Calcul différentiel [58.2]

Exercice archi-classique pour étudier la régularité d'une fonction de deux variables.

⋆

► La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

► Pour étudier la régularité au point O, la méthode est connue :
- calculer l'expression générale des dérivées partielles sur U ;
- calculer les valeurs particulières des dérivées partielles (**SI** *elles existent !*) au point O ;
- vérifier si les dérivées partielles sont bien continues au point O, c'est-à-dire

$$\lim_{M \to O} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) \quad \text{et} \quad \lim_{M \to O} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(O).$$

La fonction f est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, toutes ces conditions sont remplies.

▷ En un point $M = (x, y) \neq O$, les règles de dérivation bien connues donnent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{2x^3y(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{x^4(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(NB : La théorie nous assurait que ces fonctions étaient continues sur U *avant même* de poser les calculs.)

▷ Pour les dérivées partielles au point O, on revient à la définition. Comme

$$\forall\, x \neq 0, \quad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, y \neq 0, \quad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{0-y} = 0$$

il est clair que les dérivées partielles existent et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = 0.$$

▷ Pour étudier la continuité de manière efficace, nous allons munir $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique.

Rappelons avant d'aller plus loin que

$$|x| \leqslant r, \qquad |y| \leqslant r, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes **[ch.23]** et cette norme simplifie considérablement l'expression des dénominateurs, ce qui en fait tout l'intérêt.

On note $M = (x, y)$. On a donc $r^2 = \|\mathbf{OM}\|^2$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(O)\right| = \frac{2|xy|\,(x^4+2x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 6r^2,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(O)\right| = \frac{x^4|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 2r^2.$$

Lorsque le point M tend vers l'origine O, la distance $r = \|\mathbf{OM}\|$ tend vers 0 et, par Théorème d'encadrement, on déduit des relations précédentes que

$$\lim_{M \to O} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(O) \quad \text{et que} \quad \lim_{M \to O} \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(O).$$

▷ *Game completed!* La fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

► La même méthode permet de démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

▷ Il s'agit de vérifier que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, qui sont pour l'instant des fonctions *continues* sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U, sont en fait des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

▷ Tout d'abord, les **quatre** dérivées partielles secondes sont bien définies au point O.

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0}=\frac{0}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O),$$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{0}{y}\xrightarrow[y\to 0]{}0=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(O),$$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{x^2}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}0=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(O),$$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0}=\frac{0}{y}\xrightarrow[y\to 0]{}0=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O).$$

Au passage, les valeurs des dérivées croisées sont cohérentes avec le Théorème de Schwarz, donc *la partie continue !*

▷ Ensuite, il faut calculer les quatre dérivées partielles seconde sur U et vérifier qu'elles tendent toutes vers 0 au voisinage de l'origine.

On s'arme de courage et on trouve :

$$\forall\, M=(x,y)\neq O,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)=\frac{2x^6y+6x^4y^3+12x^2y^5}{(x^2+y^2)^3}.$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)\right|\leqslant\frac{20r^7}{r^6}=20r$$

et le Théorème d'encadrement nous dit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue au point O.

On recommence avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(M)=\frac{2x^7+6x^5y^2-4x^3y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-6x^6y+2x^4y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

et on vérifie toujours de la même manière que ces trois fonctions sont continues au point O.

La fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

► Si on pousse la curiosité à l'ordre 3,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M)=\frac{24xy^5(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

et en passant en polaires : $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, on obtient

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M)=24\cos\theta\sin^5\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta).$$

Cette expression est indépendante de r mais pas de θ, donc elle n'a pas de limite lorsque M tend vers O (si elle avait une limite, cette limite *dépendrait* de l'angle θ !), donc la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ (elle est de classe $\mathscr{C}^3$ sur U seulement).

► *In cauda venenum.* Savez-vous démontrer que U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$?