Calcul différentiel [58.4]

Tout ce que vous avez appris sur les séries de fonctions et les fonctions définies par des intégrales avec une *variable réelle s'applique sans grande modification aux fonctions de* plusieurs *variables.*

C'est d'ailleurs le but principal du cours de topologie que de fonder rigoureusement l'analogie entre le calcul à une variable et le calcul à plusieurs variables (qui est en fait le calcul à une *variable* vectorielle*). Tous les énoncés utiles figurent au* ***[chap. 25 - IV]*** *(mais les explications sont éparpillées dans les chapitres précédents).*

⋆

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_n(x) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}.$$

Il est clair que chaque u_n est une fonction rationnelle et que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. Ces fonctions u_n sont donc toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, par restriction, elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U =]-1,1[\times]-1,1[$.

Remarque.— Comment démontrer que U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

► Commençons par le commencement : la convergence simple sur U.

Comme $|y| < 1$, il est clair que $1+y^{2n}$ tend vers 1 et donc que $u_n(x,y) \sim x^n$. Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ est *absolument* convergente et, par comparaison, la série $\sum u_n(x,y)$ est *absolument* convergente.

Ainsi, la somme

$$S = \left[(x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)\right]$$

est bien définie sur l'ouvert U.

► Ensuite la continuité sur U.

▷ Comme $1+y^{2n} \geqslant 1$, il est clair que

$$\forall\,(x,y) \in U, \qquad \bigl|u_n(x,y)\bigr| \leqslant |x|^n.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1, on sait ce qu'on doit faire !

▷ Pour $0 < a < 1$, on a

$$\forall\,(x,y) \in]-a,a[\times]-1,1[, \qquad \bigl|u_n(x,y)\bigr| \leqslant a^n$$

et la série $\sum a^n$ est absolument convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'ouvert

$$U_a =]-a,a[\times]-1,1[$$

et comme les fonctions u_n sont continues sur U, on en déduit que la somme S est continue sur

$$U = \bigcup_{0<a<1} U_a.$$

Remarque.— Cette étude n'est pas vraiment nécessaire : toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable et a fortiori continue, il suffirait donc de prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque.— Avez-vous remarqué l'enchaînement *naturel* des arguments ? Rien n'est fixé d'avance, on majore, on réfléchit à la tête du majorant (le terme général d'une série entière) et, sachant le but qu'on veut atteindre (la convergence normale), on trouve le moyen de l'atteindre (le choix de U_a au lieu de U en s'inspirant du théorème portant sur la convergence normale des séries entières : **[chap.12 - 38]**) : c'est toute l'utilité de bien connaître son cours.

REMARQUE.— Comment démontrer que U_a est un ouvert ?

▶ On continue et on attaque vraiment le sujet de l'exercice. D'après le théorème fondamental **[56]**, il s'agit de démontrer que les dérivées partielles de S sont bien définies sur U et qu'elles sont continues sur U.

▷ Bien entendu, nous allons pour cela appliquer un théorème de dérivation terme à terme !

▷ Dans un premier temps, je raisonne en fonction de x, à y fixé.

❧ Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqslant n|x|^{n-1}.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est égal à 1, celui de la série dérivée $\sum nx^{n-1}$ est aussi égal à 1, donc

$$\forall\, 0 < a < 1,\ \forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, (x, y) \in U_a, \qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant na^{n-1} \tag{1}$$

où la série $\sum na^{n-1}$ est convergente.

❧ Résumons : à y_0 fixé et donc avec x comme seule variable :

– la série $\sum u_n(\cdot, y_0)$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$

$$\begin{array}{ccccc}]-1,1[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x, y_0) & \longmapsto & u_n(x, y_0) \end{array}$$

– la série de fonctions $\sum u_n(\cdot, y_0)$ converge simplement sur $]-1, 1[$;
– la série des dérivées $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(\cdot, y_0)$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset]-1, 1[$.

D'après **[chap11 - 89,108]**, la somme de cette série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^1$ **en tant que fonction de** $x \in]-1, 1[$ et

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(x, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y_0).$$

❧ Considérons maintenant cette dérivée partielle **en tant que fonction de** $(x, y) \in U$.

Sur l'expression précédente, on voit que cette fonction est la somme d'une série de fonctions continues sur U qui converge normalement sur l'ouvert U_a pour tout $0 < a < 1$. (C'est la signification de (1).)

Par conséquent, la dérivée partielle

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left[(x, y) \mapsto \frac{\partial S}{\partial x}(x, y)\right]$$

est bien continue sur l'ouvert U (continue, j'insiste lourdement !, en tant que fonction du couple (x, y)).

REMARQUE.— On est prié de retenir la grande différence avec le cas ordinaire des fonctions d'une seule variable : ici, dans un premier temps, on exprime la dérivée partielle ; dans un second temps, on vérifie sa régularité. (Pour les fonctions d'une seule variable, la régularité et l'expression de la dérivée sont établies *en même temps* par le Théorème de dérivation terme à terme.)

▷ Second temps : même démarche en fonction de y, en supposant donc que x est fixé ($x = x_0 \in]-1, 1[$) — même si, le temps d'établir quelques encadrements on laisse x varier librement.

❧ Pour tout $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{-2nx^{n-1}y^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}.$$

Or $|y| < 1$, donc $|y^{2n-1}| < 1 \leqslant 1 + y^{2n}$ et par conséquent

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| \leqslant \frac{2n|x^n|}{1+y^{2n}} \leqslant 2n|x|^n.$$

❧ Comme plus haut, on en déduit que

$$\forall\, 0 < a < 1,\ \forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, (x, y) \in U_a, \qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant n a^n \tag{2}$$

et on sait (les raisons ont déjà été données) que la série $\sum n a^n$ est convergente.

❧ (À partir de tout de suite, x est fixé, égal à x_0.) Comme plus haut, on en déduit que

$$\forall\, y \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x_0, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x_0, y)$$

et comme plus haut (cette fois à l'aide de (2)), on en déduit que

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \left[(x, y) \mapsto \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)\right]$$

est une fonction continue sur U.

► Mission accomplie : la fonction S est définie sur l'ouvert U, elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en tout point de U et ces dérivées partielles sont continues sur U, *donc* S est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.