Équations différentielles [69.2]

Le calcul du wronskien demande d'écrire l'équation différentielle sous forme résoluble du premier ordre. Ce sera l'occasion d'appliquer la théorie de Cauchy-Lipschitz pour prévoir *le résultat des calculs ultérieurs.*

*Pour résoudre l'équation, on peut commencer par chercher une solution polynomiale (on détermine d'abord le degré, puis les coefficients) et compléter la résolution au moyen des techniques usuelles. On pourra comparer à cette occasion les méthodes **[66.2]** et **[67.2]**.*

Variante : on peut aussi chercher les solutions sous forme de sommes de séries entières. C'est possible (au vu des solutions fournies par l'énoncé), mais très peu pratique.

⋆

► L'équation étudiée équivaut à l'équation résoluble du premier ordre

$$\forall\, t \in I = \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \tag{R}$$

en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une équation homogène dont les coefficients (= les quatre coefficients de $A(t)$) sont des fonctions continues de $t \in \mathbb{R}$. L'inconnue X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension 2.

▷ L'ensemble S_R des solutions de (R) est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et l'ensemble Σ_H des solutions de

$$(1+t^2)x''(t) - 2tx'(t) - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} = 0 \tag{H}$$

est un sous-espace de dimension 2 de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (La deuxième composante de $X(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et comme elle est égale à $x'(t)$, on en déduit que $x(t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$.)

▷ D'après le cours **[65.2]**, le wronskien de l'équation est proportionnel à

$$\exp \int^t \operatorname{tr} A(s)\, ds = \exp \int^t \frac{2s}{1+s^2}\, ds = \exp \ln(1+t^2) = (1+t^2).$$

Remarque.— Pour la suite, la forme résoluble de l'équation ne nous sera d'aucune utilité.

► Comme le facteur $(1+t^2)$ ne s'annule jamais, l'équation étudiée est équivalente à

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (1+2t^2+t^4)x''(t) - (2t+2t^3)x'(t) + (2t^2-2)x(t) = 0.$$

Remarque.— *Sous cette forme, tous les coefficients sont des polynômes en* t*, ce qui va nous permettre de chercher les solutions sous forme polynomiale ou comme sommes de séries entières.*

Cherchons pour le moment une solution polynomiale de degré d. Comme il s'agit d'une équation linéaire et homogène, $x(t)$ est une solution si, et seulement si, $\lambda \cdot x(t)$ est solution et on peut donc se borner à chercher une solution polynomiale *unitaire* de degré d.

$$x(t) = t^d + \cdots \qquad x'(t) = dt^{d-1} + \cdots \qquad x''(t) = d(d-1)t^{d-2} + \cdots$$

L'équation fait apparaître trois termes polynomiaux, dont le coefficient dominant est évident.

$$\begin{aligned} (2t^2-2)x(t) &= 2t^{d+2} + \cdots \\ -(2t+2t^3)x'(t) &= -2dt^{d+2} + \cdots \\ (1+t^2)^2x''(t) &= d(d-1)t^{d+2} + \cdots \end{aligned}$$

En sommant ces trois termes, on obtient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (d-2)(d-1)t^{d+2} + \cdots = 0.$$

Il faut donc en particulier que le coefficient de t^{d+2} soit nul, donc $d = 1$ ou $d = 2$.

▷ Si $x(t) = t + a$ (pour $d = 1$), l'équation nous donne

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 2at^2 - 4t - 2a = 0$$

ce qui est impossible (à cause du terme de degré 1).

▷ Si $x(t) = t^2 + at + b$ (pour $d = 2$), l'équation nous donne cette fois

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 2(b-1)t^2 - 4at + 2(1-b) = 0$$

ce qui est possible pour $a = 0$ et $b = 1$.

▷ Conclusion intermédiaire (toujours en tenant compte du fait qu'on résout ici une équation linéaire et homogène) : les solutions polynomiales sont les fonctions proportionnelles à $\left[t \mapsto 1 + t^2\right]$.

► On a vu en cours **[66, 67]** que la connaissance d'une solution de l'équation homogène (ici : $K \cdot (1 + t^2)$) permettait en théorie de trouver la solution générale.

▷ **En faisant varier la constante [67.2]**

On cherche une solution sous la forme $x(t) = K(t) \cdot (1 + t^2)$. On a donc

$$x'(t) = K'(t) \cdot (1 + t^2) + \cdots \qquad \text{et} \qquad x''(t) = K''(t) \cdot (1 + t^2) + 4K'(t) \cdot t + \cdots$$

(les quantités mentionnées vont nécessairement disparaître lors de la substitution dans l'équation, je peux donc me permettre de ne pas les écrire) et donc

$$(1 + t^2)K''(t) + 2tK'(t) = 0$$

(après quelques simplifications).

On reconnaît une équation du *premier* ordre d'inconnue $L(t) = K'(t)$, qu'on peut résoudre sans difficulté : $L(t) \propto \frac{1}{1+t^2}$, puis $K(t) \propto \operatorname{Arctan} t$ et enfin $x(t) \propto (1 + t^2) \operatorname{Arctan} t$.

Conclusion finale : Comme Σ_H est un plan vectoriel, on en déduit que $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de (H) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = K_1 \cdot (1 + t^2) + K_2 \cdot (1 + t^2) \operatorname{Arctan} t.$$

▷ **Avec le wronskien [66.2]**

Il existe une solution de la forme $K(t) \cdot (1 + t^2)$ avec

$$K'(t) = \frac{W_0(t)}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{1 + t^2}$$

c'est-à-dire avec $K(t) = \operatorname{Arctan} t$.

On conclut comme plus haut.

REMARQUE.— En théorie, les méthodes **[66.2]** et **[67.2]** sont équivalentes : ce sont les mêmes calculs ! En pratique, la méthode **[66.2]** qui exprime $K'(t)$ en fonction du wronskien donne parfois de très bonnes surprises (c'est le cas ici, mais ce n'est pas toujours vrai).

► Nous allons maintenant chercher les solutions de (H) comme somme d'une série entière. On suppose donc qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ tels que

$$\forall\, t \in \left]-R, R\right[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $R > 0$, la fonction x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme autant de fois que nécessaire.

$$\forall\, t \in \left]-R, R\right[, \qquad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \qquad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

▷ On agit alors avec calme et méthode, en écrivant petit et lisiblement à partir du haut d'une grande feuille...

$$\begin{aligned}
(1 + t^2)^2 x''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=4}^{+\infty} (n-2)(n-3) a_{n-2} t^{n-2} \\
-2t(1 + t^2)x'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -2n a_n t^n + \sum_{n=3}^{+\infty} -2(n-2) a_{n-2} t^n \\
2(t^2 - 1)x(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} -2a_n t^n
\end{aligned}$$

On voit alors qu'il faut traiter à part les termes dont le degré est compris entre 0 et 3...

▷ L'équation devient alors : $\forall\, t \in]-R, R[$,

$$2(a_2 - a_0) + 2(3a_3 - 2a_1)t + 2(6a_4 - a_2 + a_0)t^2 + 4(5a_5 + a_3)t^3 \\ + \sum_{n=4}^{+\infty} \big[(n+1)(n+2)a_{n+2} + 2[(n-1)^2 - 2]a_n + (n-4)(n-3)a_{n-2}\big]\, t^n = 0.$$

Comme $R > 0$, par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$a_2 = a_0, \qquad 3a_3 = 2a_1, \qquad 6a_4 = a_2 - a_0, \qquad 5a_5 + a_3 = 0$$

et aussi

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} + 2[(n-1)^2 - 2]a_n + (n-4)(n-3)a_{n-2} = 0. \tag{$\star$}$$

▷ La relation de récurrence sépare les coefficients en deux sous-suites : la suite des coefficients d'indice pair et la suite des coefficients d'indice impair.

Concernant les indices pairs, on peut choisir a_0 de manière arbitraire. Ensuite, on a nécessairement $a_2 = a_0$, puis $a_4 = a_2 - a_0 = 0$ et $a_6 = 0$ puisque (relation ($\star$) pour $n = 4$)

$$30a_6 + 14a_4 + 0 \cdot a_2 = 0.$$

Concernant les indices impairs, on peut choisir a_1 de manière arbitraire. Ensuite, on doit avoir $a_3 = {}^{2a_1}/_3$ et les autres coefficients d'indice impair se déduisent de la relation de récurrence ($\star$).

Conclusion (partielle) : la fonction analytique $x(t)$ est une solution de (H) si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et a_1 telles que

$$x(t) = a_0 \cdot (1 + t^2) + a_1 \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} (\cdots) \cdot t^{2p+1}.$$

▷ Avec $(a_0, a_1) = (1, 0)$, on retrouve la solution polynomiale (au prix d'un calcul bien plus difficile que celui qu'on a fait plus haut).

Avec $(a_0, a_1) = (0, 1)$, on retrouve $(1 + t^2) \operatorname{Arctan} t$ et $R = 1$ — *à condition de déjà connaître le résultat !*

En effet, je ne vois pas de méthode simple pour déduire que $R > 0$ de la relation de récurrence ($\star$), ni de moyen de déduire les a_{2p+1} de cette relation...

En revanche, il n'est pas très difficile de calculer le DSE de $(1 + t^2) \operatorname{Arctan} t$:

$$\forall\, t \in]-1, 1[, \quad (1 + t^2) \operatorname{Arctan} t = (1 + t^2) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} t^{2p+1} = t + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^p}{4p^2 - 1}\, t^{2p+1}$$

et on peut vérifier sans difficulté que ces coefficients vérifient la relation ($\star$).