

Calcul différentiel [61.6]

On note U , l'ouvert $[x \neq 0]$.

L'application polynomiale $[(x, y) \mapsto x^2]$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et l'application

$$\begin{array}{ccccc} U & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y/x & \mapsto & \cos y/x \end{array}$$

est aussi de classe \mathcal{C}^∞ sur U en tant que composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur U par une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

En particulier, la fonction f est bien de classe \mathcal{C}^1 sur U .

L'énoncé définit f sur \mathbb{R}^2 tout entier : cette fonction est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 tout entier ?

• Pour $M = (x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -x \sin \frac{y}{x}.$$

Pour $M = (0, y) \in [x = 0]$,

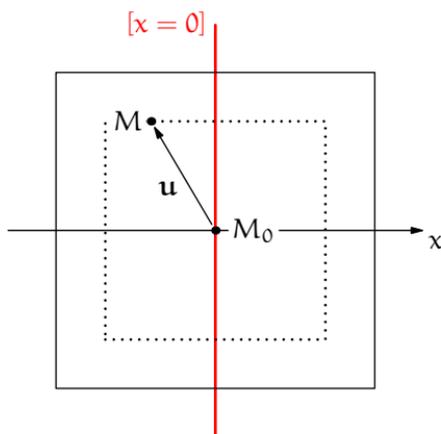
$$\frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = h \cos \frac{y}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = 0$$

donc les dérivées partielles de f sont bien définies sur $[x = 0]$ et

$$\forall M \in [x = 0], \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0.$$

• Nous allons étudier la continuité de $\partial f / \partial y$ en un point $M_0 = (0, y_0)$. Nous allons mesurer les distances avec la norme produit : si $M = (x, y)$, alors

$$M_0 M = (x, y - y_0) \quad \text{et} \quad \|M_0 M\| = \max\{|x|, |y - y_0|\}.$$



D'après les calculs précédents,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right| = \left| -x \sin \frac{y}{x} \right| \leq |x| \leq \|M_0 M\|$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

Autrement dit : la dérivée partielle $\partial f / \partial y$ est continue en chaque point M_0 de l'axe $[x = 0]$ et comme f est \mathcal{C}^1 sur U , on en déduit que $\partial f / \partial y$ est continue sur \mathbb{R}^2 tout entier.

• Nous allons maintenant étudier la continuité de $\partial f / \partial x$ en un point $M_0 = (0, y_0) \in [x = 0]$ distinct de l'origine. En conservant les notations précédentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 2x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}.$$

Comme précédemment,

$$\left| 2x \cos \frac{y}{x} \right| \leq 2 \| \mathbf{M}_0 \mathbf{M} \|$$

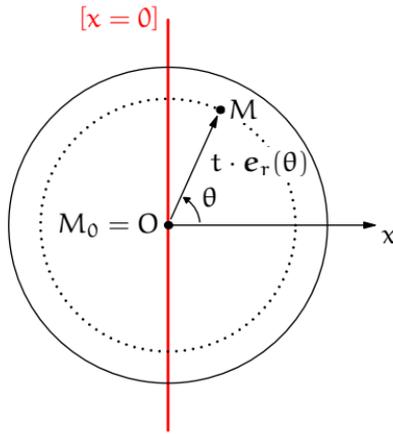
donc le premier terme tend bien vers 0 lorsque M tend vers M_0 .

En revanche, lorsque M tend vers M_0 , le quotient y/x est équivalent à y_0/x et tend donc vers $\pm\infty$ (selon le signe de y_0). Comme \sin n'a pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$ et que y tend vers $y_0 \neq 0$, on en déduit que la variation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$$

n'a pas de limite lorsque M tend vers M_0 et donc que la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est pas continue en M_0 .

• Enfin, nous allons étudier la continuité de $\partial f/\partial x$ à l'origine et pour cela, nous allons utiliser la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^2 (passer en polaires).



Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(O + t \cdot \mathbf{e}_r) - \frac{\partial f}{\partial x}(O) \right| \leq 2|x| + |y| \leq 3|t| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ est continue à l'origine.

• En conclusion, les dérivées partielles de f sont définies sur \mathbb{R}^2 tout entier ; la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est continue sur \mathbb{R}^2 tout entier mais la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ n'est continue en aucun point de l'axe $[x = 0]$ autre que l'origine. La fonction f n'est donc pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

REMARQUE.— Au voisinage de l'origine, avec $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ et $h_x \neq 0$,

$$|f(O + \mathbf{h})| = h_x^2 \left| \cos \frac{h_y}{h_x} \right| \leq h_x^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2$$

(qu'on choisisse la norme euclidienne canonique ou la norme produit). Il est clair que l'encadrement

$$|f(O + \mathbf{h})| \leq \|\mathbf{h}\|^2$$

est encore vrai si $h_x = 0$: il est donc vrai au voisinage de l'origine et on en déduit que

$$f(O + \mathbf{h}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$$

et donc que

$$f(O + \mathbf{h}) = f(O) + \omega(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h})$$

pour \mathbf{h} voisin de 0. La fonction f est donc différentiable à l'origine et l'application linéaire tangente à f en O est l'application nulle ω (ce dernier point étant prévu, puisque les deux dérivées partielles de f en O sont nulles).