de fonctions

$$\sum f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

converge normalement sur le segment $[0, 1]$.
1. b. En calculant

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx,$$

démontrer que la fonction f est nulle sur le segment $[0, 1]$.
1. c. Démontrer que la fonction f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{-t}}{1 + tx^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x, t)\, dt.$$

2. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. b. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *On admettra* que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on obtient ses dérivées successives en dérivant sous le signe $\int$.
2. c. Pour $t > 0$, calculer au moyen d'une série entière les dérivées successives en $x = 0$ de la fonction

$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$

En déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. d. Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \quad ?$$

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de l'origine ?
3. Soient $a > 0$ et f, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$. On suppose qu'il existe une réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, x \in\,]-a, a[, \; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M.$$

3. a. Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.
3. b. Donner un exemple simple de fonction qui vérifie les hypothèses faites au début de cette question.

❖ II – Problème ❖

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et φ_x, la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_x(t) = \max(x, t).$$

1. a. Donner une représentation graphique de φ_x.
1. b. Calculer

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)\, dt.$$

1. c. Donner une représentation graphique de Φ.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on pose

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \int_0^1 \max\bigl(X(\omega), t\bigr)\, dt.$$

2. Démontrer que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
3. On suppose que X suit une loi géométrique. Déterminer la loi de Y.
4. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $0 < p < 1$. On notera $q = 1 - p$.
4. a. Rappeler la loi de X et donner (sans démonstration) son espérance et sa variance.
4. b. Déterminer la loi de Y.

5. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $E = \{-1;\ 0;\ 1/2;\ 2\}$ et que

$$\mathbf{P}(X=-1) = \mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{3}.$$

5. a. Quelle est la valeur de $\mathbf{P}(X = 1/2)$?
5. b. Déterminer la loi de Y. En déduire l'espérance de Y.
5. c. On pose

$$\forall\ \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Démontrer que Z est une variable aléatoire. Déterminer la loi de Z.
5. d. Démontrer que le coefficient de corrélation

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}$$

est strictement positif.

❖ III – Problème ❖

On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions du type

$$\sum [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles.

On note $\mathscr{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les **coefficients de Fourier** d'une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ sont notés

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$\text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Partie A. Exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique

$$\sum\left[\frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx\right]$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier $p \geqslant 2$, la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$$

et en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx\right].$$

(Il n'est pas utile de réduire au même dénominateur.)

2. Écrire la fonction

$$\varphi = [x \mapsto \exp(\cos x)\cos(\sin x)]$$

comme la somme d'une série trigonométrique.
☞ *On pourra écrire la fonction* $[x \mapsto \exp(e^{ix})]$ *comme la somme d'une série de fonctions.*

3. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos nx$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la série trigonométrique

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie B. Questions de convergence normale

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum[a_n\cos nx + b_n \sin nx]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

6. Soient a et b, deux réels quelconques. Démontrer que le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $[x \mapsto |a\cos x + b\sin x|]$ est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

7. Étudier la réciproque de **5.**

8. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx.$$

On admettra dans la suite que

$$\forall\ k \neq n, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx = 0.$$

9. Soit f, la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos nx + b_n \sin nx].$$

9. a. Justifier que $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
9. b. Démontrer que $\alpha_n(f) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer aussi $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

On admettra dans la suite que $\beta_0(f) = 0$ et que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n(f) = b_n.$$

10. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(f) = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = \alpha_n(f)\cos nx + \beta_n(f)\sin nx.$$

On suppose dans cette question que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est notée g : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[\alpha_k(f)\cos kx + \beta_k(f)\sin kx].$$

10. a. Quelles relations a-t-on entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? entre $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?
10. b. On *admet* que : si une fonction $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ vérifie

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0,$$

alors h est la fonction nulle.

Démontrer que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
10. c. Conclure.

Solution I ❁ Exercice

1. a. En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence R, la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et comme $R > 1$, alors $[0, 1] \subset]-R, R[$, donc f est continue sur le segment $[0, 1]$. Par conséquent, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\, x \in [0, 1], \qquad |f(x)| \leqslant M.$$

De plus, la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$ et donc en particulier pour $x = 1$.

Enfin, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} f(x) x^n\right| \leqslant M \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \times 1^n.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$ et c'est, comme on vient de le voir, le terme général d'une série convergente. On a bien démontré que la série de fonctions

$$\sum f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

convergeait normalement sur le segment $[0, 1]$.

1. b. Comme f est développable en série entière sur $]-R, R[$, elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur cet intervalle et par conséquent

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0, 1], \quad f^2(x) &= f(x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, il s'agit d'une série de fonctions qui converge *normalement* sur le *segment* $[0, 1]$, il est donc possible d'intervertir les opérateurs $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Par hypothèse, tous les termes de cette somme sont nuls, donc

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx = 0.$$

❧ La fonction f^2 est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Comme son intégrale est nulle, elle est identiquement sur $[0, 1]$.

1. c. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, on déduit en particulier de la question précédente que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Comme f est la somme de sa série de Taylor sur $]-R, R[$:

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que la fonction $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. De plus,

$$\forall\, t \in I, \quad |\varphi(x, t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{1 + 0} = e^{-t}.$$

Comme ce majorant est intégrable sur I (fonction de référence), on en déduit que la fonction $[t \mapsto \varphi(x, t)]$ est intégrable sur I.

2. b. Nous allons appliquer le théorème de dérivation sous $\int$.

❧ On a démontré à la question précédente que, pour tout $x \in \Omega = \mathbb{R}$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x, t)]$$

était intégrable sur $I = [0, +\infty[$.

❧ Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto \varphi(x, t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω. En outre,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{-2xte^{-t}}{1 + tx^2}.$$

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right]$$

est clairement continue sur I.

❧ Pour tout $a > 0$, pour tout $t \in I$ et tout $|x| \leqslant a$,

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 2ate^{-t}.$$

Ce majorant est indépendant de $x \in [-a, a]$ et (d'après le cours sur la fonction Γ) est intégrable sur I en tant que fonction de t.

Les hypothèses du théorème de dérivation sous $\int$ sont donc vérifiées sur tout segment $[-a, a]$. Cela prouve que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 + tx^2}\, dt.$$

2. c. Soit $t > 0$. Pour tout x dans l'intervalle ouvert

$$J_t = \left]-\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right[,$$

on a $|-tx^2| < 1$ et donc

$$\varphi(x, t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-tx^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t}(-t)^n \cdot x^{2n}.$$

On en déduit que $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence supérieur à $1/\sqrt{t} > 0$.

D'après la formule de Taylor (rappelée dans l'énoncé),

$$\frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial x^{2k}}(0, t) = (2k)!(-t)^k e^{-t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{2k+1} \varphi}{\partial x^{2k+1}}(0, t) = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❧ En admettant (ce que demande l'énoncé) que

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t)\, dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)! \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = (-1)^k k!(2k)!$$

(intégrale classique, calculée par intégrations par parties successives) et

$$f^{(2k+1)}(0) = 0$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

2. d. Quel que soit $x \neq 0$, la quantité

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}\right| = k!\,x^{2k}$$

tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$ et par conséquent, la série de Taylor de f diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de cette série de Taylor est *nul* et donc que la fonction f n'est pas développable en série entière.

3. a. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, on peut appliquer la formule de Taylor avec majoration de Lagrange pour le reste : pour $|x| < a$,

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{|t|\leqslant|x|}\left|f^{(n+1)}(t)\right| \\ &\leqslant M\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leqslant M\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Le majorant, qui est indépendant de x, tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (par croissances comparées des suites géométriques et de la suite factorielle), donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$$

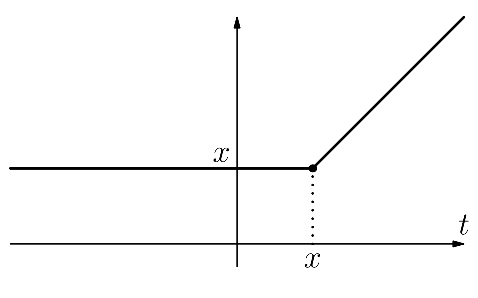
pour tout $x \in\,]-a, a[$: la fonction f est bien développable en série entière au voisinage de l'origine.

3. b. Les fonctions sin, cos et exp sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont uniformément bornées sur tout segment $[-a, a]$:

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-a, a], \quad &\left|\sin^{(n)} x\right| \leqslant 1 \\ &\left|\cos^{(n)} x\right| \leqslant 1 \\ &\left|\exp^{(n)} x\right| \leqslant e^a.\end{aligned}$$

Solution II ❁ Calcul de covariance

1. a. Pour $t \leqslant x$, on a $\varphi_x(t) = x$ (= constante) et pour $t \geqslant x$, on a $\varphi_x(t) = t$ (= première bissectrice).



1. b. On distingue trois cas :

- Si $x \leqslant 0$, alors $\varphi_x(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$ et
$$\Phi(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$
- Si $x \geqslant 1$, alors $\varphi_x(t) = x$ pour tout $t \in [0, 1]$ et
$$\Phi(x) = \int_0^1 x\,dt = x.$$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on applique la relation de Chasles :
$$\Phi(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = \frac{1 + x^2}{2}.$$

1. c. Il est clair que Φ est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Par ailleurs, d'après les calculs précédents,

$$\Phi(0-) = \Phi(0+) = \frac{1}{2} = \Phi(0)$$

donc Φ est continue en $x = 0$ et

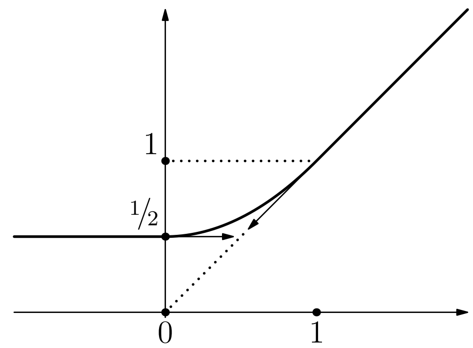
$$\Phi(1-) = \Phi(1+) = 1 = \Phi(1)$$

donc Φ est continue en $x = 1$. La fonction Φ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De même, Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ et, toujours d'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}\forall\, x < 0, &\quad \Phi'(x) = 0 \\ \forall\, 0 < x < 1, &\quad \Phi'(x) = x \\ \forall\, x > 1, &\quad \Phi'(x) = 1.\end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi'(0-) = \Phi'(0+) = 0$ et que $\Phi'(1-) = \Phi'(1+) = 1$, donc la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$).



2. Comme X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $Y = \Phi(X)$, la fonction Y est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

REMARQUE.— On peut aussi remarquer (en prévision de la suite...) que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad [Y = y] = \left[X \in \Phi^{-1}(\{y\})\right]$$

et donc que

$$\begin{aligned}[Y = y] &= \varnothing && \text{si } y < 1/2 \\ &= [X \leqslant 0] && \text{pour } y = 1/2 \\ &= [X = \sqrt{2y - 1}] && \text{pour } 1/2 < y \leqslant 1 \\ &= [X = y] && \text{pour } y \geqslant 1\end{aligned}$$

3. Si X suit une loi géométrique, alors $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc $Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega)$. On a donc : $Y = X$ (égalité des variables aléatoires, et pas seulement égalité en loi !), donc en particulier Y suit la même loi géométrique que X.

4. a. Cf cours !

Je rappelle quand même que donner la loi d'une variable aléatoire discrète, c'est d'abord donner l'ensemble des valeurs possibles pour cette variable et ensuite donner les fréquences avec lesquelles ces valeurs apparaissent.

4. b. Comme X prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, on distingue deux cas :
- Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \Phi(0) = 1/2$.
- Sinon, alors $X(\omega) \geqslant 1$, donc $Y(\omega) = X(\omega)$.

Donc Y est une variable aléatoire à valeurs dans

$$\{1/2, 1, 2, \dots, n\}$$

et d'après la discussion précédente,

$$[Y = 1/2] = [X = 0]$$
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad [Y = k] = [X = k].$$

On en déduit que $\mathbf{P}(Y = 1/2) = q^n$ et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

5. a. Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E, la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = x)\big)_{x \in E}$$

est un système complet d'événements, donc

$$1 = \sum_{x \in E} \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \mathbf{P}(X = 1/2) + \frac{1}{3}$$

donc $\mathbf{P}(X = 1/2) = 5/12$.

5. b. Étudions les valeurs prises par $Y = \Phi(X)$ en fonction des valeurs prises par X :
- Si $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$.
- Si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = 5/8$.
- Si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 2$.

On déduit de cette discussion que Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $F = \{1/2;\ 5/8;\ 2\}$ et que

$$[Y = 1/2] = [X = -1] \sqcup [X = 0],$$
$$[Y = 5/8] = [X = 1/2], \quad [Y = 2] = [X = 2].$$

Remarque.— La discussion a établi des inclusions d'ensembles. Comme on a envisagé tous les cas possibles (= toutes les valeurs possibles pour X) et que ces cas s'excluaient mutuellement (puisque X ne peut pas prendre deux valeurs différentes en même temps), on a de fait établi les inclusions réciproques : on a bien démontré les égalités !

On en déduit que

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(Y = 5/8) = \frac{5}{12}, \quad \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}.$$

❧ Comme la variable aléatoire Y ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs, elle est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{y \in F} y\, \mathbf{P}(Y = y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{101}{96}.$$

5. c. En tant que produit de deux variables aléatoires discrètes, Z est une variable aléatoire discrète.

❧ Étudions les valeurs possibles de Z en discutant sur la valeur de X.
- Si $X(\omega) = -1$, alors $Y(\omega) = 1/2$ et $Z(\omega) = -1/2$.
- Si $X(\omega) = 0$, alors $Z(\omega) = 0$.
- Si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = 5/8$ et $Z(\omega) = 5/16$.
- Si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 2$ et $Z(\omega) = 4$.

On en déduit que Z est une variable aléatoire discrète à valeurs dans

$$G = \left\{\frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{5}{16},\ 4\right\}$$

et que

$$[Z = -1/2] = [X = 1] \qquad [Z = 0] = [X = 0]$$
$$[Z = 5/16] = [X = 1/2] \qquad [Z = 4] = [X = 2]$$

(pour les raisons présentées plus haut). On en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = -1/2) = 1/8, \qquad \mathbf{P}(Z = 0) = 1/8,$$
$$\mathbf{P}(Z = 5/16) = 5/12, \qquad \mathbf{P}(Z = 4) = 1/3.$$

5. d. On déduit de la loi de X que

$$\mathbf{E}(X) = \frac{-1}{8} + 0 + \frac{5}{24} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

et de la loi de Z que

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{-1}{16} + 0 + \frac{25}{16 \cdot 12} + \frac{4}{3} = \frac{269}{4 \cdot 48}.$$

(Personne ne demande de calculer le dénominateur !)

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) &= \frac{269}{4 \cdot 48} - \frac{3}{4} \cdot \frac{101}{96} \\ &= \frac{2 \cdot 269 - 3 \cdot 101}{4 \cdot 96} \\ &> 0.\end{aligned}$$

(Personne ne demande de calculer explicitement la covariance : on ne cherche que son *signe* !)

Remarque.— Le signe de la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ est aussi le signe du coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Comme Y est par construction une fonction *croissante* de X, la droite de régression de Y en fonction de X est sans aucun doute possible croissante, donc on pouvait prévoir sans aucun calcul que cette covariance était positive.

Solution III ❀ Séries trigonométriques

Partie A. Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leqslant \frac{2}{2^n}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et on reconnaît le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $1/2$), donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❧ Si $p \geqslant 2$, alors

$$\Big|\frac{e^{ix}}{p}\Big| = \frac{1}{p} < 1,$$

donc la série géométrique $\sum (e^{ix}/p)^n$ converge (absolument) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{ix}}{p}\Big)^n = \frac{p}{p-e^{ix}} = \frac{p(p-\cos x)+ip\sin x}{p^2-2p\cos x+1}$$

(en faisant apparaître la quantité conjuguée du dénominateur). On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{p^n} = \frac{p(p-\cos x)}{p^2-2p\cos x+1}$$

et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p\sin x}{p^2-2p\cos x+1}.$$

❧ En prenant $p = 2$ et $p = 3$, on obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}.$$

2. D'après le développement en série entière de exp,

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$

(le rayon de convergence étant infini, il est possible de choisir $z = e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et donc, en prenant la partie réelle,

$$\mathfrak{Re}[\exp(e^{ix})] = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!}.$$

Par ailleurs, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos x)\cdot\exp(i\sin x)$ donc

$$\mathfrak{Re}[\exp(e^{ix})] = \exp(\cos x)\cdot\cos(\sin x).$$

On en déduit l'expression de φ comme somme d'une série trigonométrique :

$$\exp(\cos x)\cdot\cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!}.$$

On peut choisir : $a_n = 1/n!$ et $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (mais pour le moment, rien ne prouve que ce choix est le seul possible).

REMARQUE.— Cette série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Prenons $a_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en prenant $x = 2k\pi$, on a

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n\cos nx = \frac{\cos(2kn\pi)}{n} = \frac{1}{n}$$

donc la série $\sum a_n\cos(nx)$ diverge (série harmonique).

Par conséquent, la série de fonctions $\sum a_n\cos nx$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE.— L'énoncé ne demande pas de trouver une série trigonométrique qui diverge pour *chaque* valeur de x, mais seulement une série qui diverge pour *au moins une* valeur de x !

4. On considère ici

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

Comme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et que} \quad \big|u_n(\pi/2)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

on a $\|u_n\|_\infty = 1/\sqrt{n}$. Comme la série $\sum \|u_n\|_\infty$ est divergente (Riemann), la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Questions de convergence normale

5. Pour cette question et les deux questions suivantes, on pose

$$u_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

❧ Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant |a_n| + |b_n|.$$

On a un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et comme les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument (par hypothèse), ce majorant est bien le terme général d'une série convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

6. Le résultat à établir est évident si $a = b = 0$.

❧ Supposons donc $(a, b) \neq (0, 0)$ et notons

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un angle $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\alpha, \beta) = (\cos\varphi, -\sin\varphi)$$

et d'après la formule d'addition pour le cosinus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).$$

❧ Il est alors clair que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

et comme, pour $x = -\varphi$,

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}$$

on en déduit que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

7. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $[x \mapsto y = nx]$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On déduit alors de la question précédente que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \max_{y\in\mathbb{R}} |a_n\cos y + b_n \sin y| = \sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on sait que

$$|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

(le théorème de Pythagore dit en particulier que les deux côtés de l'angle droit sont plus petits que l'hypothénuse).

Par conséquent : si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

☙ En résumé : la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ *si, et seulement si,* les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. (Cette caractérisation éclaire les résultats particuliers des **1.**, **3.** et **4.**)

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 nx = \frac{1+2\cos 2nx}{2}$$

donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \pi.$$

REMARQUE.— Cette intégrale est égale à 2π pour $n = 0$.

☙ Quels que soient les entiers k et n, la fonction

$$[x \mapsto \sin kx \cos nx]$$

est continue et impaire sur le segment $[-\pi, \pi]$, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \,dx = 0.$$

REMARQUE.— L'hypothèse $k \neq n$ ne sert à rien. Elle avait, j'imagine, pour seule raison d'être d'éviter aux esprits laborieux de diviser par zéro en calculant des primitives après avoir linéarisé l'intégrande...

REMARQUE.— Pour l'intégrale d'un produit de cosinus, il *faut* linéariser l'intégrande et discuter ensuite sur la pulsation $(k-n)$: elle est, ou non, nulle ?

9. a. On pose une fois encore :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

☙ Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'énoncé suppose ici que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la somme f de cette série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}$.

☙ Les fonctions u_n sont toutes 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{N} u_n(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$$

et comme la convergence normale d'une série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple de cette série de fonctions, on peut faire tendre N vers $+\infty$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique.

☙ Bref : $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

9. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)\cos nx = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\cos nx.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |u_k(x)\cos nx| \leqslant |u_k(x)| \leqslant \|u_k\|_\infty.$$

Comme l'énoncé suppose ici que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors la série numérique $\sum \|u_k\|_\infty$ converge et la majoration qu'on vient d'établir montre que la série de fonctions

$$\sum u_k(x)\cos nx$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

On peut donc calculer les coefficients de Fourier $\alpha_n(f)$ en intégrant terme à terme :

$$\begin{aligned}
\alpha_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx \\
&\qquad\qquad + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\cos nx\,dx\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos nx\,dx
\end{aligned}$$

d'après **8.**

On déduit encore de **8.** que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \alpha_n(f) = a_n \quad \text{et} \quad \alpha_0(f) = 2a_0.$$

10. a. Puisque, d'après l'énoncé, la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer ici les résultats établis au **9.a.** et à la question précédente avec les substitutions suivantes :

$$a_0 \leftarrow \frac{\alpha_0(f)}{2}, \quad a_n \leftarrow \alpha_n(f), \quad b_0 \leftarrow 0, \quad b_n \leftarrow \beta_n(f),$$
$$f \leftarrow g, \quad \alpha_n(f) \leftarrow \alpha_n(g), \quad \beta_n(f) \leftarrow \beta_n(g).$$

On en déduit d'une part que la fonction g appartient à $\mathscr{C}_{2\pi}$ et d'autre part les relations suivantes entre les coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} \alpha_0(g) &= 2 \cdot \frac{\alpha_0(f)}{2} = \alpha_0(f) \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \alpha_n(g) &= \alpha_n(f) \\ \beta_0(g) &= 0 = \beta_0(f) \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \beta_n(g) &= \beta_n(f). \end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n(g) = \alpha_n(f) \quad \text{et} \quad \beta_n(g) = \beta_n(f).$$

10. b. Comme les fonctions f et g appartiennent à l'espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}$, la fonction h définie par

$$h = f - g$$

appartient aussi à $\mathscr{C}_{2\pi}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n(h) = \alpha_n(f) - \alpha_n(g) = 0$$

et de même $\beta_n(h) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le lemme admis par l'énoncé, la fonction h est identiquement nulle, donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. c. *Exemple de synthèse* des résultats établis plus haut :

Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et si les deux séries $\sum \alpha_n(f)$ et $\sum \beta_n(f)$ convergent absolument, alors la série trigonométrique

$$\sum \big[\alpha_n(f) \cos nx + \beta_n(f) \sin nx\big]$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ (d'après **5.**) et de plus

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[\alpha_n(f) \cos nx + \beta_n(f) \sin nx\big]$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (d'après **10.b.**).

REMARQUE.— Il me paraît difficile de formuler une synthèse pertinente des résultats établis dans cette partie si on n'a pas déjà assez savant sur les séries de Fourier... (En revanche, si on a suivi un cours sur ce sujet, il est assez simple de retrouver le théorème qui vient d'être démontré ici !)