Calcul différentiel [58.2]

D'ordinaire, on prouve qu'une fonction est différentiable en démontrant qu'elle est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ — de façon analogue, on prouve qu'une série de fonctions converge uniformément en démontrant qu'elle converge normalement.

*On démontre ici qu'une fonction est différentiable sans être de classe $\mathscr{C}^1$ (*exercice classique*).*

⋆

► La fonction $[(x, y) \mapsto xy]$ est polynomiale et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. D'autre part, la fonction

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{\text{polyn.}} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{1/\sqrt{\cdot}} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\sin} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \longmapsto & \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Par produit, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

► Avec $O = (0, 0)$ et $\mathbf{h} = (x, y)$, on obtient

$$\big|f(O + \mathbf{h})\big| = \big|f(x, y)\big| \leqslant |xy| \leqslant r^2 = \|\mathbf{h}\|^2$$

pour la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. (On rappelle que, sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et qu'on peut choisir celle qu'on veut.)

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(O + \mathbf{h}) &= \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2) = o(\mathbf{h}) \\ &= \underbrace{f(O)}_{=0} + \underbrace{\omega_{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}(\mathbf{h})}_{=0} + o(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est bien différentiable au point $O = (0, 0)$.

▷ En particulier, $df(O) = \omega_{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}}$ et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = df(O)(e_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = df(O)(e_2) = 0.$$

▷ La question n'est pas posée, mais on peut y répondre quand même : la fonction f est continue au point O d'après **[12.2]** et comme elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

► Nous allons utiliser une *très importante astuce de calcul* pour préparer la suite. **À retenir absolument !**

Pour calculer en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r^2)}{\partial x} &= 2x && \text{(car } r^2 = x^2 + y^2\text{)} \\ &= 2r\frac{\partial r}{\partial x} && \text{(dérivation d'une composée)} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{et, de même,} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

On peut aussi dériver $\sqrt{x^2 + y^2}$, mais c'est plus fatigant.

► On a déjà calculé les dérivées partielles de f au point O. On calcule maintenant les dérivées partielles de f au point $M = O + \mathbf{h} \neq O$ en utilisant l'astuce précédente. Avec $M = O + \mathbf{h} = (x, y)$ et $r = \|\mathbf{h}\|$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(M) &= y\sin\frac{1}{r} + xy\cos\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^1/_r}{\partial x} = y\sin\frac{1}{r} + xy\cos\frac{1}{r}\cdot\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \\ &= y\sin\frac{1}{r} - \frac{x^2y}{r^3}\cos\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

On y voit plus clair en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = -\cos^2\theta \sin\theta \cos\frac{1}{r} + r\sin\theta\sin\frac{1}{r}.$$

Le second terme est $\mathcal{O}(r)$, alors que le premier terme n'a pas de limite quand r tend vers 0. On comprend ainsi que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$ ne tend pas vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(O)$ lorsque M tend vers O, ce qui prouve que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

▷ C'est pareil pour l'autre dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = x\sin\frac{1}{r} - \frac{xy^2}{r^3}\cos\frac{1}{r}.$$

► Cet exercice est l'occasion de rappeler le **Théorème de composition des limites** :

Si l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ *tend vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* M *tend vers* O *et si l'expression* $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ *tend vers* O *lorsque* $t \in \mathbb{R}$ *tend vers* 0*, alors la composée*

$$\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)]$$

tend vers ℓ *lorsque* t *tend vers* 0.

▷ Considérons d'abord $\gamma(t) = (t, 0)$, fonction continue de $t \in \mathbb{R}$, qui tend vers O lorsque t tend vers 0. Il est clair que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] = 0.$$

▷ Considérons ensuite $\gamma(t) = (t, t)$, fonction continue de $t \in \mathbb{R}$, qui tend aussi vers O lorsque t tend vers 0. Cette fois, la composée

$$\frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] = \underbrace{t\sin\frac{1}{2t^2}}_{\to 0} - \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\sqrt{2}} \underbrace{\cos\frac{1}{2t^2}}_{\text{pas de limite !}}$$

ne tend pas vers 0.

▷ On a démontré que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ était définie en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et qu'elle était en particulier nulle à l'origine.

Les deux cas qu'on vient d'étudier montrent que cette dérivée partielle n'a en fait pas de limite au voisinage de l'origine et que la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.