Calcul différentiel [72]

On peut calculer des gradients sans calculer la moindre dérivée partielle. Suivez le guide...

⋆

► **1.** Pour démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on va d'abord démontrer qu'elle est différentiable. L'expression de la différentielle nous permettra alors de conclure.

▷ Pour $x_0 \in E$ fixé $h \in E$ voisin de 0,

$$f(x_0 + h) = \langle x_0 + h \,|\, x_0 + h \rangle = f(x_0) + 2\langle x_0 \,|\, h \rangle + \|h\|^2.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, l'application $[h \mapsto 2\langle x_0 \,|\, h \rangle]$ est linéaire sur E. D'autre part, $\|h\|^2 = o(\|h\|)$ pour h voisin de 0.

On a ainsi démontré que f était différentiable en chaque point $x_0 \in E$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + 2\langle x_0 \,|\, h \rangle + o(h)$$

et que la différentielle de f :

$$df = [x_0 \mapsto [h \mapsto 2\langle x_0 \,|\, h \rangle]]$$

était une application linéaire (en fonction de x_0) de E dans $L(E, \mathbb{R})$.

Par **[64.1]**, l'application df est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et d'après la définition **[54]**, l'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E.

▷ Par définition, le gradient est l'*unique* vecteur $\nabla f(x_0)$ tel que

$$\forall\, h \in E, \quad \langle \nabla f(x_0) \,|\, h \rangle = df(x_0)(h) = 2\langle x_0 \,|\, h \rangle.$$

Comme le vecteur $2x_0$ convient à l'évidence, on en déduit que

$$\forall\, x_0 \in E, \quad \nabla f(x_0) = 2x_0.$$

► **2.** Les fonctions $h_1 = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right]$, $h_2 = [t \mapsto 1/t]$ et $h_3 = [t \mapsto 1/t^2]$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et strictement positive sur $U = E \setminus \{0\}$, on en déduit d'abord que

$$g_1 \;:\; U \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_1} \mathbb{R}_+^*$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U et ensuite que

$$g_2 \;:\; U \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_2} \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad g_3 \;:\; U \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{h_3} \mathbb{R}_+^*$$

sont également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

▷ Remarquons tout d'abord que $f(x) = (\varphi \circ g_1)(x)$ où $\varphi(r) = r^2$.
Comme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, elle est aussi différentiable et

$$d\varphi(r_0) = [t \mapsto \varphi'(r_0) \cdot t] = [t \mapsto 2r_0 \cdot t].$$

D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}
\underbrace{df(x_0)(h)}_{\in \mathbb{R}} &= \big(d\varphi[g_1(x_0)] \circ dg_1(x_0)\big)[h] \\
&= d\varphi[g_1(x_0)]\big(dg_1(x_0)(h)\big) \\
&= \underbrace{\varphi'[g_1(x_0)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{dg_1(x_0)(h).}_{\in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

On traduit cette égalité avec le gradient : quel que soit $h \in E$,

$$\big\langle \nabla f(x_0) \,\big|\, h \big\rangle = 2\|x_0\| \cdot \big\langle \nabla g_1(x_0) \,\big|\, h \big\rangle$$

et par unicité du gradient :

$$\forall\, x_0 \in U, \quad \nabla f(x_0) = \underbrace{2\|x_0\|}_{\in \mathbb{R}_+^*} \cdot \nabla g_1(x_0)$$

d'où enfin

$$\forall\, x_0 \in U, \quad \nabla g_1(x_0) = \frac{x_0}{\|x_0\|}.$$

▷ On procède bien sûr de manière analogue pour $g_2(x) = {}^1\!/_{g_1(x)}$ et $g_3(x) = {}^1\!/_{[g_1^2(x)]}$, mais on va un peu plus vite.

❧ La relation entre applications linéaires tangentes :

$$dg_2(x_0)(h) = \frac{-1}{g_1^2(x_0)} \cdot dg_1(x_0)(h)$$

devient en termes de gradient :

$$\langle \nabla g_2(x_0) \,|\, h \rangle = \frac{-1}{\|x_0\|^2} \cdot \langle \nabla g_1(x_0) \,|\, h \rangle = \left\langle \frac{-1}{\|x_0\|^2} \cdot \frac{x_0}{\|x_0\|} \,\middle|\, h \right\rangle.$$

Par unicité du gradient,

$$\nabla g_2(x_0) = \frac{-x_0}{\|x_0\|^3}.$$

❧ De même :

$$dg_3(x_0)(h) = \frac{-2}{g_1^3(x_0)} \cdot dg_1(x_0)(h)$$

$$\langle \nabla g_3(x_0) \,|\, h \rangle = \left\langle \frac{-2}{\|x_0\|^3} \cdot \frac{x_0}{\|x_0\|} \,\middle|\, h \right\rangle$$

et donc

$$\nabla g_3(x_0) = \frac{-2x_0}{\|x_0\|^4}.$$

► Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$, une **base orthonormée** de E **[31.4]**.

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_1(t \cdot e_k) - g_1(0_E)}{t - 0} = \frac{|t|\,\|e_k\|}{t} = \operatorname{sgn}(t).$$

Il y a une limite à gauche (-1) et une limite à droite $(+1)$ lorsque t tend vers 0, mais ces limites sont distinctes, donc ce taux d'accroissement n'a pas de limite lorsque t tend vers 0.

Aucune dérivée partielle de g_1 n'est donc définie en 0, bien que g_1 soit continue sur E (inégalité triangulaire) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

► **3.** Remarquons pour commencer que

$$\forall\, x \in U, \quad \varphi(x) = g_2(x) \cdot x = g_2(x) \cdot I_E(x).$$

La fonction φ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U en tant que produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

On applique la règle de Leibniz **[68]** pour calculer l'application linéaire tangente.

$$\begin{aligned} d\varphi(x_0)(h) &= dg_2(x_0)(h) \cdot I_E(x_0) + g_2(x_0) \cdot I_E(h) \\ &\qquad\qquad \text{(par linéarité de } I_E \text{ et } \textbf{[15]}) \\ &= \left\langle \frac{-2 \cdot x_0}{\|x_0\|^4} \,\middle|\, h \right\rangle \cdot x_0 + \frac{h}{\|x_0\|^2} \\ &= \frac{1}{\|x_0\|^2} \cdot \left(h - 2 \cdot \frac{\langle x_0 \,|\, h \rangle}{\|x_0\|^2} \cdot x_0 \right) \end{aligned}$$