Calcul différentiel [77.6]

La règle de la chaîne, c'est incomparable — à condition de bien savoir ce qu'on fait !

⋆

► Appliquons la règle de la chaîne sans trop réfléchir :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Or x et y sont indépendantes et $z(x, y) = x + y$, donc

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Il reste donc

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En simplifiant par $\frac{\partial w}{\partial x}$, on en déduit que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ce qui vient contredire la définition : comme $w = x + y + z$, il faut bien que $\frac{\partial w}{\partial z} = 1$.

► Que s'est-il passé ?

On a traité w tantôt comme une fonction de trois variables (dans le membre de droite, ça se voyait) :

$$w = w(x, y, z) = x + y + z$$

tantôt comme une fonction de deux variables (dans le membre de gauche, mais ça ne se voyait pas) :

$$w = w(x, y) = x + y + (x + y) = 2x + 2y.$$

Sur ces deux expressions, il est clair que la valeur de $\frac{\partial w}{\partial x}$ n'est pas la même, ce qui explique la contradiction relevée.

► Mais comment éviter les ennuis alors ?

Très simplement : en traitant ce genre de situation comme un **changement de variables**.

▷ Il faut donc distinguer deux fonctions mathématiques :

– une fonction de trois variables :

$$w_1(r, s, t) = r + s + t$$

– une fonction de deux variables :

$$w_2(x, y) = 2x + 2y$$

qui sont reliées par un changement de variables :

$$\varphi(x, y) = (x, y, x + y)$$

via la relation

$$w_2(x, y) = (w_1 \circ \varphi)(x, y).$$

▷ Cela étant posé, on peut appliquer la règle de la chaîne en toute sérénité et laisser les notations travailler à notre place :

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Dans le premier membre, on a une fonction de x (et donc de y).

Dans le second membre, on fait apparaître une fonction des variables r, s et t (il s'agit de w_1) et on traite aussi r, s et t comme des fonctions de x et y :

$$r(x,y) = x, \quad s(x,y) = y, \quad t(x,y) = x + y.$$

▷ Après simplification, il reste alors

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

c'est-à-dire $2 = 1 + 1$. La contradiction s'est évaporée !

REMARQUE.— Comme les dérivées partielles sont constantes, on ne courait pas le risque d'une autre contradiction. D'après le polycopié sur la règle de la chaîne, au premier membre, il faut lire :

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y)$$

tandis qu'au second membre, il faut prendre soin de lire :

$$\frac{\partial w_1}{\partial r}\big(\varphi(x,y)\big)$$

car il s'agit aussi d'une fonction de x et y (pour des raisons d'homogénéité).