Calcul différentiel [58.3]

❧ Les applications

$$[(x,y) \mapsto x], \qquad \big[(x,y) \mapsto x^2+y^2\big] \quad \text{et} \quad \big[(x,y) \mapsto x^2-y^2\big]$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonctions *polynomiales*.

En tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} & \to & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 & \mapsto & \ell n(x^2+y^2) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

En tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

L'énoncé définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier : est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ou seulement sur U ?

❧ Pour $M = (x,y) \neq O$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \ell n(x^2+y^2)\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 2y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \ell n(x^2+y^2)\right].$$

Pour $M = O$, on a

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = h\,\ell n\,h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = -h\,\ell n\,h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

❧ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique (autrement dit : on passe en coordonnées polaires). De la sorte, le point M tend vers l'origine O si, et seulement si, le réel $r = \|\mathbf{OM}\|$ tend vers 0.

D'après les expressions des dérivées partielles de f calculées plus haut,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(O)\right| &= 2r|\cos\theta|\,|2\,\ell n\,r + \cos 2\theta| \\ &\leqslant 2r + 4r|\ell n\,r|\end{aligned}$$

et de même

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(O)\right| \leqslant 2r + 4r|\ell n\,r|.$$

On a trouvé un majorant *indépendant de* θ et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0, donc on a démontré que les deux dérivées partielles de f étaient continues en O.

Ainsi, les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, donc la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier (théorème fondamental).

REMARQUE.— Si on sait appliquer la règle de la chaîne (ce qui est un objectif essentiel...), on peut ne calculer qu'une seule des deux dérivées partielles de f.

Pour exploiter la forme de symétrie de f, on considère l'application linéaire φ définie par

$$\varphi(x,y) = \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = (y,x).$$

On sait alors que

$$\partial_2\varphi_1(x,y) = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \qquad \partial_2\varphi_2(x,y) = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

et que

$$\forall\,(x,y)\in U, \quad f(x,y) = -(f\circ\varphi)(x,y).$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U (démontré plus haut) et que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U dans U (en tant qu'application linéaire injective définie sur un espace de dimension finie), on en déduit que la composée $f\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et que, pour tout $M=(x,y)\in U$,

$$\begin{aligned}\partial_2 f(M) &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_1(M) - \partial_2 f\big(\varphi(M)\big)\partial_2\varphi_2(M)\\ &= -\partial_1 f\big(\varphi(M)\big)\end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec les notations habituelles (Leibniz)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$