Calcul différentiel III

▶ Applications continues

▷ Les applications continues $f : X \to F$ sont définies au **[ch22.IV]**.

❧ Comme cette définition est la généralisation évidente de la continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut admettre que :

1. si $f : X \to F$ est continue, si $g : Y \to G$ est continue et si $f_*(X) \subset Y$, alors la **composée** $g \circ f : X \to G$ est continue (*Théorème de composition des limites*) ;
2. une **combinaison linéaire** d'applications continues sur X est encore continue sur X ;
3. un **produit** d'applications continues sur X est encore continu sur X.

Comme d'habitude, par **produit**, on entend une expression $\varphi(f, g)$ où $f : X \to F_1$ et $g : X \to F_2$ sont deux applications à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi : F_1 \times F_2 \to G$ est une application bilinéaire.

▷ **Exemples de référence**

❧ Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on sait que toute application linéaire de E dans F est continue, quelles que soient les normes choisies sur E et F.

(Résultat admis au **[ch20.6]** et établi au **[ch23.36]**)

❧ En pratique, si $E = \mathbb{R}^n$, les **applications coordonnées**

$$e_k^* = [x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_k]$$

sont continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (puisqu'elles sont linéaires).

Plus généralement, les **formes linéaires**

$$[x \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n]$$

sont continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (puisqu'elles sont linéaires ou en tant que combinaison linéaire des applications coordonnées – comme on préfère).

❧ En tant que produit d'applications continues, les monômes

$$\left[x \mapsto x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}\right]$$

sont également des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire, les **polynômes**

$$\left[x \mapsto \sum_{(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{N}^n} a_{d_1,d_2,\dots,d_n} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}\right]$$

(où, bien entendu, les $a_{d_1,\dots,d_n}$ non nuls sont en *nombre fini*) sont aussi des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Considérons maintenant deux applications polynomiales f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $U = [g(x_1, \dots, x_n) \neq 0]$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par la fonction continue g, cf **[ch22.60]**).

Sur l'ouvert U, la fonction f est continue (en tant que restriction d'une fonction continue). Par composition de fonctions continues :

$$\begin{array}{ccccc} U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & \frac{1}{g(x)} \end{array}$$

la fonction $^1/_g$ est continue et par produit, la **fonction rationnelle** $^f/_g = f \times {}^1/_g$ est continue de U dans $\mathbb{R}$.

▶ Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Ici encore, tous les espaces vectoriels considérés sont des *espaces de dimension finie*.

▷ Pour une application linéaire $f : E \to F$, on sait que f est différentiable et que sa différentielle est continue, puisqu'elle est constante : $df(M_0) = f$ pour tout $M_0 \in E$ **[15]**. Par définition **[54]**, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

❧ On peut aussi utiliser le Théorème fondamental **[56]** pour démontrer qu'une application linéaire est de classe $\mathscr{C}^1$.

Ayant choisi une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F, l'application f est représentée par sa matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et peut donc être considérée comme une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Chaque *ligne* de la matrice A représente une composante de f :

$$f(x) = \big(f^1(x), \dots, f^n(x)\big)$$

et chacune de ces composantes est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$:

$$f^j(x) = f^j(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^p, \quad \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x) = a_{i,j}.$$

Les np dérivées partielles de f sont donc des applications constantes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Ce sont donc des applications continues et d'après **[56]**, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

▷ Considérons maintenant une application polynomiale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{(i_1, \dots, i_d)} a_{i_1, \dots, i_d} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}.$$

(Je rappelle encore qu'il n'y a qu'un *nombre fini* de termes dans cette somme.)

Il est clair que cette fonction admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables et clair aussi que les d dérivées partielles de f sont également polynomiales :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_d)} i_k a_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_d} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k - 1} \cdots x_d^{i_d}.$$

Comme les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^d$, on déduit du Théorème fondamental **[56]** que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

▷ Considérons enfin une fonction rationnelle

$$h = \left[x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{g(x_1, \dots, x_d)}\right]$$

définie sur l'ouvert $U = [g(x) \neq 0]$, à valeurs réelles. **NB :** je rappelle aux étourdis que, *par définition*, une fonction rationnelle est un quotient de deux applications polynomiales.

Il est clair que les dérivées partielles de h sont également des fonctions rationnelles définies sur l'ouvert U :

$$\partial h x_k(x) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(x)}{[g(x)]^2}.$$

Par conséquent, les dérivées partielles de h sont continues sur U et d'après le Théorème fondamental **[56]**, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U

► **Remarque finale**

❧ Ces petits raisonnements sont fondamentaux, car ils servent de modèle pour démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ (ou de classe $\mathscr{C}^2$, ou de classe $\mathscr{C}^\infty$...).

Dans les exemples **[58.2,3,7]**, c'est en raisonnant ainsi qu'on prouve (sans aucun calcul) que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

De même au **[58.6]**, on montre de cette manière que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $[x \neq 0] \subset \mathbb{R}^2$.

❧ En revanche, ces raisonnements ne peuvent pas s'appliquer pour démontrer qu'une fonction *définie par morceaux* est de classe $\mathscr{C}^1$.

Dans les exemples **[58.2,3,7]**, la fonction f est définie en deux morceaux : le cas général ($\mathbb{R}^2$ privé de l'origine) et un point spécial (l'origine).

❧ Pour étudier ces exemples, la marche à suivre est la suivante :

1. on a vu plus haut comment démontrer *sans aucun calcul* que les dérivées partielles de f sont définies et continues sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. on calcule maintenantl'expression des dérivées partielles sur U (en appliquant les règles de calcul usuelles) ;

3. on calcule (si c'est possible !) les dérivées partielles à l'origine en revenant à la définition des dérivées partielles, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$$

4. si les dérivées partielles sont effectivement définies sur $\mathbb{R}^2$, il reste à vérifier qu'elles sont bien continues à l'origine, c'est-à-dire

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Comme on le voit, on va passer beaucoup plus de temps et d'énergie pour étudier la régularité de f au voisinage de l'origine que sur l'ouvert U tout entier !

En particulier, le dernier point est techniquement délicat, car on étudie la continuité en fonction de la variable (x,y) (et non pas la continuité par rapport à x et y considérés séparément). Exercices corrigés à suivre...