

---

## Calcul différentiel [79.2, 79.3]

---

*La règle de la chaîne et tout est dit !*

★

### [79.2]

► Si on fixe  $y$ , on se retrouve avec la composée de

$$x \mapsto g(x, y)$$

par

$$z \mapsto F(z).$$

Il s'agit donc de la composée de deux fonctions d'**une** variable réelle et il suffit d'appliquer la règle de dérivation des fonctions composées : la règle de la chaîne est ici hors sujet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ &= \cos[3x - 4y] \times 3 = 3 \cos(3x - 4y).\end{aligned}$$

► Même chose en fixant  $x$ ...

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ &= \cos[3x - 4y] \times (-4) = -4 \cos(3x - 4y).\end{aligned}$$

► On retrouve (heureusement !) ces résultats en explicitant la fonction  $F$  et en dérivant directement (= sans faire apparaître  $f$  et  $g$ ) :

$$F(x, y) = \sin(3x - 4y).$$

REMARQUE.— Quand on maîtrise vraiment le fonctionnement de la règle de la chaîne, on peut sous-entendre le point où les dérivées partielles sont évaluées. Dans un délai raisonnable, vous écrirez donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{df}{dz}[g(x, y)] \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Pour le moment, privilégiez encore la sécurité à la vitesse d'exécution !

REMARQUE.— Savez-vous démontrer *rapidement* que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### [79.3]

► Il s'agit ici d'appliquer le résultat du [78.5]. Mais il y a une différence (de taille !) : au [78.5], les notations ont été choisies pour que les calculs se fassent en douceur alors qu'ici, les notations ont été choisies pour créer la confusion.

► Pour contourner l'obstacle, nous allons changer les notations.

Puisque  $f$  est définie comme une fonction des variables  $u$  et  $v$ , nous allons noter  $u(x, y)$  au lieu de  $g(x, y)$  et  $v(x, y) = h(x, y)$  afin de nous retrouver exactement dans le contexte d'application de la règle de la chaîne (ce contexte est celui d'un *changement de variables*).

► On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= 1 \times (2xy) + (-1) \times y^2 = (2x - y)y\end{aligned}$$

puisque  $u(x, y) = yx^2$  et  $v(x, y) = y^2x$ .

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x, y), h(x, y)) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ &= 1 \times (x^2) + (-1) \times (2xy) = (x - 2y)x.\end{aligned}$$

REMARQUE.— Les dérivées partielles de  $f$  étant constantes, il serait très agréable de pouvoir se contenter d'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

pour s'épargner de lassitude. Comme je l'ai mentionné plus haut, c'est possible à condition de bien maîtriser son outil !

► Ici encore, on peut retrouver ces résultats sans passer par la règle de la chaîne, en partant directement de l'expression simplifiée de  $F(x, y)$ .

$$F(x, y) = x^2y - xy^2 = xy(x - y).$$

REMARQUE.— Savez-vous démontrer *rapidement* que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?