Calcul différentiel [67]

On généralise ici le Théorème fondamental aux fonctions de plusieurs variables et on utilise ce théorème pour caractériser les fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Pour cela, on considère une fonction f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'ouvert* U *et une fonction* γ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *de l'intervalle* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *dans l'ouvert* U.

Lors de l'étude du ***[II]****, on reviendra en détail sur la signification et les propriétés d'une telle fonction* γ*. Pour le moment, il suffit de comprendre que* γ *définit une* ***courbe*** *tracée dans l'ouvert* U.

En effet, pour tout $t \in [0,1]$*, le vecteur* $\gamma(t) \in F$ *est en fait un point de* U *et comme cette fonction* γ *ne dépend que d'une variable réelle* $t \in [0,1]$*, on peut interpréter la variable* t *comme le* ***temps*** *et la fonction* γ *comme la* trajectoire *d'un point matériel qui se déplace dans* U *avec la* ***vitesse*** *(instantanée)* $\gamma'(t) \in F$.

⋆

► Tout d'abord, la fonction

$$(f \circ \gamma) : [0,1] \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{f} F$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

De plus,

$$\forall\, t_0 \in [0,1], \quad d(f \circ \gamma)(t_0) = df[\gamma(t_0)] \circ d\gamma(t_0).$$

Avant d'évaluer cette formule, il faut déjà la décortiquer :

$$d(f \circ \gamma)(t_0) : \mathbb{R} \xrightarrow{d\gamma(t_0)} E \xrightarrow{df[\gamma(t_0)]} F$$

et $d(f \circ \gamma)(t_0) \in L(\mathbb{R}, F)$.

▷ Comme γ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ *d'une seule variable réelle*, elle est aussi dérivable. Pour relier la dérivée $\gamma' : [0,1] \to E$ à l'application linéaire tangente $d\gamma(t_0) : \mathbb{R} \to E$, il faut revenir au développement limité :

$$\begin{aligned} \gamma(t_0 + h) &= \gamma(t_0) + h \cdot \gamma'(t_0) + o(h) \\ &= \gamma(t_0) + d\gamma(t_0)(h) + o(h). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\forall\, t_0 \in [0,1], \quad d\gamma(t_0) = [h \mapsto h \cdot \gamma'(t_0)] \in L(\mathbb{R}, E)$$

et par conséquent

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad d(f \circ \gamma)(t_0)(h) = df[\gamma(t_0)]\big[h \cdot \gamma'(t_0)\big] = h \cdot \underbrace{\underbrace{df[\gamma(t_0)]}_{\in L(E,F)}\,\underbrace{[\gamma'(t_0)]}_{\in E}}_{\in F}$$

▷ Il est temps de remarquer que $(f \circ \gamma)$ est, tout comme γ, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ *d'une seule variable réelle* et donc qu'elle est dérivable !

L'analyse que nous avons faite pour γ s'applique de la même manière, donc

$$\forall\, t_0 \in [0,1], \quad d(f \circ \gamma)(t_0) = [h \mapsto h \cdot (f \circ \gamma)'(t_0)]$$

et d'après le calcul précédent

$$\forall\, t_0 \in [0,1], \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = df[\gamma(t_0)][\gamma'(t_0)] \in F.$$

► (Parenthèse) Pas facile de ne pas se tromper, hein ?

▷ En fait, en pareil cas, il est *beaucoup plus simple* de revenir à la définition (le développement limité à l'ordre 1) que d'appliquer le Théorème de différentiation des fonctions composées **[66.2]**.

▷ On sait en effet que, pour $h \to 0_{\mathbb{R}}$,

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h \cdot \big[\gamma'(t_0) + o(1)\big]$$

et que, pour $\mathbf{u} \to 0_E$,

$$f(M_0 + \mathbf{u}) = f(M_0) + df(M_0)(\mathbf{u}) + o(\mathbf{u}).$$

On choisit alors $M_0 = \gamma(t_0) \in U$ et $\mathbf{u} = \gamma'(t_0) + o(1)$, on substitue le premier développement limité dans le second, on analyse soigneusement chaque terme et on arrive *très facilement* à la conclusion suivante :

$$(f \circ \gamma)(t_0 + h) = (f \circ \gamma)(t_0) + h \cdot \, df[\gamma(t_0)][\gamma'(t_0)] + o(h)$$

d'où l'on tire sans effort supplémentaire l'expression de $(f \circ \gamma)'(t_0)$.

▷ Mon boulot consiste d'une part à vous donner des techniques de calcul efficaces et d'autre part à vous permettre, par une étude théorique approfondie, de prendre du recul sur les techniques élémentaires pour mieux les comprendre.

Donc je vous colle les deux méthodes dans les pattes. (Fin de la parenthèse)

► **[67.1]** Retour à l'exerice : la fonction $f \circ \gamma$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

▷ On choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (indépendante du temps) de l'espace F. On peut alors définir les **composantes** de f relatives à cette base :

$$\forall\, M_0 \in U, \quad f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i(M_0) \cdot e_i \quad \in F$$

qui déterminent les composantes de $f \circ \gamma$ relatives à cette même base :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad (f \circ \gamma)(t) = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \gamma)(t_0) \cdot e_i \quad \in F.$$

On sait alors (**[ch25 - 28]** qui généralise **[4.2]**) que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \; \forall\, t \in [0, 1], \quad (f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \gamma)'(t_0) \cdot e_i \quad \in F.$$

En appliquant le Théorème fondamental aux applications $f_i \; : \; [0, 1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad (f_i \circ \gamma)(1) - (f_i \circ \gamma)(0) = \int_0^1 (f_i \circ \gamma)'(t)\, dt \quad \in \mathbb{R}$$

et donc finalement (en revenant aux vecteurs) :

$$(f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\, dt = \int_0^1 \, df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)\, dt \quad \in F.$$

► **[67.2]** On établit l'équivalence par double implication.

▷ Si la fonction f est constante sur U, alors $df(M_0) = \omega_{E,F}$ pour tout $M_0 \in U$ d'après **[14]**. La géométrie de l'ouvert U n'est pour rien dans ce résultat.

▷ Réciproquement, on suppose que $df(M_0) = \omega_{E,F}$ pour tout $M_0 \in U$ et que U est convexe. Quels que soient a et b dans U, on sait que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad (1 - t) \cdot a + t \cdot b \in U.$$

On pose donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = a + t \cdot (b - a).$$

En tant que fonction polynomiale, la fonction γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = b - a \in E.$$

(La cinématique pour mieux comprendre : la convexité de U nous permet de passer d'un point a de U à n'importe quel autre point b de U avec un mouvement rectiligne uniforme.)

On déduit alors de **[67.1]** que

$$f(b) - f(a) = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = \int_0^1 \underbrace{\underbrace{df[\gamma(t)]}_{\omega_{E,F}} \; \underbrace{[\gamma'(t)]}_{=b-a \in E}}_{0_F} \; dt = \int_0^1 0_F \, dt = 0_F$$

et donc que f est constante sur U :

$$\forall\, a, b \in U, \quad f(a) = f(b) \in F.$$