Espaces euclidiens

1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ et

$$O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}.$$

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.a. L'application

$$\varphi = [(X, Y) \mapsto {}^tX({}^tAA)Y]$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.b. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E , orthonormée pour φ , telle que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ appartienne à T_n^+ .

2.c. Il existe une matrice $T \in T_n^+$ telle que

$${}^tAA = {}^tTT.$$

3. Il existe un, et un seul, couple $(O, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que

$$A = OT.$$

*

1. Tout d'abord, toute matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$ vérifie

$${}^tA.A = A.{}^tA = I_n$$

donc elle est inversible, d'inverse $A^{-1} = {}^tA$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{R})$.

Si les matrices A et B sont orthogonales, alors

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = I_n$$

donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$, donc la multiplication matricielle est une loi de composition interne sur $O_n(\mathbb{R})$.

Comme ${}^tI_n I_n = I_n$, l'élément neutre I_n de $GL_n(\mathbb{R})$ appartient bien à $O_n(\mathbb{R})$.

Enfin, si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a vu que A admettait tA pour inverse et comme

$${}^t({}^tA)({}^tA) = A{}^tA = I_n,$$

son inverse appartient aussi à $O_n(\mathbb{R})$.

On a démontré que $O_n(\mathbb{R})$ était un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, donc les valeurs propres de $A \in T_n^+$ sont des réels strictement positifs. En particulier, $0 \notin \text{Sp}(A)$ et la matrice A est inversible, donc $T_n^+ \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Si les matrices A et B appartiennent à T_n^+ , alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

donc

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \in T_n^+$$

(puisque un produit de réels strictement positifs est encore un réel strictement positif). La multiplication matricielle est donc bien une loi de composition interne sur T_n^+ .

Il est clair que $I_n \in T_n^+$.

Enfin, si $A \in T_n^+$, alors (en conservant les notations précédentes)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \in T_n^+$$

puisque l'inverse d'un réel strictement positif est encore un réel strictement positif.

On a démontré que T_n^+ était un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

• On a déjà vérifié que $I_n \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+$.

Considérons $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+$. Avec les notations précédentes,

$$\text{Sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

(ce qui ne doit pas faire croire que les a_{kk} soient deux à deux distincts!) et comme $A \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}.$$

Par conséquent,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad a_{kk} = 1.$$

Si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, chaque colonne est un vecteur unitaire et par conséquent, les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont tous nuls. Donc $A = I_n$ et finalement

$$O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}.$$

2.a. Quels que soient les matrices colonnes X et Y dans E , le produit matriciel

$${}^tX({}^tAA)Y$$

est bien défini et appartient à $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, qu'on peut identifier à $\mathbb{R}$. De ce point de vue, φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

D'après les règles du calcul matriciel, l'application φ est bilinéaire.

Il est clair que $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ et donc que

$$\forall X, Y \in E, \quad \varphi(Y, X) = {}^tY({}^tAA)X \quad (\text{définition})$$

$$= {}^t[{}^tY({}^tAA)X] \quad (\text{symétrie})$$

$$= {}^tX({}^tAA)Y = \varphi(X, Y)$$

puisque la matrice tAA est évidemment symétrique.

Il reste alors à vérifier que φ , forme bilinéaire symétrique sur E , est définie positive.

Pour tout $X \in E$,

$$\varphi(X, X) = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, $AX = 0$ (la norme sépare les points), c'est-à-dire $X = 0$ (puisque A est supposée inversible).

On a démontré que φ était bien un produit scalaire sur E .

2.b. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de E , on obtient une base $\mathcal{B}$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ et la matrice de passage est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux qui sont tous strictement positifs.

REMARQUE.— Quels que soient $1 \leq i, j \leq n$,

$$\varphi(E_i, E_j) = {}^tE_i({}^tAA)E_j = ({}^tAA)_{ij}$$

donc

$$(\varphi(E_i, E_j))_{1 \leq i, j \leq n} = {}^t A A.$$

La base canonique est donc une base orthonormée pour φ si, et seulement si, la matrice A est orthogonale.

2.c. Soient X, Y dans E . Par définition de la base canonique,

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(X) = X, \quad \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(Y).$$

D'après la formule du changement de base,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(X) = P^{-1}X, \quad \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(Y) = P^{-1}Y.$$

Comme la base $\mathcal{B}$ est une base orthonormée pour φ ,

$$\varphi(X, Y) = {}^t(P^{-1}X)(P^{-1}Y) = {}^tX({}^tP^{-1}P^{-1})Y.$$

Comme $P \in T_n^+$, on sait [1.] que $T = P^{-1} \in T_n^+$ et la relation précédente, qui est vraie quelles que soient les matrices colonnes X et Y , montre que

$${}^t A A = {}^t T T.$$

3. Considérons la matrice $T \in T_n^+$ définie à la question précédente et posons

$$O = AT^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Par définition de T ,

$${}^t O O = {}^t T^{-1}({}^t A A)T^{-1} = {}^t T^{-1}{}^t T T T^{-1} = I_n$$

donc $O \in O_n(\mathbb{R})$ et, par construction, $A = OT$.

Supposons enfin qu'il existe deux matrices orthogonales O_1 et O_2 , ainsi que deux matrices T_1 et T_2 dans T_n^+ telles que

$$A = O_1 T_1 = O_2 T_2.$$

On déduit des deux structures de groupes du [1.] que

$$O_n(\mathbb{R}) \ni O_2^{-1} O_1 = T_2 T_1^{-1} \in T_n^+,$$

donc que

$$O_2^{-1} O_1 = T_2 T_1^{-1} = I_n$$

et enfin que

$$O_1 = O_2 \quad \text{et} \quad T_1 = T_2,$$

ce qui prouve l'unicité de la factorisation de A .

REMARQUE.— Cette factorisation des matrices inversibles généralise la décomposition (unique) $z = |z| e^{i\theta}$ des complexes non nuls où $|z| > 0$ et $e^{i\theta}$ est unitaire.

Source : oral CCINP 2019 (E. Best)