Équations différentielles [107]

La moitié du cours en un seul exercice classique : trigonalisation d'une matrice, calcul des puissances puis de l'exponentielle, application géométrique à un système différentiel.

*

► La matrice A est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

▷ Son polynôme caractéristique est donc égal au produit de $(X - 3)$ et du polynôme caractéristique du bloc

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{tr } B = 4 = 1 + 3$ et que $\det B = 3 = 1 \times 3$, les valeurs propres de B sont 1 et 3 et donc

$$\chi_A = (X - 3)^2(X - 1).$$

▷ Déterminons maintenant les sous-espaces propres.
Comme 1 est une valeur propre simple, le noyau de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une droite (la **dimension de $\text{Ker}(A - I_3)$** est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre) et comme les colonnes de cette matrice sont liées par la relation

$$0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 - 1 \cdot C_3 = 0,$$

cette droite propre est dirigée par $\langle 0, 1, -1 \rangle$.

Comme 3 est une valeur propre double, le noyau de la matrice

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une droite ou un plan. Il est clair que les colonnes C_2 et C_3 ne sont pas proportionnelles, donc le rang de la matrice est au moins égal à 2. Donc le noyau est une droite, visiblement dirigée par $\langle 1, 0, 0 \rangle$.

La dimension du sous-espace propre associé à 3 est strictement inférieure à la multiplicité de cette valeur propre, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

▷ Cependant, le polynôme caractéristique de A est scindé, donc la matrice A est trigonalisable.

Plus précisément, comme $(X - 3)^2$ et $(X - 1)$ sont premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux nous assure que :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

(OK, ce n'est pas $\mathbb{R}^3$, c'est $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, mais chicaner sur cet abus de notation est hors sujet.)

Comme

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

le noyau de cette matrice est engendré par $\langle 1, 0, 0 \rangle$ et par $\langle 0, 1, 1 \rangle$.

De plus,

$$(A - 3I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle 4, 0, 0 \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} A\langle 0, 1, -1 \rangle &= 1 \cdot \langle 0, 1, -1 \rangle && \in \text{Ker}(A - I_3), \\ A\langle 4, 0, 0 \rangle &= 3 \cdot \langle 4, 0, 0 \rangle && \in \text{Ker}(A - 3I_3) \subset \text{Ker}(A - 3I_3)^2, \\ A\langle 0, 1, 1 \rangle &= 3 \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle + 1 \cdot \langle 4, 0, 0 \rangle && \in \text{Ker}(A - 3I_3)^2. \end{aligned}$$

On vient donc de trouver une base de chacun des deux sous-espaces caractéristiques (= les deux sous-espaces qui interviennent ici dans le théorème de décomposition des noyaux), ce qui nous donne une base de $E = \mathbb{R}^3$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible (c'est la matrice de passage de la base canonique à une base choisie en fonction de la matrice A) et, d'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J$$

ce qui prouve que A et J sont semblables.

► Nous allons maintenant calculer $\exp(tA)$ en calculant les puissances de A .

▷ **Première méthode : avec la matrice de passage**

On remarque que la matrice J est triangulaire par blocs :

$$J = \text{Diag}(1, B_2) \quad \text{avec} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme I_2 commute à toutes les matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on peut calculer les puissances de B_2 avec la formule du binôme, d'autant plus facilement que l'autre terme est visiblement une matrice nilpotente d'indice 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_2^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit une décomposition intéressante de la matrice A^n : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 1^n \cdot P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + 3^n \cdot P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + 3^{n-1} n \cdot P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Un effort modéré donne

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et un effort plus prolongé donne

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

REMARQUE.— Pour contrôler les calculs, on peut se souvenir que les deux premières matrices représentent les projections associées à la décomposition $E = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)^2$.

▷ **Deuxième méthode : avec le polynôme minimal**

On sait que le polynôme minimal de A divise le polynôme caractéristique de A (Théorème de Cayley-Hamilton) et que ces deux polynômes unitaires ont mêmes racines. Il n'y a donc que deux candidats possibles : $\mu = (X - 3)(X - 1)$ et $\mu = (X - 3)^2(X - 1)$.

Comme A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples, donc $\mu = (X - 3)^2(X - 1)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par μ . Il existe un quotient $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ (sans intérêt ici) et un reste $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$ (puisque le degré du diviseur est égal à 3) :

$$X^n = (X - 3)^2(X - 1)Q_n + (a_n X^2 + b_n X + c_n).$$

On substitue les racines 1 et 3 à X dans cette égalité pour obtenir deux équations. Comme 3 est une racine double, on dérive cette égalité :

$$nX^{n-1} = (X - 3)[\dots \text{sans intérêt} \dots] + (2a_n X + b_n)$$

et on substitue 3 à X dans cette nouvelle égalité pour obtenir la troisième équation.

En résolvant le système ainsi obtenu :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ 6a_n + b_n = 3^{n-1}n \end{cases}$$

on trouve

$$a_n = \frac{1 - 3^n + 2n \cdot 3^{n-1}}{4}, \quad b_n = \frac{-3 + 3 \cdot 3^n - 4n \cdot 3^{n-1}}{2}, \quad c_n = \frac{9 - 5 \cdot 3^n + 6n \cdot 3^{n-1}}{4}$$

et donc

$$A^n = \left(\frac{1}{4}A^2 - \frac{3}{2}A + \frac{9}{4}I_3 \right) + 3^n \left(-\frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{2}A - \frac{5}{4}I_3 \right) + 3^{n-1}n \left(\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{3}{2}I_3 \right)$$

et on retrouve ici la décomposition de A^n calculée précédemment.

REMARQUE.— Les calculs sont un peu moins fastidieux (moins de produits matriciels que dans la première méthode), mais ils ne sont pas non plus immédiats : il faut quand même résoudre le système qui donne le reste de la division euclidienne.

▷ Quelle que soit la méthode retenue pour calculer les puissances de A , il reste à remarquer que, quels que soient a et t dans $\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n t^n}{n!} = \exp(at), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a^{n-1} t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n t^{n+1}}{n!} = t \exp(at).$$

(Séries de Poisson)

On en déduit l'exponentielle de tA pour tout $t \in \mathbb{R}$.

► **Résumé du [Chap 10 - 71]**

Soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Le vecteur (x, y, z) appartient au plan d'équation $[ax + by + cz = 0]$ si, et seulement si,

$$(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

(Mais oui, mais oui ! C'est bien un produit scalaire !)

Ce plan est donc stable par A si, et seulement si, l'équation précédente entraîne que

$$(a \quad b \quad c) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Cela signifie que le noyau de la forme linéaire représentée par la matrice ligne

$$(a \quad b \quad c) A$$

contient le noyau de la forme linéaire représentée par la matrice ligne $(a \quad b \quad c)$ et donc qu'il existe une constante de proportionnalité $\lambda \in \mathbb{R}$ (éventuellement nulle) telle que

$$(a \quad b \quad c) A = \lambda (a \quad b \quad c)$$

ou encore que la colonne $\langle a, b, c \rangle$ est un vecteur propre de tA .

► Les matrices A et tA ont mêmes valeurs propres : 1 et 3.

Calculons les sous-espaces propres.

$$\text{Ker}({}^tA - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \langle 0, 1, -1 \rangle$$

$$\text{Ker}({}^tA - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle$$

Les plans stables par A sont donc les plans d'équation

$$[0 \cdot x + 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0] = [y - z = 0] \quad \text{et} \quad [0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0] = [y + z = 0].$$

► **Trajectoire contenue dans un plan**

Comme la matrice A est inversible (car $0 \notin \text{Sp}(A)$), la condition $X'(0) = \langle 1, 1, 1 \rangle$ peut aussi s'écrire

$$X(0) = A^{-1}X'(0) = \langle 1/3, 1, 1 \rangle \in [y - z = 0].$$

Pour une équation différentielle à coefficients constants, on sait [97] que la solution du problème de Cauchy associé à la condition initiale $(t = 0, X(0) = \langle 1/3, 1, 1 \rangle)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)X(0).$$

▷ **Version pédestre**

On vérifie directement sur l'expression de $\exp(tA)$ que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (0 \quad 1 \quad -1) \exp(tA) = e^t (0 \quad 1 \quad -1)$$

et on en déduit immédiatement que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (0 \quad 1 \quad -1) X(t) = e^t (0 \quad 1 \quad -1) X(0) = 0$$

c'est-à-dire que la trajectoire décrite par $X(t)$ est contenue dans le plan $[y - z = 0]$.

▷ **Version aquiline**

Le calcul de $\exp(tA)$ avec le polynôme minimal nous a montré que la matrice $\exp(tA)$ était un polynôme en A (avec des coefficients qui dépendent de t).

Comme le plan $[y - z = 0]$ est stable par A , il est stable par n'importe quel polynôme en A et en particulier par $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Et comme le vecteur position initiale $X(0)$ appartient à ce plan, le vecteur $X(t) = \exp(tA)X(0)$ appartient encore à ce plan pour tout $t \in \mathbb{R}$.