Calcul différentiel [58.3]

La relation d'antisymétrie $f(x,y) = -f(y,x)$ *se traduit par une relation analogue entre les dérivées. Cette relation se démontre bien sûr au moyen de la règle de la chaîne*

$$\underbrace{d(f\circ\varphi)(M_0)}_{\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \underbrace{df\big[\varphi(M_0)\big]}_{\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \circ \underbrace{d\varphi(M_0)}_{\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)}$$

mais il est ici particulièrement facile de s'embrouiller dans les notations.

Dans le premier corrigé mis en ligne, j'ai appliqué la version algébrique de la règle de la chaîne

$$\partial_i(f\circ\varphi)(M_0) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f\big[\varphi(M_0)\big]\partial_i\varphi_j(M_0)$$

qui est en fait la formule du produit matriciel appliquée à la matrice jacobienne de f *calculée au point* $\varphi(M_0)$

$$\operatorname{Jac} f\big[\varphi(M_0)\big] = \begin{pmatrix}\partial_1 f\big[\varphi(M_0)\big] & \partial_2 f\big[\varphi(M_0)\big]\end{pmatrix}$$

et à la matrice jacobienne de φ *calculée au point* M_0

$$\operatorname{Jac}\varphi(M_0) = \begin{pmatrix}\partial_1\varphi_1(M_0) & \partial_2\varphi_1(M_0)\\ \partial_1\varphi_2(M_0) & \partial_2\varphi_2(M_0)\end{pmatrix}.$$

Parfaite pour les logiciels de calcul formel, indigeste pour les pauvres humains !

Je vais maintenant appliquer la règle de la chaîne avec les notations traditionnelles (Leibniz) en changeant quelques notations pour que les choses soient plus claires.

$\star$

► Par définition, f est une fonction de x et y et on constate que

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Réécrivons cette identité sous la forme

$$f(x,y) = g\circ\varphi(x,y)$$

avec

$$\varphi(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (y,x) \qquad \text{et} \qquad g(u,v) = -f(u,v).$$

Tout est là !

La règle de la chaîne sert avant tout à changer de variables. Comment imaginez-vous appliquer une formule de changement de variables si vos notations ne font pas clairement la distinction entre les anciennes variables (x *et* y*) et les nouvelles variables (*u *et* v*) ?*

▷ En appliquant la règle (2) du polycopié,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Or, par définition de u et v en tant que fonctions de x et y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}$$

ce qu'on peut interpréter rigoureusement grâce à (2b) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,y)\big) = \frac{\partial g}{\partial u}(y,x).$$

▷ D'autre part, la relation $g(u,v) = -f(u,v)$ (qui est pour nous la définition de la fonction g) nous dit que la première dérivée partielle de g est l'opposée de la première dérivée partielle de f.

La relation précédente s'écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

► Une dernière précaution !

Il faut clairement distinguer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)] \qquad \text{de} \qquad \frac{\partial f(y,x)}{\partial x}.$$

▷ Dans la première expression, on dérive f par rapport à la première variable avant d'évaluer la dérivée partielle au point de coordonnées (y,x).

▷ Dans la seconde, on dérive $f(y,x)$ par rapport à x, c'est-à-dire par rapport à la seconde coordonnée de f. Autrement dit, dans ce cas, on dérive la composée $(f \circ \varphi)$ par rapport à la première variable.