[99.] Les deux sous-espaces

$$V_+ = \operatorname{Ker}(u - I) \quad \text{et} \quad V_- = \operatorname{Ker}(u + I)$$

sont stables par u (de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ avec P polynôme) et en somme directe (car les polynômes $(X-1)$ et $(X+1)$ sont premiers entre eux), donc la somme $V_+ \oplus V_-$ est stable par u.

On sait que **[89.3]** *si un sous-espace est stable par* $u \in O(E)$, *alors son orthogonal est aussi stable par* u. Donc le sous-espace

$$F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$$

est stable par $u \in O(E)$.

[99.1.] Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$F^\perp = ((V_+ \oplus V_-)^\perp)^\perp = V_+ \oplus V_-.$$

Par **[8.4]**,

$$\begin{aligned} F &= G \overset{\perp}{\oplus} (F^\perp \oplus G)^\perp \\ &= G \overset{\perp}{\oplus} ((V_+ \oplus V_-) \oplus G)^\perp. \end{aligned}$$

[99.2.] Avec l'hypothèse faite au **[99.]**, le sous-espace

$$G = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k$$

est contenu dans F. Ce sous-espace est stable par u (en tant que somme de sous-espaces stables par u), donc les trois sous-espaces

$$V_+, \quad V_- \quad \text{et} \quad G$$

sont stables par u.

❧ Par hypothèse, $G \subset F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$, donc G et $V_+ \oplus V_-$ sont en somme directe orthogonale. Comme $u \in O(E)$, on sait que V_+ et V_- sont orthogonaux **[91.1]**.

❧ On en déduit que la somme

$$V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G$$

est un sous-espace stable par u. D'après **[89.3]**, le sous-espace

$$F_{k+1} = [V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G]^\perp$$

est aussi stable par u.

Comme

$$V_+ \oplus V_- \subset V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G,$$

on déduit de **[Chap17 - 33.5]** que

$$F_{k+1} = [V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G]^\perp \subset (V_+ \oplus V_-)^\perp = F.$$

Bref : F_{k+1} est un sous-espace de F qui est stable par u.

❧ D'après **[99.1]**, $F = G \overset{\perp}{\oplus} F_{k+1}$, avec

$$\dim G = 2k$$

(puisque G est somme directe de k plans) et

$$\dim F_{k+1} \geqslant 1$$

(puisque, par **[99.]**, $\dim F > 2k$).

Il existe donc un vecteur $y_{k+1} \neq 0_E$ dans F_{k+1}. Comme F_{k+1} est stable par u, on en déduit que

$$u(y_{k+1}) \in F_{k+1}.$$

D'après **[91.3]**, la famille $(y_{k+1}, u(y_{k+1}))$ est libre, donc

$$\dim F_{k+1} \geqslant 2$$

et finalement $\dim F \geqslant 2k+2$.

[99.3.] On sait que **[89.1]** *l'endomorphisme induit par restriction d'un automorphisme orthogonal à un sous-espace stable est encore un automorphisme orthogonal*. Par conséquent, $u_{k+1} \in O(F_{k+1})$.

Toute valeur propre (réelle) de u_{k+1} est aussi une valeur propre de u et les vecteurs propres associés à cette valeur propre appartiendraient à $F_{k+1} \subset F$.

Or les vecteurs propres de u appartiennent tous à V_+ ou à V_-, donc il n'y a aucun vecteur propre de u dans

$$(V_+ \oplus V_-)^\perp = F.$$

Par conséquent, le spectre (réel) de u_{k+1} est vide.

❧ L'endomorphisme u_{k+1} n'a pas de valeur propre réelle et il agit sur un espace F_{k+1} de dimension au moins égale à 2, donc il admet un polynôme minimal (non constant par définition) sans racine réelle.

D'après le Théorème de D'Alembert-Gauss (version $\mathbb{R}[X]$), ce polynôme minimal possède au moins un facteur μ_{k+1} irréductible, unitaire et de degré 2.

[99.4.] Le polynôme μ_{k+1} est un diviseur *non constant* du polynôme minimal de u_{k+1}, donc l'endomorphisme

$$\mu_{k+1}(u_{k+1})$$

n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur $x_{k+1} \neq 0_E$ dans

$$\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1}) \subset F_{k+1}.$$

(Par définition, u_{k+1} est un endomorphisme de F_{k+1}, donc

$$\mu_{k+1}(u_{k+1})$$

est aussi un endomorphisme de F_{k+1}.)

❧ Le sous-espace $\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1})$ est stable par u_{k+1} et donc par u (puisque u_{k+1} est induit par restriction de u).

On en déduit que le sous-espace

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est contenu dans $\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1}) \subset F_{k+1}$.

En particulier, par définition de F_{k+1},

$$P_{k+1} \subset F \quad \text{et} \quad P_{k+1} \perp G = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k.$$

❧ Comme P_{k+1} est engendré par deux vecteurs, il est clair que $\dim P_{k+1} \leqslant 2$.

Comme x_{k+1} est un vecteur *non nul* dans P_{k+1}, on sait déjà que $\dim P_{k+1} \geqslant 1$.

Si $\dim P_{k+1} \neq 2$, alors $\dim P_{k+1} = 1$, donc $P_{k+1} = \mathbb{R} \cdot x_{k+1}$ et

$$u(x_{k+1}) = u_{k+1}(x_{k+1}) \in \mathbb{R} \cdot x_{k+1}$$

et le vecteur x_{k+1} (*non nul !*) serait un vecteur propre de u.

Or **[99.3]** il n'y a pas de vecteur propre de u dans F. Donc le sous-espace P_{k+1} est bien un plan.

❧ D'autre part, il existe deux réels b et c tels que

$$\mu_{k+1} = X^2 + bX + c \quad \text{et} \quad b^2 - 4c < 0.$$

Comme $x_{k+1} \in \operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1})$,

$$\begin{aligned}(u_{k+1}^2 + bu_{k+1} + xI)(x_{k+1}) &= u^2(x_{k+1}) + bu(x_{k+1}) + cx_{k+1} \\ &= 0_E\end{aligned}$$

et donc

$$u[u(x_{k+1})] = -cx_{k+1} - bu(x_{k+1}) \in P_{k+1},$$

donc le plan

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est bien stable par u.

Conclusion.

On vient en fait de procéder à une démonstration par récurrence sur la dimension du sous-espace F : pour $k \in \mathbb{N}$, tant que $\dim F > 2k$, il existe $k+1$ plans deux à deux orthogonaux, contenus dans F et stables par u et comme

$$P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k \overset{\perp}{\oplus} P_{k+1} \subset F,$$

alors en particulier $\dim F \geqslant 2k+2$.

Comme F est un espace de dimension *finie*, la propriété

$$[\dim F > 2k]$$

ne peut pas être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il existe donc un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\dim F = 2d$$

et d plans deux à deux orthogonaux, contenus dans F et stables par u tels que

$$F = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_d.$$