Calcul différentiel [96]

Comment calculer des dérivées partielles secondes à coup sûr ? En suivant les conseils de René D., bien entendu ! On calcule les dérivées premières, on simplifie et on y retourne pour les dérivées secondes.

*

• Les fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^2$ par hypothèse. On doit tout de suite remarquer qu'il s'agit de fonctions d'une seule variable réelle et qu'on peut donc parler de *dérivée* et de *dérivée seconde* pour ces deux fonctions.

• Le théorème de Schwarz [60], lorsqu'il peut être appliqué, permet de simplifier le calcul des dérivées secondes.

En général, pour une fonction de 2 variables, il y a quatre dérivées partielles secondes à calculer. Mais si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, il n'y a plus que trois dérivées partielles secondes à calculer.

Plus généralement, pour une fonction de n variables, il y a n^2 dérivées partielles secondes à calculer et si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, il n'y en a que $\frac{n(n+1)}{2}$ à calculer car la matrice hessienne

$$\text{Hf}(M_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est une matrice symétrique (et comme chacun sait, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable).

[96.1]

► Commençons par démontrer que la fonction u est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour cela, analysons cette fonction. (*Top-down, kids !*)

▷ Tout d'abord, la fonction u est la *somme* de deux fonctions.

$$[(x, y) \mapsto x\varphi(x + y)] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto y\psi(x + y)].$$

▷ Chacun de ces deux termes est lui-même le *produit* de deux fonctions : d'une part

$$[(x, y) \mapsto x] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto \varphi(x + y)]$$

et d'autre part

$$[(x, y) \mapsto y] \quad \text{et} \quad [(x, y) \mapsto \psi(x + y)].$$

▷ Dans les deux produits, le premier facteur est une application linéaire, donc [64.1] de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans les deux produits aussi, le second facteur est pour sa part le produit d'une application linéaire (donc $\mathcal{C}^\infty$) et d'une composée :

$$\begin{array}{ccccc} (x, y) & \xrightarrow{\text{linéaire}} & x + y & \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \varphi(x + y) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

dans le premier cas et

$$\begin{array}{ccccc} (x, y) & \xrightarrow{\text{linéaire}} & x + y & \xrightarrow{\mathcal{C}^2} & \psi(x + y) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

dans le second cas.

▷ Non seulement cette analyse prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, mais en outre elle nous indique comment calculer les dérivées partielles de f .

Pour utiliser la notation de Leibniz confortablement, nous allons supposer que φ et ψ sont des fonctions de la variable z et nous allons poser $z(x, y) = x + y$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial[x\varphi(x+y)]}{\partial x} + \frac{\partial[y\psi(x+y)]}{\partial x} \\
&= \left[1 \cdot \varphi(x+y) + x \cdot \left\{\frac{\partial[\varphi(x+y)]}{\partial x}\right\}\right] + \left[y \cdot \left\{\frac{\partial[\psi(x+y)]}{\partial x}\right\}\right] \\
&= \left[\varphi(x+y) + x \cdot \left\{\frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right\}\right] + \left[y \cdot \left\{\frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right\}\right] \\
&= \left[\varphi(x+y) + x \cdot \varphi'(x+y) \cdot 1\right] + \left[y \cdot \psi'(x+y) \cdot 1\right] \\
&= \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y)
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi'(x+y) + \psi(x+y) + y\psi'(x+y)$$

mais aussi, en dérivant à nouveau ces expressions :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y)] \\
&= 2\varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} [x\varphi'(x+y) + \psi(x+y) + y\psi'(x+y)] \\
&= x\varphi''(x+y) + 2\psi'(x+y) + y\psi''(x+y) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} [x\varphi'(x+y) + \psi(x+y) + y\psi'(x+y)] \\
&= \varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + \psi'(x+y) + y\psi''(x+y) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y)] = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}
\end{aligned}$$

(la dernière ligne de calcul ne servant qu'à vérifier le résultat du Théorème de Schwarz sur cet exemple).

Il est alors clair que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

[96.2]

C'est la même chose, nous allons donc procéder avec la même méthode ou presque. (*Bottom-up, kids!*)

► Les fonctions $[(x, y) \mapsto x]$ et $[(x, y) \mapsto y]$ sont linéaires sur un espace de dimension finie, donc elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme φ est, par hypothèse, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la composée

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y)
\end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc

$$z = [(x, y) \mapsto x + \varphi(y)]$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme ψ est, par hypothèse, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la composée

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x, y) & \longmapsto & x + \varphi(y) & \longmapsto & \psi(x + \varphi(y)) = v(x, y)
\end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

► On se lance alors dans le calcul des dérivées partielles en considérant que ψ est une fonction de la variable z , pour être cohérent avec la fonction $z = z(x, y)$ définie ci-dessus.

(Pour le calcul des dérivées, la seule méthode est *top-down*, comme on l'a vu plus haut.)

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(z(x, y)) \cdot 1 = \psi'(x + \varphi(y)) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \psi'(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\end{aligned}$$

On re-dérive par rapport à x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{d(\psi')}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \psi''(x + \varphi(y)) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi'(x + \varphi(y)) \right] \cdot \varphi'(y) \\ &= \psi''(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\end{aligned}$$

Et la conclusion est alors immédiate !

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \psi''(x + \varphi(y)) \cdot \psi'(x + \varphi(y)) \cdot \varphi'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$