Équations différentielles [73]

On résout ici une équation différentielle du second ordre en résolvant successivement deux équations du premier ordre.

Je vous propose deux autres méthodes pour résoudre cette équation et nous verrons enfin comment on peut réussir à décomposer une équation du second ordre en deux équations du premier ordre (au moins dans le cas d'une équation à coefficients constants).

⋆

On note $I =]0, +\infty[$.

► Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. La fonction g définie par

$$\forall\, t \in I, \quad g(t) = tf'(t) + f(t)$$

est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (car f et f' sont de classe $\mathscr{C}^1$ et on effectue des opérations sur les fonctions qui conserve le caractère $\mathscr{C}^1$). De plus,

$$\forall\, t \in I, \quad g'(t) = tf''() + 2f'(t)$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in I, \quad tg'(t) - 2g(t) = t^2 f''(t) - 2f(t).$$

Il est alors clair que

$$\forall\, t \in I, \quad tg'(t) - 2g(t) = \frac{3}{t} \quad \iff \quad t^2 f''(t) - 2f(t) = \frac{3}{t}.$$

► Nous allons maintenant résoudre l'équation.

▷ Dans un premier temps, nous allons calculer la fonction g.

❧ Une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I)$ est solution de $ty'(t) - 2y(t) = 0$ sur I si, et seulement si, il existe une constante K telle que

$$\forall\, t \in I, \quad y(t) = Kt^2.$$

❧ On cherche ensuite une solution particulière de la forme $K(t)t^2$ où la fonction K est supposée de classe $\mathscr{C}^1$. On trouve alors

$$\forall\, t \in I, \quad t \cdot K'(t) \cdot t^2 = \frac{3}{t}, \qquad \text{soit} \qquad K'(t) = \frac{3}{t^4} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{-1}{t^3}\Big).$$

❧ La solution générale est donc

$$\forall\, t \in I, \quad g(t) = \frac{-1}{t^3} \cdot t^2 + Kt^2 = \underbrace{\frac{-1}{t}}_{\text{SP}} + \underbrace{Kt^2}_{\text{EH}}.$$

▷ Dans un second temps, nous calculons la fonction f, solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t \in I, \quad tx'(t) + x(t) = g(t) = \frac{-1}{t} + Kt^2.$$

Bien entendu, la méthode est exactement la même !

❧ Une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I)$ est solution de l'équation homogène $tx'(t) + x(t) = 0$ sur I si, et seulement si, il existe une constante C telle que

$$\forall\, t \in I, \quad x(t) = \frac{C}{t}.$$

❧ On cherche maintenant une solution particulière de la forme ${}^{C(t)}/_{t}$ où la fonction C est de classe $\mathscr{C}^1$. On trouve alors

$$\frac{-1}{t} + Kt^2 = t \cdot \frac{C'(t)}{t} = C'(t).$$

❧ La solution générale est donc

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \frac{1}{t} \cdot \Big(-\ell n\, t + \frac{K}{3}t^3\Big) + \frac{C}{t} = \underbrace{\frac{C}{t} + K_2 t^2}_{\text{SP}} \underbrace{- \frac{\ell n\, t}{t}}_{\text{EH}}.$$

❧ Comme d'habitude, on a tiré parti du fait que la constante K était quelconque pour remplacer le facteur constant ${}^{K}/_{3}$ par le facteur constant K_2, ce qui allège un peu l'expression de la solution générale.

► **Première variante.** Si on cherche les solutions de l'équation homogène sous la forme $x(t) = t^\alpha$, on aboutit rapidement à

$$\forall\, t \in I, \quad [\alpha(\alpha-1)-2]t^\alpha = 0$$

et donc à $(\alpha+1)(\alpha-2) = 0$.

Le détail des calculs (*s'ils sont bien menés*) rend la réciproque inutile.

▷ Il reste alors à appliquer la méthode de variations des constantes **[81]** pour en déduire la solution générale de l'équation complète. **Vérifiez que vous savez faire sans hésitation !**

► **Deuxième variante.** Avec $t = e^u$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $K_1 e^{-u} + K_2 e^{2u}$. C'est trop beau pour passer à côté ! Nous allons changer de variable en posant $t = e^u$.

▷ On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^2(I)$ et on lui associe la fonction φ définie par

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = f(\underbrace{e^u}_{\in I}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall\, t \in I, \quad f(t) = \varphi(\ell n\, t).$$

D'après les compositions de fonctions :

$$\varphi\ :\ \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad\qquad f\ :\ I \xrightarrow{\ell n} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la foncton f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

▷ Comme

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(u) = e^u f'(e^u) \quad \text{et} \quad \varphi''(u) = e^u f'(e^u) + e^{2u} f'(e^u)$$

alors

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(u) - \varphi'(u) - 2\varphi(u) = (e^u)^2 f''(e^u) - 2f(e^u)$$

et comme exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I, on en déduit que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(u) - \varphi'(u) - 2\varphi(u) = 0 \quad\iff\quad \forall\, t \in I, \quad t^2 f''(t) - 2f(t) = 0.$$

On a ainsi traduit l'équation homogène en une équation homogène à coefficients constants, dont la résolution est simplissime.

► **À propos des équations à coefficients constants.** Nous venons de voir trois méthodes de résolution, toutes trois partant d'une astuce calculatoire : la décomposition magique en deux équations du premier ordre ; la recherche de solutions d'un type très particulier ; un changement de variable miraculeux.

Je vais maintenant relier la première et la troisième astuce, histoire de vous indiquer ce qui se trame en coulisses.

▷ On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme $D \in L(E)$ défini par

$$\forall\, f \in E, \quad D(f) = f'.$$

L'espace des solutions de l'équation homogène apparaît alors comme le noyau d'un endomorphisme :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) - f'(u) - 2f(u) = 0 \quad\iff\quad (D^2 - D - 2I_E)(f) = 0_E.$$

(Cet endomorphisme est appelé un **opérateur différentiel**.)

▷ Comme cet endomorphisme est un polynôme en D, on factorise ce polynôme pour décomposer l'endomorphisme :

$$D^2 - D - 2I_E = (D + I_E) \circ (D - 2I_E) = (D - 2I_E) \circ (D + I_E).$$

Cela nous permet de caractériser le noyau de cet endomorphisme en deux étapes.

$$\begin{aligned}
f \in \operatorname{Ker}(D^2 - D - 2I_E) &\iff (D^2 - D - 2I_E)(f) = O_E \\
&\iff (D - 2I_E)\big[(D + I_E)(f)\big] = O_E \\
&\iff \begin{cases} g \in \operatorname{Ker}(D - 2I_E) \\ (D + I_E)(f) = g \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall\, u \in \mathbb{R}, & g'(u) - 2g(u) = 0 \\ \forall\, u \in \mathbb{R}, & f'(u) + f(u) = g(u) \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme on le voit sur cet exemple simple, il est naturel de ramener la résolution d'une équation du second ordre à la résolution successive de deux équations du premier ordre.

▷ Ça ne veut pas dire que ce procédé soit toujours simple à mettre en œuvre, ni même qu'il soit toujours possible de le mettre en œuvre !